ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Tri traktora oru njivu. Ako prva dva traktora rade zajedno, treba im 15 dana da preoru cijelu njivu. Prvi i treći traktor preoru njivu radeći zajedno 8 dana, a sva tri traktora zajedno preoru njivu za 6 dana. Koliko dana svakom od traktora treba da samostalno preore cijelu njivu?

Rješenje.

Neka su a, b i c redom brojevi dana potrebnih svakom od traktora da preore cijelu njivu sam. Oni u jednom danu preoru redom a-ti dio njive, b-ti dio njive, odnosno c-ti dio njive.

Zato imamo sustav:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=\frac{1}{15}, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}&=\frac{1}{8}, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4 boda

Oduzmemo li od zadnje jednakosti prvu, dobijemo

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10},$$

odnosno $c=10$. 2 boda

Oduzmemo li od zadnje drugu, dobijemo

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24},$$

odnosno $b=24$. 2 boda

Konačno, uvrštavajući dobiveno u bilo koju od početnih jednakost, dobivamo da je $a=40$. 2 boda

Dakle, da bi preorali njivu, prvom traktoru samom treba 40 dana, drugom 24, a trećem 10 dana.

Zadatak A-1.2.

Odredi sve cijele brojeve x, y, z za koje vrijede jednakosti

$$x - yz = 1 \qquad \text{i} \qquad xz + y = 2.$$

Prvo rješenje.

Ako je $y = 0$, iz prve jednadžbe imamo $x = 1$, a iz druge $xz = 2$. Uvrštavanjem $x = 1$ dobijemo $z = 2$, odnosno jedno rješenje je $(x, y, z) = (1, 0, 2)$. 1 bod

Ako je $y \neq 0$, iz prve jednadžbe imamo $z = \dfrac{x-1}{y}$. 1 bod

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} x\frac{x-1}{y} + y &= 2, \\ x(x-1) + y^2 &= 2y, \\ x(x-1) + y^2 - 2y + 1 - 1 &= 0, \\ x(x-1) + (y-1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

2 boda

Ako je x jednak 0 ili 1, $x(x-1) = 0$. Ako je x negativan ili veći od 1, $x(x-1)$ je pozitivan. Prema tome, umnožak $x(x-1)$ uvijek je nenegativan. 1 bod

Također, vrijedi $(y-1)^2 \geqslant 0$, pa se jednakost $x(x-1) + (y-1)^2 = 1$ postiže samo ako je jedan od pribrojnika jednak 0, a drugi jednak 1. 1 bod

Također, x i $x - 1$ su različite parnosti, pa je $x(x-1)$ paran broj. 1 bod

Prema tome, mora vrijediti $x(x-1) = 0$, $(y-1)^2 = 1$, odnosno x je 0 ili 1, a y je 0 ili 2. 1 bod

Za $y = 0$, jedino rješenje je dobiveno gore.

Ako je $y = 2$, uvrštavanjem mogućnosti za x imamo:

- $x = 1$, te $z = \dfrac{1-1}{2} = 0$. 1 bod
- $x = 0$, te $z = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, što nije moguće jer z mora biti cijeli broj. 1 bod

Prema tome, rješenja su $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ i $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Napomena: Umjesto iz jednakosti

$$x(x-1) + (y-1)^2 = 1,$$

slične zaključke možemo izvesti iz jednakosti

$$x(x-1) + y(y-2) = 0.$$

Rješenja koja koriste ovu jednakost također dobivaju ista 2 boda (treći i četvrti bod) iz gornje bodovne sheme.

Drugo rješenje.

Za proizvoljne brojeve x, y, z vrijedi jednakost

$$(x - yz)^2 + (xz + 1)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + 1).$$ 3 boda

Kvadriranjem i zbrajanjem jednadžbi imamo

$$(x - yz)^2 + (xz + y)^2 = 1^2 + 2^2 = 5,$$ 1 bod

odakle zaključujemo da je

$$(x^2 + y^2)(z^2 + 1) = 5.$$ 1 bod

Kako su faktori na lijevoj strani jednakosti nenegativni, a s desne strane jednakosti je prost broj, imamo dvije mogućnosti: $z^2 + 1 = 5$, $x^2 + y^2 = 1$ ili $z^2 + 1 = 1$, $x^2 + y^2 = 5$. 1 bod

U prvom slučaju, kako bismo postigli jednakost $x^2 + y^2 = 1$, jedino je moguće da je jedan od brojeva x i y jednak 0, a drugi ± 1. 1 bod

Ako je $x = 0$, uvrštavanjem u prvu jednadžbu iz teksta zadatka imamo $-2y = 1$ ili $2y = 1$, što nije moguće za cijeli broj y. 1 bod

Ako je $y = 0$, uvrštavanjem u prvu jednadžbu iz teksta zadatka imamo $x = 1$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu imamo $1 \cdot z + 0 = 2$, odnosno $z = 2$, čime dobivamo jedno rješenje početnog sustava. 1 bod

U drugom slučaju je $z^2 + 1 = 1$, odakle je $z = 0$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu iz teksta zadatka imamo $x = 1$, a iz druge je $y = 2$. 1 bod

Prema tome, rješenja su $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ i $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Treće rješenje.

Iz prve jednadžbe imamo $x = yz + 1$. 1 bod

Uvrštavanjem u drugu imamo:

$$\begin{aligned}
(yz + 1)z + y &= 2, \\
yz^2 + z + y &= 2, \\
y(z^2 + 1) &= 2 - z, \\
y &= \frac{2 - z}{z^2 + 1}.
\end{aligned}$$ 1 bod

Za $z \geqslant 3$ vrijedi $z^2 + 1 \geqslant 3z + 1 > z - 2 > 0$, odnosno $\frac{2 - z}{z^2 + 1}$ ne može biti cijeli broj jer se nalazi između -1 i 0. 2 boda

Slično, za $z \leqslant -2$ vrijedi da je $z^2 + 1 \geqslant -2z + 1 > 2 - z > 0$, pa $\frac{2 - z}{z^2 + 1}$ ponovno ne može biti cijeli broj. 2 boda

Preostaje provjeriti $z \in \{-1, 0, 1, 2\}$:

- $z = -1$: $y = \frac{2 - (-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{3}{2}$, što nije cijeli broj. 1 bod

- $z = 0$: $y = \dfrac{2-0}{0^2+1} = 2$, $x = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. 1 bod
- $z = 1$: $y = \dfrac{2-1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$, što nije cijeli broj. 1 bod
- $z = 2$: $y = \dfrac{2-2}{2^2+1} = 0$, $x = 0 \cdot 2 + 1 = 1$. 1 bod

Prema tome, rješenja su $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ i $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

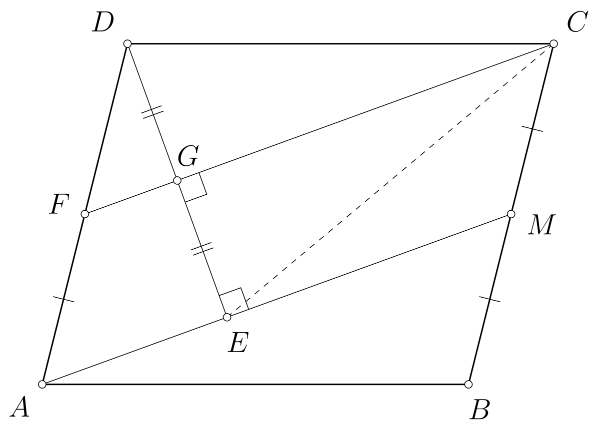
Napomena: Pogođena rješenja $(1, 2, 0)$ i $(1, 0, 2)$ vrijede svako po 1 bod.

Zadatak A-1.3.

Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ paralelograma $ABCD$. Ako je E nožište okomice iz točke D na pravac AM, dokaži da vrijedi $|CD| = |CE|$.

Prvo rješenje.

Promotrimo pravac koji prolazi točkom C i okomit je na pravac DE, te s F i G redom označimo njegova sjecišta s pravcima AD i DE.



