Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

1. Tri traktora oru njivu. Ako prva dva traktora rade zajedno, treba im 15 dana da preoru cijelu njivu. Prvi i treći traktor preoru njivu radeći zajedno 8 dana, a sva tri traktora zajedno preoru njivu za 6 dana. Koliko dana svakom od traktora treba da samostalno preore cijelu njivu?

2. Odredi sve cijele brojeve x, y, z za koje vrijede jednakosti

$$x - yz = 1 \qquad \text{i} \qquad xz + y = 2.$$

3. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ paralelograma $ABCD$. Ako je E nožište okomice iz točke D na pravac AM, dokaži da vrijedi $|CD| = |CE|$.

4. Realni brojevi a, b i c različiti su od nule i zadovoljavaju jednakosti

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2, \\ b^2 + b &= c^2, \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

Dokaži da vrijedi $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

5. U nekom je razredu trideset i troje učenika. Svaki učenik je na ploču napisao dva broja: koliko još učenika osim njega u razredu ima isto ime kao on, te koliko još učenika osim njega u razredu ima isto prezime kao on.

Ako se svaki od brojeva 0, 1, 2, …, 10 pojavljuje na ploči barem jednom, dokaži da u razredu postoji barem jedan par učenika istog imena i prezimena.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\sqrt{|x-1|+|x+4|}=|x|.$$

2. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+1=0$ su realna. Ako svako od tih rješenja umanjimo za 1, dobit ćemo rješenja kvadratne jednadžbe $bx^2+x+a=0$.

Odredi sve takve realne brojeve a, b.

3. Prirodni broj zovemo *ljepuškastim* ako zbrojen s nekim svojim djeliteljem daje rezultat 360. Odredi zbroj svih ljepuškastih brojeva.

4. Svi vrhovi šesterokuta $ABCDEF$ leže na kružnici promjera $\overline{AD}$. Pravac BF siječe pravce AD i CE redom u točkama G i H. Ako je $\sphericalangle FEH=56°$, $\sphericalangle DGB=124°$ i $\sphericalangle DEC=34°$, odredi $\sphericalangle CEB$.

5. Prirodni broj $\overline{a_1a_2\ldots a_m}$ (uz $a_1 \neq 0$) je *koncizan* ako je broj $\overline{a_ia_{i+1}\ldots a_{i+k-1}}$ djeljiv s k za sve prirodne brojeve i, k takve da je $1 \leqslant k \leqslant m$ i $1 \leqslant i \leqslant m-k+1$.

Na primjer, broj 102 je koncizan jer su brojevi 1, 0 i 2 djeljivi s 1, brojevi 10 i 2 $(=\overline{02})$ djeljivi s 2 te broj 102 djeljiv s 3.

Dokaži da postoji najveći koncizni prirodni broj i odredi ga.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

1. Odredi sve realne brojeve x, y za koje vrijede jednakosti

$$x^{\log y} + \sqrt{y^{\log x}} = 110 \qquad \text{i} \qquad xy = 1\,000.$$

2. Dokaži da za sve realne brojeve $\alpha, \beta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ vrijedi

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Kada vrijedi jednakost?

3. U trokutu ABC točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a točka D sjecište stranice $\overline{AC}$ i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Ako je $\sphericalangle MDB = 90°$, dokaži da vrijedi $|AB| = 3|BC|$.

4. Postoji li pet međusobno različitih prirodnih brojeva takvih da je zbroj bilo kojih triju od njih djeljiv zbrojem preostalih dvaju?

5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje se svi elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ mogu raspodijeliti na k međusobno disjunktnih skupova koji imaju jednak broj elemenata, tako da svaki od tih skupova sadrži aritmetičku sredinu svojih elemenata ako je

a) $k = 2$,

b) $k = 3$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

1. Odredi sve polinome P trećeg stupnja koji imaju sljedeća tri svojstva:

(i) $P(x)$ pri dijeljenju s $x^2 - 1$ daje ostatak $2x + 1$,

(ii) zbroj nultočaka polinoma P iznosi -2,

(iii) graf polinoma P prolazi točkom $(0, 3)$.

2. Početni član niza (a_n) je $a_0 = 2022$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, broj a_n jednak je zbroju broja a_{n-1} i najvećeg djelitelja tog broja manjeg od njega samog. Odredi a_{2022}.

3. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $2^n + 5 \cdot 3^m$ kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Dan je pravilni 2022-kut $A_1A_2 \ldots A_{2022}$. Koliko najviše vrhova pravilnog 2022-kuta možemo odabrati tako da nikoje četiri odabrane točke ne čine vrhove pravokutnika?

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC s težištem T. Neka je $\overline{CN}$ njegova visina, $\overline{CP}$ težišnica i K polovište te težišnice. Simetrala dužine $\overline{PC}$ siječe pravac AB u točki L. Kružnica opisana trokutu LNT siječe pravac PC u točkama T i M. Dokaži da pravac AK raspolavlja dužinu $\overline{BM}$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.