ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Zbroj dva broja je 6. Ako je zbroj njihovih kubova 90, koliki je zbroj njihovih kvadrata?

Prvo rješenje.

Neka su traženi brojevi x i y. Prema uvjetima zadataka vrijede jednakosti:

$x + y = 6$ i $x^3 + y^3 = 90$.

Primjenom formule za kub binoma i gornjih jednakosti redom slijedi:

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ 1 bod

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ 1 bod

$6^3 = 90 + 3xy \cdot 6$ 1 bod

$18xy = 126$

$xy = 7$ 1 bod

Sada se iz formule za kvadrat binoma izrazi traženi zbroj kvadrata:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ 1 bod

pa je: $x^2 + y^2 = 6^2 - 2 \cdot 7 = 22.$ 1 bod

Napomena:

Jednakost $xy = 7$ može se dobiti i primjenom formule za zbroj kubova:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ 1 bod

$90 = 6 \cdot (x^2 - xy + y^2)$

$15 = x^2 - xy + y^2$ 1 bod

$15 = (x + y)^2 - 3xy$ 1 bod

$15 = 6^2 - 3xy$

$3xy = 21$

$xy = 7$ 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su traženi brojevi x i y. Prema uvjetima zadataka za x i y vrijedi sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x^3+y^3=90 \end{cases}$$

Izrazimo jednu od nepoznanica iz prve jednadžbe i uvrstimo u drugu.

$y=6-x$

$x^3+(6-x)^3=90$ 1 bod

Nakon kubiranja i sređivanja redom slijedi:

$x^3+216-108x+18x^2-x^3=90$

$18x^2-108x+126=0$ 1 bod

$x^2-6x+7=0$

$x^2-6x+9-2=0$

$(x-3)^2=2$ 1 bod

Postoje dva realna broja x koja zadovoljavaju navedenu jednadžbu.

$x-3=\pm\sqrt{2}$, odnosno:

$x_1=3+\sqrt{2}$, a tada je $y_1=6-x_1=3-\sqrt{2}$. 1 bod

$x_2=3-\sqrt{2}$, a tada je $y_2=6-x_2=3+\sqrt{2}$. 1 bod

Polazni sustav jednadžbi ima dva rješenja: $(3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2})$ i $(3-\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2})$.

U oba je slučaja traženi zbroj kvadrata jednak:

$x^2+y^2=(3+\sqrt{2})^2+(3-\sqrt{2})^2=9+6\sqrt{2}+2+9-6\sqrt{2}+2=22.$ 1 bod

Zadatak B-1.2.

Kojom znamenkom završava broj $2^{2022}+3^{2022}+7^{2022}$?

Rješenje.

Potencije broja 2, počevši od 2^1, završavaju redom znamenkama 2, 4, 8, 6 i dalje se periodički ponavljaju. 1 bod

Potencije broja 3, počevši od 3^1, završavaju redom znamenkama 3, 9, 7, 1 i dalje se periodički ponavljaju. 1 bod

Potencije broja 7, počevši od 7^1, završavaju redom znamenkama 7, 9, 3, 1 i dalje se periodički ponavljaju. 1 bod

Zadnju znamenku potencija 2^{2022}, 3^{2022} i 7^{2022} odredit ćemo tako da odredimo ostatak pri dijeljenju eksponenta 2022 brojem 4. Budući je $2022:4=505$ i ostatak je 2, slijedi:

1 bod

Broj 2^{2022} završava istom znamenkom kao i broj 2^2, odnosno, znamenkom 4.

Broj 3^{2022} završava istom znamenkom kao i broj 3^2, odnosno, znamenkom 9.

Broj 7^{2022} završava istom znamenkom kao i broj 7^2, odnosno, znamenkom 9. 1 bod

Zbroj $2^{2022}+3^{2022}+7^{2022}$ završava istom znamenkom kao i broj $4+9+9=22$ pa je znamenka jedinica broja $2^{2022}+3^{2022}+7^{2022}$ jednaka 2. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Koliko ima peteroznamenkastih višekratnika broja 15 kojima su znamenke iz skupa $\{0,\ 1,\ 2\}$?

Prvo rješenje.

Prva znamenka mora biti različita od 0. Broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv s 3 i 5.

Broj je djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5, a kako znamenke mogu biti jedino 0, 1, 2 posljednja znamenka može biti samo 0.