Taj pravac FC okomit je na DE kao i pravac AM. Zato su pravci FC i AM međusobno paralelni. 2 boda

Četverokutu $AMCF$ parovi nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima, pa je zato paralelogram. Zaključujemo da je $|AF| = |MC|$. 2 boda

Dodatno, kako je M polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi $|AF| = \dfrac{1}{2}|BC| = \dfrac{1}{2}|AD|$. 1 bod

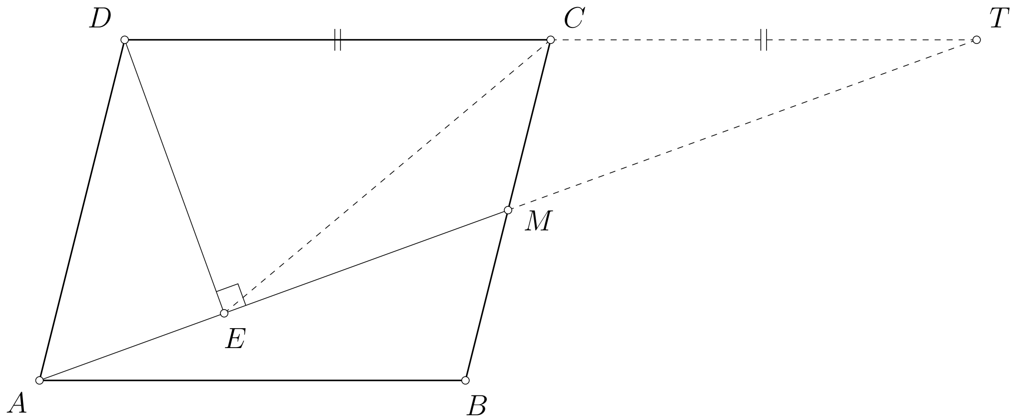
U trokutu ADE dužina $\overline{FG}$ prolazi polovištem jedne stranice i paralelna je s drugom stranicom. Zaključujemo da je to srednjica, pa je G polovište dužine $\overline{ED}$. 3 boda

Promotrimo trokute CGE i CGD. To su pravokutni trokuti s pravim kutom pri vrhu G, imaju jedan par stranica jednake duljine ($|GE| = |GD|$), te dijele stranicu $\overline{CG}$. Zato su sukladni prema S–K–S poučku o sukladnosti. 1 bod

Iz te sukladnosti zaključujemo da je $|CE| = |CD|$, što je i trebalo pokazati. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je T sjecište pravaca AM i CD. 1 bod



Prema Talesovom poučku, kako su pravci CM i DA paralelni, vrijedi

$$\frac{|TC|}{|TD|} = \frac{|CM|}{|DA|}.$$ 3 boda

Dodatno, kako je M polovište stranice $\overline{BC}$, zaključujemo da je $|TD| = 2|TC|$, odnosno C je polovište dužine $\overline{DT}$. 1 bod

U pravokutnom trokutu DET, C je polovište hipotenuze, a time i središte tom trokutu opisane kružnice. 4 boda

Zato je točka C jednako udaljena od svih vrhova trokuta DET, a posebno je i $|CD| = |CE|$, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Zadatak A-1.4.

Realni brojevi a, b i c različiti su od nule i zadovoljavaju jednakosti

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2, \\ b^2 + b &= c^2, \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

Dokaži da vrijedi $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Rješenje.

Zbrojimo li sve jednadžbe, dobivamo

$$a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c = a^2 + b^2 + c^2,$$

odakle je

$$a + b + c = 0.$$ 2 boda

Zapišimo prvu jednadžbu na drugačiji način: $a^2 - b^2 = -a$.

Koristeći razliku kvadrata na lijevoj strani, dobivamo $(a-b)(a+b) = -a$. 2 boda

Nadalje, koristeći $a+b+c=0$, dodatno možemo pisati $(a-b)(-c)=-a$. 2 boda

Analogno iz drugih dviju jednadžbi dobivamo

$$(b-c)(-a)=-b \qquad \text{i} \qquad (c-a)(-b)=-c.$$ 1 bod

Množeći tri zadnje jednakosti dobivamo

$$(a-b)(b-c)(c-a)(-abc)=-abc.$$ 2 boda

Kako nijedan od brojeva a, b, c nije jednak nuli, dijeljenjem s $-abc$ dobivamo

$$(a-b)(b-c)(c-a)=1,$$ 1 bod

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-1.5.

U nekom je razredu trideset i troje učenika. Svaki učenik je na ploču napisao dva broja: koliko još učenika osim njega u razredu ima isto ime kao on, te koliko još učenika osim njega u razredu ima isto prezime kao on.

Ako se svaki od brojeva 0, 1, 2, ..., 10 pojavljuje na ploči barem jednom, dokaži da u razredu postoji barem jedan par učenika istog imena i prezimena.

Rješenje.

Promotrimo jednog učenika i pretpostavimo da je on na ploču napisao broj m. To znači da još m učenika s njime dijeli isto ime (ili prezime), pa je zato i tih m učenika napisalo broj m na ploču. 1 bod

Ovime smo zaključili da ako se neki broj m nalazi na ploči barem jednom, onda se pojavljuje barem $m+1$ puta. 2 boda

Zajedno s uvjetima zadatka, sada zaključujemo da se među 66 brojeva na ploči nalazi barem jedno pojavljivanje broja 0, barem dva pojavljivanja broja 1, ..., te barem 11 pojavljivanja broja 10. No, to znači da se brojevi iz skupa $\{0,1,\ldots,10\}$ ukupno pojavljuju barem 66 puta. Posebno, nijedan drugi broj se ne pojavljuje na ploči osim ovdje nabrojanih. 2 boda

Također, svaki broj $k \in \{0,1,\ldots,10\}$ pojavljuje se točno $k+1$ puta, što znači da svih $k+1$ učenika koji su napisali taj broj na ploču dijeli isto ime ili da svi oni dijele isto prezime. 1 bod

Promotrimo sada onih jedanaestero učenika koji su na ploču napisali broj 10. Dokazat ćemo da se među njima nalazi dvojica s istim imenom i prezimenom. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti tih jedanaestero učenika dijeli isto ime. Pretpostavimo da svi imaju različito prezime.

Posebno, oni su svi napisali drugačiji broj na ploču (kada su pisali koliko postoji njihovih prijatelja koje dijeli prezime s tim djetetom). 1 bod

Tih jedanaestero učenika u tom su koraku mogli napisati jedan od deset brojeva iz skupa $\{0,1,\ldots,9\}$. 1 bod

Prema Dirichletovom principu, postoje dvojica među njima koja su napisala isti broj na ploču, pa zato imaju i isto prezime. 1 bod

Time je dokaz gotov: zaista postoji jedan par učenika istog imena i prezimena.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\sqrt{|x-1|+|x+4|}=|x|.$$

Rješenje.

Kvadriranjem početne jednakosti dobivamo da vrijedi i

$$|x-1|+|x+4|=x^2.$$

Primjećujemo da lijeva strana jednadžbe poprima drugačije vrijednosti kada je $x \leqslant -4$, kada je $-4 < x \leqslant 1$, te kada je $x > 1$, te ovisno o tome promatramo svaki slučaj posebno.

U slučaju $x \leqslant -4$ za izraz na lijevoj strani jednakosti vrijedi

$$|x-1|+|x-4|=(1-x)+(-4-x)=-3-2x.$$ 1 bod

Time dobivamo jednadžbu

$$-3-2x=x^2,$$

odnosno

$$x^2+2x+3=0.$$ 1 bod

Diskriminanta dobivene kvadratne jednadžbe je $D=-8<0$, pa zato u ovom slučaju ne dobivamo realno rješenje. 1 bod

U slučaju $-4 < x \leqslant 1$ za izraz na lijevoj strani jednakosti vrijedi

$$|x-1|+|x-4|=(1-x)+(x+4)=5.$$ 1 bod

Time dobivamo jednadžbu

$$5=x^2,$$

iz čega slijedi $x=\pm\sqrt{5}$. Budući da mora vrijediti $-4 < x \leqslant 1$, jedino moguće rješenje je $x=-\sqrt{5}$. 1 bod

Uvrštavanjem $x=-\sqrt{5}$ u početnu jednakost vidimo da to zaista jest rješenje. 1 bod

U slučaju $x > 1$ za izraz na lijevoj strani jednakosti vrijedi

$$|x-1| + |x-4| = (x-1) + (x-4) = x^2,$$ 1 bod

pa dobivamo

$$2x + 3 = x^2,$$

odnosno

$$0 = x^2 - 2x - 3.$$ 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x = 3$ ili $x = -1$. Iz uvjeta $x > 1$ zaključujemo da je jedino moguće rješenje $x = 3$. 1 bod

Direktnom provjerom za $x = 3$ u početnu jednakost vidimo da to zaista jest rješenje. 1 bod

Konačno, svi realni brojevi x koji zadovoljavaju zadanu jednadžbu su $x = -\sqrt{5}$ i $x = 3$.

Napomena: Jednakost iz teksta zadatka i prva jednadžba iz rješenja dobivena njezinim kvadriranjem zapravo su ekvivalentne jednadžbe. Naime, u početnoj jednakosti su obje strane nenegativne, pa je zaista svako rješenje jednadžbe

$$|x-1| + |x+4| = x^2$$

ujedno i rješenje jednadžbe

$$\sqrt{|x-1| + |x+4|} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Obratna tvrdnja očito vrijedi. U rješenjima koja iskažu ovu tvrdnju nije potrebno naknadno provjeravati da su brojevi $x = -\sqrt{5}$ i $x = 3$ zaista rješenja početne jednadžbe, te im se šesti i deseti bod iz gornje bodovne sheme odmah pridaju pri nalasku odgovarajućih vrijednosti za broj x.

Zadatak A-2.2.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$ su realna. Ako svako od tih rješenja umanjimo za 1, dobit ćemo rješenja kvadratne jednadžbe $bx^2 + x + a = 0$.

Odredi sve takve realne brojeve a, b.

Prvo rješenje.

Označimo s x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $bx^2 + x + a = 0$.
Iz Vièteovih formula slijedi da je

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{b} \qquad \text{i} \qquad x_1 x_2 = \frac{a}{b}.$$ 1 bod

Iz uvjeta zadatka znamo da su $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$, pa opet iz Vièteovih formula slijedi da je

$$-\frac{b}{a} = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 2 = -\frac{1}{b} + 2$$ 1 bod

i

$$\frac{1}{a} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$ 2 boda

Iz gornjih jednakosti sređivanjem dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2ab + b^2 - a &= 0, \\ a^2 - a + ab - b &= 0. \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Drugu jednadžbu možemo faktorizirati kao $(a+b)(a-1) = 0$, iz čega slijedi $a = -b$ ili $a = 1$. 1 bod

Ako je $a = -b$, uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo $-a^2 - a = -a(a+1) = 0$, iz čega slijedi $a = 0$ ili $a = -1$. Slučaj $a = 0$ odbacujemo jer bi tada jedna od kvadratnih jednadžbi u tekstu zadatka imala vodeći koeficijent jednak nuli, pa preostaje samo $(a, b) = (-1, 1)$. 1 bod

Ako je $a = 1$, uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo da je b rješenje kvadratne jednadžbe $b^2 + 2b - 1 = 0$. Slijedi $b = -1 \pm \sqrt{2}$, odnosno mogući parovi su $(a, b) = (1, -1 - \sqrt{2})$ i $(a, b) = (1, -1 + \sqrt{2})$ 1 bod

Preostaje nam provjeriti uvjet da kvadratne jednadžbe imaju realna rješenja. Da bi to bilo zadovoljeno, njihove diskriminante moraju biti nenegative, tj. mora vrijediti $b^2 - 4a \geqslant 0$ i $1 - 4ab \geqslant 0$. 1 bod

Vidimo da to zadovoljavaju svi pronađeni parovi (a, b) osim $(a, b) = (1, -1 + \sqrt{2})$. 1 bod

Konačno, parovi (a, b) koji zadovoljavaju uvjete zadatka su $(-1, 1)$ i $(1, -1 - \sqrt{2})$.

Drugo rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$. Iz uvjeta zadatka znamo da su tada $(x_1 - 1)$ i $(x_2 - 1)$ rješenja kvadratne jednadžbe $bx^2 + x + a = 0$, što znači da su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$b(x-1)^2 + (x-1) + a = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Budući da jednadžbe $ax^2 + bx + 1 = 0$ i $b(x-1)^2 + (x-1) + a = 0$ imaju ista rješenja, slijedi da postoji realan broj $t \neq 0$ takav da vrijedi

$$ax^2 + bx + 1 = t \cdot (b(x-1)^2 + (x-1) + a). \qquad \text{1 bod}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo

$$ax^2 + bx + 1 = tbx^2 + (-2tb + t)x + (tb - t + ta). \qquad \text{1 bod}$$

Izjednačavanjem koeficijenta uz odgovarajuće potencije od x dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} a &= tb, \\ b &= -2tb + t, \\ 1 &= tb - t + ta. \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $t = \dfrac{a}{b}$, iz čega uvrštavanjem u druge dvije jednadžbe i sređivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} 2ab + b^2 - a &= 0, \\ a^2 - a + ab - b &= 0. \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Dobiveni sustav je isti kao u prvom rješenju, pa nastavljamo kao u prvom rješenju. 5 bodova

Napomena: Sustav po a, b i t iz drugog rješenja možemo rješavati i tako da uvrstimo $a = tb$ u treću jednakost, pa rješavamo sustav od dvije jednadžbe po t i b. Svođenje rješavanja na taj sustav donosi 1 bod. Način rješavanja analogan je rješavanju sustava iz prvog rješenja (recimo, prvi korak je faktorizacija zadnje jednakosti kao $(t+1)(tb-1) = 0$), pa je i bodovna shema analogna.

Eksplicitno izražavanje rješenja dviju kvadratnih jednadžbi iz teksta zadatka preko formule za korijene kvadratne rješenje samo po sebi nosi 0 bodova.

Za predzadnji bod dovoljno je provjeriti da su korijeni samo jedne od jednadžbi realni, budući da su tada korijeni preostale jednadžbe dobiveni dodavanjem ili oduzimanjem broja 1 od nekog realnog broja.

Zadatak A-2.3.

Prirodni broj zovemo *ljepuškastim* ako zbrojen s nekim svojim djeliteljem daje rezultat 360. Odredi zbroj svih ljepuškastih brojeva.

Rješenje.

Dokažimo prvo sljedeću tvrdnju: prirodan broj n je ljepuškast ako i samo ako je oblika $360 - d$, gdje je d neki djelitelj broja 360 manji od 360. 3 boda

Prvo neka je n ljepuškast. Tada postoji njegov djelitelj d takav da je $n + d = 360$. Kako d dijeli n i sebe, dijeli lijevu stranu jednakosti, pa dijeli i desnu. Dakle, n se zaista može zapisati kao $360 - d$, gdje je d djelitelj od 360. Očito je $d < 360$, jer inače n ne bi bio prirodan broj. 1 bod

Pretpostavimo sada da se n može zapisati kao $360 - d$, gdje je d djelitelj broja 360 manji od tog broja. Tada iz jednadžbe $n = 360 - d$ slično kao ranije vidimo da d dijeli izraze na desnoj strani, pa mora dijeliti i izraz na desnoj strani. Dakle, d je djelitelj broja n, te vrijedi $n + d = 360$, što ga čini ljepuškastim brojem. 1 bod

Kako je svaki ljepuškast broj razlika broja 360 i djelitelja broja 360, zaključujemo da su

$$360 - d_1, 360 - d_2, \ldots, 360 - d_N$$

svi ljepuškasti brojevi, pri čemu su $d_1, d_2, \ldots, d_N$ svi djelitelji broja 360 manji od njega samog. 1 bod

Zato traženi zbroj možemo pisati kao

$$I := (360 - d_1) + \cdots + (360 - d_N) = 360 \cdot N - (d_1 + \cdots + d_N) = 360 \cdot N - S,$$

gdje su N i S broj i zbroj djelitelja broja 360 manjih od 360. 1 bod

Općenito, za prirodan broj n s jedinstvenim rastavom na proste faktore u obliku

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

vrijede formule za broj djelitelja $\tau(n)$ i sumu djelitelja $\sigma(n)$ (uključujući i n kao svojeg djelitelja) redom:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1),$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$ 1 bod

Primjenom tih formula, dobivamo

$$\tau(360) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24,$$
$$\sigma(360) = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = 1170,$$

pa je $N = 24 - 1 = 23$, te $S = 1170 - 360 = 810$. 1 bod

Zato je konačno

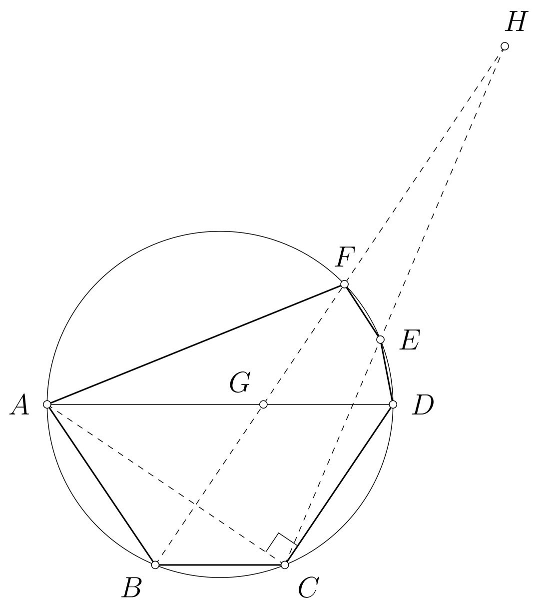
$$I = 360 \cdot N - S = 23 \cdot 360 - 810 = 7470.$$ 1 bod

Napomena: Broj N i zbroj S djelitelja broja 360 možemo odrediti i direktno ispisujući sve djelitelje. Ispisivanje svih 23 djelitelja broja 360 manjih od 360 nosi 2 boda, a njihovo zbrajanje 1 bod.