Prva znamenka može biti 1 ili 2. Stoga su traženi višekratnici oblika $\overline{1xyz0}$ ili $\overline{2xyz0}$. 1 bod

Da bi broj bio djeljiv s 15, mora biti djeljiv i s 3 pa mu zbroj znamenki mora biti djeljiv s 3. Postoje sljedeće mogućnosti:

$1+x+y+z=3$,

$1+x+y+z=6$,

$2+x+y+z=3$,

$2+x+y+z=6$,

odnosno, zbroj znamenki $x,\ y,\ z$ može biti 1, 2, 4 i 5. 1 bod

Budući su znamenke $x,\ y,\ z$ iz skupa $\{0,\ 1,\ 2\}$, dane je zbrojeve moguće dobiti na sljedeće načine:

Zbroj 1 može se dobiti ako su dvije znamenke 0, a jedna znamenka 1. Takvih je 3 mogućnosti jer znamenku 1 možemo smjestiti na tri načina, odnosno, može biti bilo koja od znamenki x, y ili z. 1 bod

Zbroj 2 može se dobiti ako su dvije znamenke 0, a jedna znamenka 2 ili ako su dvije znamenke 1, a jedna znamenka 0. Kao i u prethodnom slučaju za zbroj 1, zaključujemo da je takvih $3+3=6$ mogućnosti. 1 bod

Zbroj 4 može se dobiti ako su dvije znamenke 1, a jedna znamenka 2 ili ako su dvije znamenke 2, a jedna znamenka 0. Kao i u prethodnom slučaju, takvih je $3+3=6$ mogućnosti. 1 bod

Zbroj 5 možemo dobiti ako su dvije znamenke 2, a jedna znamenka 1. Kao i u prvom slučaju, takvih je 3 mogućnosti.

Dakle, ukupno je $3+6+6+3=18$ traženih višekratnika. 1 bod

Drugo rješenje.

Prva znamenka mora biti različita od 0. Broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv s 3 i 5.

Broj je djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5, a kako znamenke mogu biti jedino $0,\ 1,\ 2$ posljednja znamenka traženih višekratnika može biti samo 0. 1 bod

Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3. To znači da zbroj preostale četiri znamenke može biti 3 ili 6.

Ako je zbroj preostalih znamenki jednak 3, četiri preostale znamenke mogu biti $1,\ 1,\ 1,\ 0$ ili $1,\ 2,\ 0,\ 0$.

Ako su to znamenke $1,\ 1,\ 1,\ 0$, traženi broj mora biti oblika $\overline{1xyz0}$, gdje znamenku 0 možemo rasporediti na 3 načina (na mjesto znamenke x, y ili z). 1 bod

Ako su to znamenke $1,\ 2,\ 0,\ 0$, traženi broj mora biti oblika $\overline{1xyz0}$ ili $\overline{2xyz0}$, a u oba slučaja preostalu znamenku različitu od 0 možemo rasporediti na 3 načina. 1 bod

Ako je zbroj preostalih znamenki jednak 6, četiri preostale znamenke mogu biti $2,\ 2,\ 2,\ 0$ ili $1,\ 1,\ 2,\ 2$.

Ako su to znamenke $2,\ 2,\ 2,\ 0$, traženi broj mora biti oblika $\overline{2xyz0}$, gdje znamenku 0 možemo rasporediti na 3 načina. 1 bod

Ako su to znamenke $1,\ 1,\ 2,\ 2$, traženi broj mora biti oblika $\overline{1xyz0}$ ili $\overline{2xyz0}$, a u oba slučaja preostalu znamenku jednaku početnoj možemo rasporediti na 3 načina. 1 bod

Ukupno postoji $3 + 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 3 = 18$ traženih višekratnika. 1 bod

Treće rješenje.

Prva znamenka mora biti različita od 0. Broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv s 3 i 5.

Broj je djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5, a kako znamenke mogu biti jedino 0, 1, 2 posljednja znamenka može biti samo 0. 1 bod

Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3, što znači da za preostale 4 znamenke postoje četiri slučaja.

Prvi slučaj: tri znamenke 1 i jedna znamenka 0.

U tom slučaju postoje 3 mogućnosti: 10110, 11010, 11100. 1 bod

Drugi slučaj: dvije znamenke 1 i dvije znamenke 2.

U tom slučaju postoji 6 mogućnosti: 11220, 12120, 12210, 21120, 21210, 22110. 1 bod

Treći slučaj: jedna znamenka 1, jedna znamenka 2 i dvije znamenke 0.

U tom slučaju postoji 6 mogućnosti: 10020, 10200, 12000, 20010, 20100, 21000. 1 bod

Četvrti slučaj: tri znamenke 2 i jedna znamenka 0.