Zadatak A-2.4.

Svi vrhovi šesterokuta $ABCDEF$ leže na kružnici promjera $\overline{AD}$. Pravac BF siječe pravce AD i CE redom u točkama G i H. Ako je $\sphericalangle FEH = 56°$, $\sphericalangle DGB = 124°$ i $\sphericalangle DEC = 34°$, odredi $\sphericalangle CEB$.

Rješenje.



Iz tetivnosti četverokuta $BCEF$ slijedi

$$\sphericalangle FBC = 180° - \sphericalangle FEC = 180° - (180° - \sphericalangle FEH) = 56°.$$ 2 boda

Sada vidimo da je $\sphericalangle BGD + \sphericalangle CBG = 180°$, pa zaključujemo da je $GD \parallel BC$, odnosno $AD \parallel BC$. 2 boda

Trokut je ACD pravokutan prema Talesovom teoremu (kut pri vrhu C je pravi). 1 bod

Zato, uz jednakost kutova nad tetivom $\overline{CD}$, slijedi

$$\sphericalangle CDA = 90^\circ - \sphericalangle DAC = 90^\circ - \sphericalangle DEC = 56^\circ.$$ 2 boda

Promotrimo trokut BCD. Kut $\sphericalangle DBC$ jednak je kutu $\sphericalangle DEC$ (obodni kutovi nad istom tetivom) i iznosi 34°. Kut $\sphericalangle BCD$ suplementaran je kutu $\sphericalangle CDA$ (jer su pravci AD i BC paralelni), stoga iznosi 124°. Preostali kut tog trokuta iznosi

$$\sphericalangle CDB = 180^\circ - \sphericalangle DBC - \sphericalangle BCD = 180^\circ - 34^\circ - 124^\circ = 22^\circ.$$ 2 boda

Konačno, kutovi $\sphericalangle CDB$ i $\sphericalangle CEB$ su obodni kutovi nad istom tetivom, pa su jednaki. Zato mjera traženog kuta $\sphericalangle CEB$ iznosi 22°. 1 bod

Napomena: Bodovne sheme za rješenja slična prikazanom slijede sljedeću strukturu: 4 boda za dokaz paralelnosti pravaca AD i BC; 3 boda za pronalazak mjere kuta $\sphericalangle CDA$ (ili dokaz neke ekvivalentne tvrdnja, poput one da su pravci CD i BF paralelni), od kojih se 1 bod daje za korištenje Talesovog teorema nad promjerom $\overline{AD}$; 3 boda za dovršetak rješenja.

Zadatak A-2.5.

Prirodni broj $\overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$ (uz $a_1 \neq 0$) je *koncizan* ako je broj $\overline{a_i a_{i+1} \ldots a_{i+k-1}}$ djeljiv s k za sve prirodne brojeve i, k takve da je $1 \leqslant k \leqslant m$ i $1 \leqslant i \leqslant m - k + 1$.

Na primjer, broj 102 je koncizan jer su brojevi 1, 0 i 2 djeljivi s 1, brojevi 10 i 2 $(= \overline{02})$ djeljivi s 2 te broj 102 djeljiv s 3.

Dokaži da postoji najveći koncizni prirodni broj i odredi ga.

Rješenje.

Tvrdimo da je najveći koncizan broj 9660000. Direktnom provjerom vidimo da je koncizan: brojevi dobiveni nizom od 2,3, 4, 5, 6 i 7 uzastopnih znamenaka zaista jesu djeljiv brojem svojih znamenaka. 1 bod

Pretpostavimo da postoji veći, neka je to n i neka ima $d \geqslant 7$ znamenaka.

Kako je svaki niz od dvije znamenke nužno paran broj, svaka znamenka osim eventualno prve je nužno parna.

Kako je svaki niz od 5 znamenaka djeljiv s 5, to znači da je svaka od zadnjih $d - 4$ znamenaka djeljiva s 5. Zajedno s parnosti, sve te znamenke su jednake nuli. 2 boda

Kako je $d \geqslant 7$, to posebno znači da su zadnje tri znamenke jednake nuli.

Promotrimo djeljivost s 3. Zaključili smo da su zadnje tri znamenke jednake nuli. Promatrajući svake tri uzastopne znamenke redom, počevši sa zadnje tri, znajući da im zbroj treba biti djeljiv s 3, redom zaključujemo da sve znamenke broja n djeljive s tri. 2 boda

Zajedno s parnosti, zaključujemo da su sve znamenke osim prve jednake 0 ili 6. 1 bod

Promotrimo sada djeljivost s 4. Niz od prve četiri znamenke čini četveroznamenkast broj djeljiv s 4. Iz gornjih zaključaka znamo da su tom broju zadnje dvije znamenke 0 ili 6. Jedini dvoznamenkasti brojevi koje te znamenke tvore, a djeljivi su sa 6, su 60 i 00. Zato je četvrta znamenka broja n nužno jednaka nuli. 1 bod

Sveukupno, zaključujemo: svakom konciznom broju s $d \geqslant 7$ znamenaka sve znamenke osim prve tri su jednake nuli. Druga i treća znamenka mogu biti 0 ili 6, a prva može biti 3, 6 ili 9.

Promotrimo djeljivost sa 7. Broj stvoren od prvih 7 znamenaka će biti djeljiv sa 7 ako mu je broj stvoren od prve tri znamenke djeljiv s 7 (jer su sve ostale znamenke jednake nuli). 1 bod

Provjerom svih mogućnosti (300, 600, 900, 306, 606, 906, 360, 660, 960, 366, 666, 966), uočavamo da je samo 966 djeljiv brojem 7. 1 bod

Dakle, svi koncizni brojevi s $d \geqslant 7$ znamenaka su brojevi oblika $\overline{96600\ldots0}$. U slučaju $d = 7$ broj jest koncizan, u što smo se uvjerili na početku rješenja. U slučaju $d \geqslant 8$ i broj stvoren od 7 znamenaka broja n počevši s drugom znamenkom mora biti djeljiv sa 7, no to nije moguće jer 66 nije djeljiv sa 7. 1 bod

Dakle, 9660000 je uistinu najveći koncizan prirodan broj.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve realne brojeve x, y za koje vrijede jednakosti

$$x^{\log y} + \sqrt{y^{\log x}} = 110 \qquad \text{i} \qquad xy = 1\,000.$$

Rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$x^{\log y} = \left(10^{\log x}\right)^{\log y} = 10^{\log x \log y} = \left(10^{\log y}\right)^{\log x} = y^{\log x}.$$ 2 boda

Prvu jednadžbu možemo zapisati kao

$$y^{\log x} + \sqrt{y^{\log x}} - 110 = 0.$$

Koristeći supstituciju $t = \sqrt{y^{\log x}}$ imamo kvadratnu jednadžbu $t^2 + t - 110 = 0$. 1 bod

Rješenja te kvadratne jednadžbe su $t_1 = -11$, $t_2 = 10$. Kako mora vrijediti $t > 0$, jedino rješenje je $t = 10$. 1 bod

Iz $\sqrt{y^{\log x}} = 10$ slijedi $y^{\log x} = 100$. Logaritmiranjem imamo $\log x \log y = \log 100 = 2$. 2 boda

Logaritmiranjem druge jednadžbe imamo $\log x + \log y = \log 1000 = 3$. 1 bod

Slijedi $\log x = 3 - \log y$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu imamo $(3 - \log y)\log y = 2$, odnosno $-(\log y)^2 + 3\log y - 2 = 0$. 1 bod

Uz supstituciju $u = \log y$ imamo kvadratnu jednadžbu $-u^2 + 3u - 2 = 0$. Rješenja te kvadratne jednadžbe su $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. 1 bod

Uvrštavanjem imamo:

- $\log y = 1$: $y = 10$, $\log x = 3 - \log y = 2$, $x = 100$
- $\log y = 2$: $y = 100$, $\log x = 3 - \log y = 1$, $x = 10$.

Prema tome, rješenja su $(x, y) = (10, 100)$ i $(x, y) = (100, 10)$. 1 bod

Napomena: Pronalazak oba rješenja vrijedi 1 bod.

Zadatak A-3.2.

Dokaži da za sve realne brojeve $\alpha, \beta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ vrijedi

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje.

Zbog uvjeta $\alpha, \beta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ slijedi da su sve vrijednosti $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ pozitivni realni brojevi.

Izraz na desnoj strani nejednakosti može se zapisati na sljedeći način:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$ 2 boda

U brojniku razlomka možemo primijeniti adicijsku formulu:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \sqrt{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$ 1 bod

Kako je sinus svakog broja manji ili jednak od 1, imamo

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \sqrt{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$ 2 boda

Zato je dovoljno pokazati da vrijedi

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

Kvadriranjem ćemo dobiti ekvivalentnu nejednakost jer su obje strane nejednakosti pozitivne.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{2}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{1}{\cos^2\beta} \geqslant \frac{4}{\cos\alpha\cos\beta}.$$ 1 bod

Prebacivanjem izraza na jednu stranu nejednakosti i uočavanjem kvadrata binoma, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\beta}\right)^2 \geqslant 0,$$ 2 boda

koja očito vrijedi, čime je nejednakost dokazana. 1 bod

Jednakost će vrijediti kada vrijede obje jednakosti u gornjim nejednakostima: $\sin(\alpha+\beta) = 1$ i $\cos\alpha = \cos\beta$. Iz druge jednakosti slijedi $\alpha = \beta$, a zajedno s prvom zaključujemo da se jednakost postiže ako i samo ako je $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. 1 bod

Napomena: Nejednakost

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

iz gornjeg rješenja može se dokazati i direktnom primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za (pozitivne) brojeve $\frac{1}{\cos\alpha}$ i $\frac{1}{\cos\beta}$.

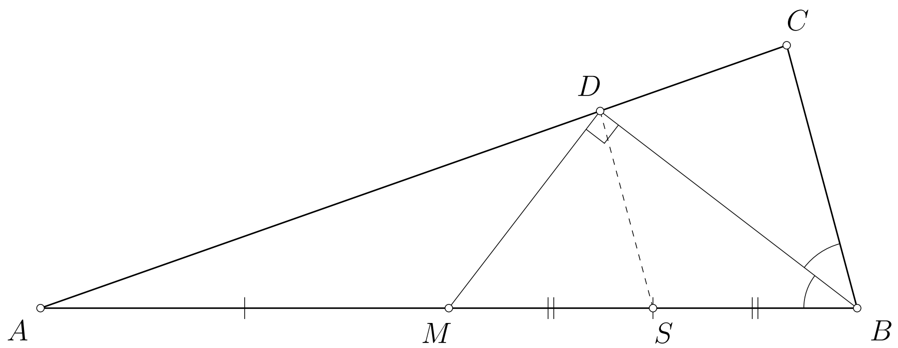
Komentirati da su sve vrijednosti $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ pozitivni realni brojevi ne nosi samo po sebi bodove, no treba se komentirati zbog nekih koraka u rješenju (recimo kod kvadriranja nejednakosti, u zadnjem izrazu u rješenju gdje se navodi da je izraz veći ili jednak od 4, ili kod primjene nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine). Rješenjima u kojima se koristi činjenica da su ti brojevi pozitivni bez spomena te tvrdnje treba biti oduzet 1 bod.

Zadatak A-3.3.

U trokutu ABC točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a točka D sjecište stranice $\overline{AC}$ i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Ako je $\sphericalangle MDB = 90°$, dokaži da vrijedi $|AB| = 3|BC|$.

Prvo rješenje.

Neka je S polovište dužine $\overline{MB}$. 1 bod



U pravokutnom trokutu MDB točka S je središte opisane kružnice budući da je polovište hipotenuze. Posebno, iz poučka o obodnom i središnjem kutu vrijedi

$$\sphericalangle MSD = 2\cdot\sphericalangle MBD = \sphericalangle CBA.$$ 1 bod

Posebno, pravci SD i CB su paralelni. 3 boda

Prema Talesovom poučku, vrijedi

$$\frac{|AD|}{|DC|}=\frac{|AS|}{|SB|}.$$ 2 boda

Dodatno, prema poučku o simetrali kuta, vrijedi

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|DC|}.$$ 1 bod

Kako je S polovište dužine $\overline{MB}$, a M polovište dužine $\overline{AB}$, točka S dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $3 : 1$. 1 bod

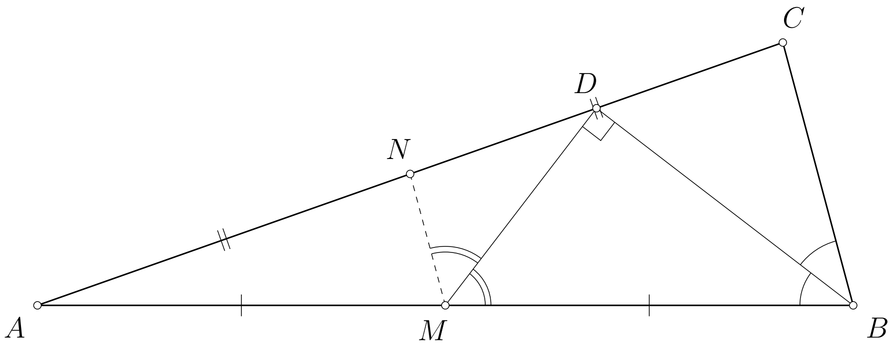
Zato zaključujemo

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AS|}{|SB|} = 3,$$ 1 bod

odnosno $|AB| = 3|BC|$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Označimo s β kut $\sphericalangle CBA$. Neka je N polovište dužine $\overline{AC}$. Dužina $\overline{MN}$ je srednjica trokuta ABC, odnosno paralelna je s $\overline{BC}$.



Slijedi da je $\sphericalangle BMN = 180° - \beta$. 1 bod

Kako je trokut BDM pravokutan, $\sphericalangle BMD = 90° - \sphericalangle DBM = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. 1 bod

Sada vidimo da je $\sphericalangle BMD$ jednak polovici vrijednosti kuta $\sphericalangle BMN$, pa je pravac DM je simetrala kuta $\sphericalangle BMN$. 1 bod

Prema poučku o vanjskoj simetrali kuta $\sphericalangle AMN$ vrijedi

$$\frac{|DN|}{|DA|} = \frac{|MN|}{|MA|}.$$ 1 bod

Budući da je $\overline{BC}$ srednjica trokuta ABC, vrijedi

$$\frac{|MN|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|BA|}.$$ 1 bod

Prema poučku o unutarnjoj simetrali kuta $\sphericalangle ABC$ vrijedi

$$\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|CD|}{|DA|}.$$ 1 bod

Sada računamo

$$\frac{|DN|}{|DA|} = \frac{|MN|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|CD|}{|DA|},$$

odnosno $|DN| = |CD|$. 2 boda

Kako je D polovište dužine $\overline{NC}$, a N polovište dužine $\overline{AC}$, točka D dijeli dužinu $\overline{AC}$ u omjeru $3 : 1$. 1 bod

Ponovno koristeći poučak o simetrali kuta $\sphericalangle ABC$ zaključujemo

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|} = 3,$$

čime smo pokazali željenu tvrdnju. 1 bod

Treće rješenje.

Označimo s α, β i γ redom mjere kutova $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$.

Primijetimo da je sada $\sphericalangle AMD = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. 1 bod

Primjenom sinusovog poučka na trokut AMD dobivamo

$$\frac{|AD|}{|MD|} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$ 1 bod

Slijedi da je

$$|AD| = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}|MD| = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}|MB|.$$ 1 bod

Ponovnom primjenom sinusovog poučka na trokut ADM dobivamo

$$\frac{|AD|}{|AM|} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(180^\circ - \alpha - \left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\right)} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}.$$ 1 bod

Kako je $|AM| = |MB|$, imamo

$$\frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)},$$ 2 boda

odnosno

$$\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\alpha.$$

Iz adicijskih formula dobivamo

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \\ \sin\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \end{cases}$$ 2 boda

odakle slijedi

$$\sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha}{2},$$

odnosno

$$\sin(\alpha+\beta) = 3\sin\alpha.$$ 1 bod

Konačno, primjenom sinusovog poučka na trokut ABC dobivamo

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = 3,$$ 1 bod

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-3.4.

Postoji li pet međusobno različitih prirodnih brojeva takvih da je zbroj bilo kojih triju od njih djeljiv zbrojem preostalih dvaju?

Prvo rješenje.

Takvi brojevi ne postoje. 1 bod

Pretpostavimo da takvi brojevi postoje i označimo ih s a, b, c, d i e, bez smanjenja općenitosti pretpostavljajući njihov uređaj: $a < b < c < d < e$.

Posebno, iz uvjeta zadatka, vrijedi da je

$$A := \frac{a+b+c}{d+e}$$ 1 bod

prirodan broj. Kako su svi pribrojnici u brojniku manji od d, te kako je $e > d$, slijedi

$$0 < A = \frac{a+b+c}{d+e} < \frac{d+d+d}{d+d} = \frac{3}{2}.$$ 2 boda

Jedini prirodan broj koji se nalazi između 0 i $\frac{3}{2}$ je broj 1. Zaključujemo da je $A = 1$, odnosno

$$a+b+c = d+e.$$ 1 bod

Također iz uvjeta zadatka, vrijedi i da je

$$B := \frac{a+d+e}{b+c}$$

prirodan broj. Koristeći dobiveno, imamo

$$B = \frac{a+d+e}{b+c} = \frac{a+a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{2a}{b+c},$$ 3 boda

odakle slijedi da $b+c \mid 2a$. No, broj $2a$ je veći od nule, a manji od $b+c$, pa to nije moguće. 2 boda

Došli smo do kontradikcije, zaista takvih pet prirodnih brojeva ne postoji.

Drugo rješenje.

Dokazujemo da takvi brojevi $a < b < c < d < e$ ne postoje. U slučaju da postoje, kao u prvom rješenju dokažemo da vrijedi $a+b+c = d+e$. 5 bodova

Promotrimo sada prirodan broj

$$C := \frac{a+b+d}{c+e}.$$

Prema uvjetima zadatka, vrijedi

$$0 < C = \frac{a+b+d}{c+e} < \frac{c+c+e}{c+e} = \frac{c}{c+e} + 1 < \frac{3}{2}.$$ 2 boda

Slično kao za broj A, zaključujemo da je i $C = 1$, odakle je

$$a+b+d = c+e.$$ 1 bod

Oduzimajući dvije dobivene jednadžbe, imamo 1 bod

$$\begin{aligned}(a+b+c)-(a+b+d) &= (d+e)-(c+e)\\ c-d &= d-c\\ c &= d,\end{aligned}$$

što je u kontradikciji s tvrdnjom da su svi brojevi različiti. 1 bod

Dakle, zaista takvih pet brojeva ne postoji.

Zadatak A-3.5.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje se svi elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ mogu raspodijeliti na k međusobno disjunktnih skupova koji imaju jednak broj elemenata, tako da svaki od tih skupova sadrži aritmetičku sredinu svojih elemenata ako je

a) $k = 2$

b) $k = 3$.

Rješenje.

Promotrimo prvo podjelu skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na $k = 2$ skupa. Kako ti skupovi moraju biti jednakobrojni, nužno je da je n paran.

Za $n = 2$ takva podjela je moguća ($\{1\}$ i $\{2\}$ očito zadovoljavaju uvjete zadatka). Za $n = 4$ nužno je da se brojevi jednake parnosti nalaze u istom skupu kako bi aritmetička sredina bila prirodan broj, no jedina takva podjela (na skupove $\{1, 3\}$ i $\{2, 4\}$) ne zadovoljava uvjete zadatka. 1 bod

Ako je n oblika $n = 2(2m + 1)$, u prvi skup možemo staviti prvih $2m + 1$ prirodnih brojeva, a u drugi skup preostalih $2m + 1$ prirodnih brojeva. Aritmetičke sredine elemenata tih skupova su

$$\frac{1}{(2m+1)}\left(1+2+\cdots+(2m+1)\right) = \frac{(2m+1)(2m+2)}{2(2m+1)} = m+1,$$

te

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2m+1)}\left((2m+2)+(2m+3)+\cdots+(4m+2)\right)\\ &\quad= (2m+1) + \frac{1}{(2m+1)}\left(1+2+\cdots+(2m+1)\right)\\ &\quad= 3m+2,\end{aligned}$$

te se one zaista nalaze u odgovarajućim skupovima. 1 bod

Preostalo je provjeriti brojeve oblika $n = 4m$, za neki prirodan broj $m \geqslant 2$. Definirajmo jedan skup kao

$$\{2, 3, \ldots, 2m-1, 2m, 3m+1\},$$

a u drugi skup smjestimo preostale brojeve. 1 bod

Aritmetička sredina elemenata gore definiranog skupa je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m}\left(2+3+\cdots+2m-1+2m+3m+1\right)\\
&\qquad=\frac{1}{2m}\left(\frac{(2m)(2m+1)}{2}-1+(3m+1)\right)\\
&\qquad=\frac{2m^2+m+3m}{2m}\\
&\qquad=m+2.
\end{aligned}$$

To je očito prirodan broj. On se nalazi u skupu jer vrijedi $2 \leqslant m+2 \leqslant 2m$ za sve $m \geqslant 2$. 1 bod

Analogno se izračuna da je aritmetička sredina drugog skupa jednaka $3m-1$, te se taj broj zaista nalazi u drugom skupu (jer je $3m-1 \geqslant 2m+1$). 1 bod

Pogledajmo sada podjelu skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na $k=3$ skupa. Kako su ti skupovi jednakobrojni, nužno je n djeljiv s 3, odnosno $n=3m$.

Pretpostavimo da za neki $n=3m$ postoji gore opisana podjela, te neka su a_1, a_2 i a_3 aritmetičke sredine tih triju skupova. Tada brojevi $m \cdot a_1$, $m \cdot a_2$ i $m \cdot a_3$ predstavljaju sume elemenata tih skupova, pa je

$$m \cdot (a_1+a_2+a_3)$$

suma svih elemenata tih triju skupova. 1 bod

S druge strane, znamo da je suma elemenata svih triju skupova jednaka

$$1+2+\cdots+3m=\frac{(3m)(3m+1)}{2}.$$

Zato zaključujemo da je broj

$$a_1+a_2+a_3=\frac{(3m)(3m+1)}{2m}=\frac{m(3m+1)}{2}$$

prirodan broj kao suma tri prirodne aritmetičke sredine. Taj broj bit će prirodan ako i samo ako je m neparan. 1 bod

Dakle, jedini slučaj kada skup prvih n prirodnih brojeva možemo podijeliti na 3 skupa opisanim na način u tekstu zadatka je ako je n oblika $3(2l-1)$, za prirodan broj l. U tom slučaju podjela jest moguća: u prvi skup smjestimo prvih $(2l-1)$ prirodnih brojeva, u drugi sljedećih $(2l-1)$ brojeva, te u treći skup preostale brojeve. 1 bod

Aritmetičke sredine elemenata tih skupova iznose

$$a_1=\frac{(2l-1)(2l)}{2(2l-1)}=l, \quad a_2=(2l-1)+l=3l-1, \quad a_3=2(2l-1)+l=5l-2.$$

To su sve prirodni brojevi koji se nalaze u odgovarajućim skupovima. 1 bod

Konačno zaključujemo: podjela na dva jednakobrojna skupa sa svojstvima iz teksta zadatka moguća je za sve parne prirodne brojeve n različite od 4, dok je podjela na tri jednakobrojna skupa moguća za sve prirodne brojeve oblika $n=3(2l-1)$, gdje je l prirodan broj. 1 bod

Napomena: Konstrukcije skupova iz rješenja općenito nisu jedinstvene. Svaka druga konstrukcija, ako je valjana, treba biti bodovana na analogan način kao u službenom rješenju.

Ipak, treba paziti da te raspodjele jesu valjane: da su aritmetičke sredine svih k skupova prirodne, i da se svaka od njih zaista nalazi u odgovarajućem skupu. Jedan primjer raspodjele prvih $n = 4m$ brojeva na $k = 2$ skupa koja nije valjana je da se u jedan skup smjeste brojevi

$$1, 2, 3, \ldots, 2m - 2, 2m - 1, 3m,$$

a u drugi preostali brojevi. Nije valjana jer iako su aritmetičke sredine oba skupa prirodni brojevi, aritmetička sredina drugog skupa iznosi $3m$ i ne nalazi se u tom skupu.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve polinome P trećeg stupnja koji imaju sljedeća tri svojstva:

(i) $P(x)$ pri dijeljenju s $x^2 - 1$ daje ostatak $2x + 1$,

(ii) zbroj nultočaka polinoma P iznosi -2,

(iii) graf polinoma P prolazi točkom $(0, 3)$.

Prvo rješenje.

Iz svojstva (i) slijedi da $P(x)$ možemo zapisati kao

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (2x + 1).$$ 2 boda

Budući da je $P(x)$ polinom trećeg stupnja, $Q(x)$ očito mora biti polinom prvog stupnja, tj. $Q(x) = ax + b$, pa slijedi

$$P(x) = (x^2 - 1)(ax + b) + (2x + 1) = ax^3 + bx^2 + (2 - a)x + (1 - b).$$ 2 boda

Iz Vièteovih formula slijedi da je zbroj nultočaka polinoma jednak $-\frac{b}{a}$. Zato je $\frac{b}{a} = 2$. 2 boda

Iz svojstva (iii) slijedi da je $P(0) = 3$, što nam uvrštavanjem u izraz za $P(x)$ daje $(1 - b) = 3$, odakle je $b = -2$. 2 boda

Konačno, iz $\frac{b}{a} = 2$ i $b = 2$ slijedi $a = -1$, pa je traženi polinom

$$P(x) = -x^2 - 2x^2 + 3x + 3.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je traženi polinom oblika $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Iz svojstva (i) slijedi da $P(x)$ možemo zapisati kao

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + (2x + 1).$$ 2 boda

Uvrštavanjem $x = 1$ i $x = -1$ u gornji izraz dobijemo

$$a + b + c + d = P(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$-a + b - c + d = P(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1.$$ 2 boda

Iz Vièteovih formula slijedi da je zbroj nultočaka polinoma jednak $-\frac{b}{a}$. Zato je $\frac{b}{a} = 2$. 2 boda

Iz svojstva (iii) slijedi da je $P(0) = 3$, tj. $d = 3$. 1 bod

Zbrajanjem jednadžbi $a+b+c+d = 3$ i $-a+b-c+d = -1$ slijedi $2b+2d = 2$, odakle zbog $d = 3$ slijedi $b = -2$. 1 bod

Sada iz $\frac{b}{a} = 2$ slijedi $a = -1$. 1 bod

Konačno, iz $a + b + c + d = 3$ dobivamo $c = 3$, pa je traženi polinom

$$P(x) = -x^2 - 2x^2 + 3x + 3.$$ 1 bod

Zadatak A-4.2.

Početni član niza (a_n) je $a_0 = 2022$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, broj a_n jednak je zbroju broja a_{n-1} i najvećeg djelitelja tog broja manjeg od njega samog. Odredi a_{2022}.

Rješenje.

Uočimo da je rastav broja a_0 na proste faktore $a_0 = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. 1 bod

Indukcijom ćemo dokazati da za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$a_{3k} = 3^k \cdot a_0.$$ 2 boda

Baza indukcije za $k = 0$ trivijalno je zadovoljena.

Pretpostavimo sad da za neki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $a_{3k} = 3^k \cdot a_0$.

Najveći djelitelj parnog broja $2m$ manji od njega je m. Broj a_{3k} je paran broj, pa je njegov najveći djelitelj manji od njega samoga jednak $3^k \cdot 1011$. Slijedi

$$a_{3k+1} = 3^k \cdot 2022 + 3^k \cdot 1011 = 3^k \cdot 3033.$$ 2 boda

Najveći djelitelj neparnog broja oblika $3m$ koji je manji od tog broja iznosi m, pa slijedi da je najveći djelitelj broja a_{3k+1} manji od njega također $3^k \cdot 1011$. Zato je

$$a_{3k+2} = 3^k \cdot 3033 + 3^k \cdot 1011 = 3^k \cdot 4044.$$ 2 boda

Konačno, najveći djelitelj parnog broja a_{3k+2} je $3^k \cdot 2022$, pa je

$$a_{3k+3} = 3^k \cdot 4044 + 3^k \cdot 2022 = 3^k \cdot 6066 = 3^{k+1} \cdot 2022 = 3^{k+1} \cdot a_0.$$ 2 boda

Korak indukcije je dokazan, a time i tvrdnja indukcije.

Stoga je $a_{2022} = a_{3 \cdot 674} = 3^{674} \cdot a_0 = 3^{674} \cdot 2022$. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $2^n + 5 \cdot 3^m$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Prvo rješenje.

Označimo s x cijeli broj koji kvadriran daje izraz iz teksta zadatka, odnosno

$$2^n + 5 \cdot 3^m = x^2.$$

Promotrimo koje ostatke izrazi daju pri dijeljenju s 3. Kako je m prirodan, drugi sumand na lijevoj strani je djeljiv s 3. Potpuni kvadrati daju ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3, dok broj 2^n daje ostatak 2 (ako je n neparan) ili 1 (ako je n paran). Jedina mogućnost da jednakost bude zadovoljena je ako je n paran. Dakle, možemo pisati $n = 2n_1$, gdje je n_1 prirodan broj. 2 boda

Zato je i 2^n potpun kvadrat. Prebacimo li ga na desnu stranu jednadžbe, možemo iskoristiti razliku kvadata te pisati

$$5 \cdot 3^m = x^2 - 2^n = (x - 2^{n_1})(x + 2^{n_1}).$$ 1 bod

Pogledajmo faktore na desnoj strani jednakosti. Njihov najveći zajednički djelitelj nužno dijeli i njihovu razliku, koja iznosi 2^{n_1+1}. S druge strane, njihov zajednički djelitelj mora dijeliti i lijevu stranu jednadžbe, na kojoj se nalazi neparan broj. To je moguće samo ako taj djelitelj iznosi 1, odnosno ako su faktori $x-2^{n_1}$ i $x+2^{n_1}$ relativno prosti. 1 bod

Kako su faktori relativno prosti, i kako je faktor $x - 2^{n_1}$ manji od $x + 2^{n_1}$, imamo tri mogućnosti: faktor $x - 2^{n_1}$ je jednak 1, 3^m ili 5.

Ako je $x - 2^{n_1} = 1$, te $x + 2^{n_1} = 5 \cdot 3^m$, oduzimajući te jednakosti dobivamo jednakost $2^{n_1+1} + 1 = 5 \cdot 3^m$. Gledajući ostatke pri dijeljenju s 3, slično kao na početku, zaključujemo da je n_1 paran. No, gledajući ostatke pri dijeljenju s 5, zaključujemo da 2^{n_1+1} daje ostatak 4 samo kada je $n_1 = 4k + 1$, za neki nenegativan cijeli k, što nije moguće ako je n_1 paran. Time dobivamo kontradikciju, te zaključujemo da u ovom slučaju nema rješenja. 2 boda

Ako je $x - 2^{n_1} = 3^m$, te $x + 2^{n_1} = 5$, kao prvo zaključujemo da je 5 mora biti veći od 3^m, što je moguće samo za $m = 1$. Oduzimajući jednadžbe dobivamo da je $2^{n_1+1} = 2$, no to vodi na $n_1 = 0$, tj. na rješenje koje nije u prirodnim brojevima. 1 bod

Preostao je slučaj kada je $x - 2^{n_1} = 5$, te $x + 2^{n_1} = 3^m$. Ponovno oduzimamo, te dobivamo jednakost

$$3^m - 2^{n_1+1} = 5.$$

Gledajući ostatke pri dijeljenju s 3 zaključujemo da se jednakost može postići tek ako je n_1 neparan broj, odnosno ako vrijedi $n_1 = 2n_2 - 1$, za neki $n_2 \in \mathbb{N}$. Nadalje, gledajući ostatke koje izrazi daju pri dijeljenju s 4, jednakost se može postići te ako je m paran, odnosno kada je $m = 2m_1$, za neki $m_1 \in \mathbb{N}$. 1 bod

Tada su na lijevoj strani gornje jednakosti izrazi potpuni kvadrati, pa primjenjujemo razliku kvadrata:

$$(3^{m_1} - 2^{n_2})(3^{m_1} + 2^{n_2}) = 5.$$ 1 bod

Kako je 5 prost, samo se na jedan način može zapisati kao umnožak dva prirodna broja. Kako je u gornjem zapisu prvi faktor manji od drugog, nužno je $3^{m_1} - 2^{n_2} = 1$ i $3^{m_1} + 2^{n_2} = 5$. Rješenje ovog sustava je $3^{m_1} = 3$, $2^{n_2} = 2$, odnosno $m_1 = n_2 = 1$, odakle dobivamo rješenje $(m, n) = (2, 2)$. 1 bod

Dakle, jedini takav par brojeva (m, n) je $(2, 2)$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $n = 2n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$. 2 boda

Promotrimo sada ostatke koje izrazi u početnoj jednadžbi daju pri dijeljenju s 8. Ako je $n_1 \geqslant 2$, prvi pribrojnik na lijevoj strani je djeljiv s 8, a drugi daje ostatak 7 ili 5, ovisno o parnosti broja m. Potpun kvadrat na desnoj strani daje ostatak 0 ili 1, što daje kontradikciju. Dakle, pretpostavka $n_1 \geqslant 2$ je kriva, pa vrijedi $n_1 = 1$, odnosno $n = 2$. 3 boda

Početnu jednakost možemo faktorizirati:

$$5 \cdot 3^m = (x - 2)(x + 2).$$ 1 bod

Kao u prvom rješenju zaključujemo da su faktori na desnoj strani relativno prosti. 1 bod

Manji faktor $x - 2$ može biti jednak 1, 3^m ili 5.

U prvom slučaju je $x - 2 = 1$ i $x + 2 = 5 \cdot 3^m$. Direktno vidimo je $x = 3$, te $x + 2 = 5$, no to nije oblika $5 \cdot 3^m$, za neki prirodan broj m. 1 bod

U drugom slučaju je $x - 2 = 3^m$ i $x + 2 = 5$. Ponovno je $x = 3$, i ponovno ne dobivamo rješenja, jer $x - 2 = 1$ nije oblika 3^m, za neki prirodan broj m. 1 bod

U zadnjem slučaju je $x - 2 = 5$ i $x + 2 = 3^m$. Iz prve jednakosti je $x = 7$, a iz druge $9 = 3^m$, odakle dobivamo $m = 2$. 1 bod

Dakle, jedini takav par brojeva (m, n) je $(2, 2)$.

Napomena: Parnost broja n na početku oba rješenja može se dokazati promatrajući ostataka pri dijeljenju s 5.

Kao što bodovne sheme sugeriraju, pronalazak rješenja $(m, n) = (2, 2)$ sam po sebi nosi 0 bodova.

Zadatak A-4.4.

Dan je pravilni 2022-kut $A_1A_2 \dots A_{2022}$. Koliko najviše vrhova pravilnog 2022-kuta možemo odabrati tako da nikoje četiri odabrane točke ne čine vrhove pravokutnika?

Rješenje.

Možemo odabrati najviše 1012 točaka. 1 bod

Dokažimo prvo da postoji odabir 1012 točaka među kojima ne postoje četiri koje su vrhovi pravokutnika. Odaberimo točke A_1, A_2, ..., A_{1012}. 1 bod

Pretpostavimo da među tih 1012 točaka postoje točke A, B, C i D takve da tvore pravokutnik $ABCD$. Kružnica opisana tom pravokutniku upravo je kružnica opisana pravilnom 2022-kutu $A_1A_2 \dots A_{2022}$. Neka je S središte te kružnice. Središte pravokutniku opisane kružnice je sjecište dijagonala, koje raspolavlja njegove dijagonale. Dakle, točka S polovište je dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, što je moguće samo ako parovi točaka A i C, te B i D centralno simetrične točke u odnosu na S. S druge strane, među točkama A_1, A_2, ..., A_{1012} ne postoje dva para takvih točaka (samo je jedan takav par, čine ga A_1 i A_{1012}). Dakle, uistinu među tih 1012 točaka ne postoje četiri koje tvore pravokutnik. 2 boda

Dokažimo sada da među svakih 1013 točaka postoje četiri koje su vrhovi pravokutnika.

Promatrajmo 1011 parova točaka $\{A_1, A_{1012}\}$, $\{A_2, A_{1013}\}$, ..., $\{A_{1011}, A_{2022}\}$. 2 boda

Birajući 1013 točaka iz 1011 postojat će barem dva para točaka u kojima smo odabrali sve četiri točke tih dvaju parova. 1 bod

Dokažimo da te četiri točke tvore vrhove pravokutnika.

Središte opisane kružnice pravilnog 2022-kuta S polovište je dužina koje tvore parovi centralno simetričnih točaka. Dodatno, točka S nalazi se na obje dužine koje čine ti parovi. Dakle, S je nužno sjecište dijagonala četverokutu koji čine četiri odabrane točke. Točka S raspolavlja te dijagonale, te su one jednakih duljina (jednake su promjeru opisane kružnice). Svaki četverokut kojem sjecište dijagonala raspolavlja dijagonale jednakih duljina je nužno pravokutnik, odakle zaključujemo da su te četiri točke zaista su vrhovi pravokutnika. 3 boda

Time je tvrdnja dokazana: možemo odabrati najviše 1012 vrhova 2022-kuta tako da nikoje četiri odabrane točke ne čine vrhove pravokutnika.

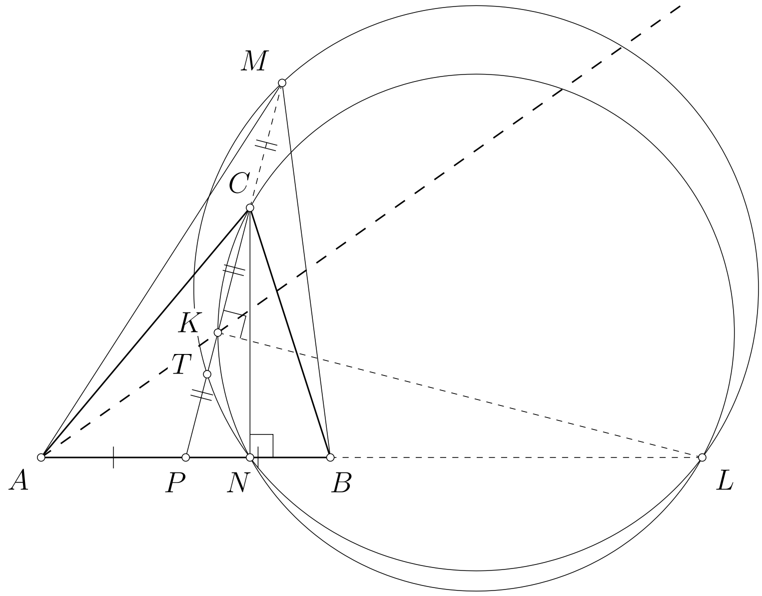
Napomena: U gornjem rješenju dokazali smo sljedeću tvrdnju: četiri točke pravilnog 2022-kuta čine pravokutnik ako i samo ako su među njima dva para centralno simetričnih točaka u odnosu na S. Dokaz te tvrdnje u gornjem rješenju odgovaraju dijelovima rješenja koji vrijede treći i četvrti bod, te zadnja tri boda. Dio rješenja u kojima je ta tvrdnja iskazana vrijedi dodatni 1 bod ako u ostatku rješenja nije dokazan nijedan od njezinih smjerova.

Opravdanje da među točkama A_1, A_2, ..., A_{1012} ne postoje četiri koje čine vrhove pravokutnika može se izvesti i drugačije. U nastavku navodimo još jedan dokaz. Svih 1012 točaka (pa i proizvoljne četiri među njima) nalaze se na jednoj polovici kružnice opisanoj pravilnom 2022-kutu. Pogledajmo vrh s najmanjim indeksom među neke proizvoljne četiri. Unutarnji kut četverokuta pri tom vrhu nužno je šiljast, jer je obodni kut nad tetivom kojoj se vrhovi nalaze na istoj polukružnici (sigurno ta tetiva nije promjer te kružnice), pa taj četverokut ne može biti pravokutnik.

Zadatak A-4.5.

Dan je šiljastokutan trokut ABC s težištem T. Neka je $\overline{CN}$ njegova visina, $\overline{CP}$ težišnica i K polovište te težišnice. Simetrala dužine $\overline{PC}$ siječe pravac AB u točki L. Kružnica opisana trokutu LNT siječe pravac PC u točkama T i M. Dokaži da pravac AK raspolavlja dužinu $\overline{BM}$.

Rješenje.



Budući da je $\sphericalangle LNC = \sphericalangle LKC = 90°$, zaključujemo da je četverokut $LNKC$ tetivan. 1 bod

Iz teksta zadatka znamo da je četverokut $LNTM$ tetivan, pa promatrajući potenciju točke P na te dvije kružnice dobivamo

$$|PT| \cdot |PM| = |PN| \cdot |PL| = |PC| \cdot |PK|$$ 3 boda

Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru 1 : 2, posebno slijedi

$$\frac{|PT|}{|PC|} = \frac{1}{3},$$

odakle zajedno s prethodnom jednakošću slijedi $|PM| = 3|PK|$. 2 boda

U trokutu ABM, dužina $\overline{MP}$ je njegova težišnica, a točka K dijeli tu dužinu u omjeru 2 : 1. Zaključujemo da je K težište tog trokuta. 2 boda

Zato težišnica iz vrha A trokuta ABM leži na pravcu AK, pa zato i taj pravac prolazi polovištem dužine $\overline{BM}$, što je i trebalo dokazati. 2 boda