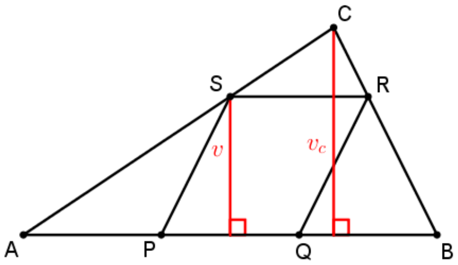
U tom slučaju postoje 3 mogućnosti: 20220, 22020, 22200. 1 bod

Ukupno postoji $3+6+6+3=18$ traženih višekratnika. 1 bod

Zadatak B-1.4.

Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dane su točke P i Q takve da vrijedi $|AP|=|PQ|=|QB|$. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka R takva da je $|RC|=\frac{1}{3}|BC|$, a na stranici $\overline{AC}$ točka S takva da je $|SC|=\frac{1}{3}|AC|$. Ako je površina četverokuta $PQRS$ jednaka $16\ \mathrm{cm}^2$, kolika je površina trokuta ABC?

Prvo rješenje.



Uočimo da je $\triangle SRC \sim \triangle ABC$ po SKS poučku o sličnosti jer vrijedi:

$\frac{|SC|}{|AC|}=\frac{|RC|}{|BC|}=\frac{1}{3}$ i $\sphericalangle ACB=\sphericalangle SCR$. 1 bod

Iz navedene sličnosti slijedi da je $SR \parallel AB$ i $\frac{|SR|}{|AB|}=\frac{1}{3}$, odnosno, da je $|SR|=\frac{1}{3}|AB|$.

1 bod

Budući je $|PQ|=\frac{1}{3}|AB|=|SR|$ i $PQ \parallel SR$, zaključujemo da je četverokut $PQRS$ paralelogram. 1 bod

Neka je v_c visina iz vrha C trokuta ABC, a v visina na stranicu $\overline{PQ}$ paralelograma $PQRS$.

Tada vrijedi $v=\frac{2}{3}v_c$ jer je visina v jednaka razlici visina iz vrha C trokuta ABC i SRC. 1 bod

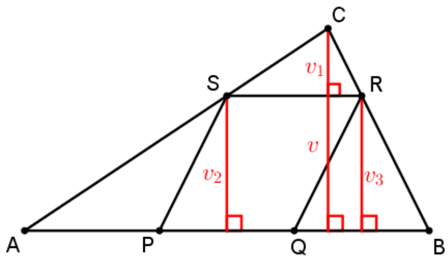
Površina paralelograma $PQRS$ jest:

$P(PQRS)=v\cdot|PQ|=\frac{2}{3}v_c\cdot\frac{1}{3}|AB|$ 1 bod

pa je $16=\frac{2}{9}\cdot|AB|\cdot v_c$, odnosno, $|AB|\cdot v_c=72$.

Konačno, tražena je površina $P(ABC)=\frac{|AB|\cdot v_c}{2}=36\ \mathrm{cm}^2$. 1 bod

Drugo rješenje.



Neka su v visina trokuta ABC iz vrha C, v_1 visina trokuta SRC iz vrha C, v_2 visina trokuta APS iz vrha S i v_3 visina trokuta QBR iz vrha R.

Vrijedi $\triangle SRC \sim \triangle ABC$ jer je: $\dfrac{|SC|}{|AC|} = \dfrac{|RC|}{|BC|} = \dfrac{1}{3}$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle SCR$. 1 bod

Tada je $v_1 = \dfrac{1}{3}v$ i $|SR| = \dfrac{1}{3}|AB|$. Iz sličnosti trokuta SRC i ABC slijedi i da je pravac SR paralelan pravcu AB pa je $v_2 = v_3$. Iz navedenoga slijedi:

$$P_{SRC} = \frac{v_1 \cdot |SR|}{2} = \frac{\frac{1}{3}v \cdot \frac{1}{3}|AB|}{2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{v \cdot |AB|}{2} = \frac{1}{9}P_{ABC}.$$ 1 bod

Budući je $v = v_1 + v_2$ i $v_1 = \dfrac{1}{3}v$, slijedi $v_2 = v_3 = \dfrac{2}{3}v$. 1 bod

Izrazimo površine trokuta APS i QBR pomoću površine trokuta ABC.

$$P_{APS} = \frac{v_2 \cdot |AP|}{2} = \frac{\frac{2}{3}v \cdot \frac{1}{3}|AB|}{2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{v \cdot |AB|}{2} = \frac{2}{9}P_{ABC}.$$

$$P_{SRC} = \frac{v_3 \cdot |QB|}{2} = \frac{\frac{2}{3}v \cdot \frac{1}{3}|AB|}{2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{v \cdot |AB|}{2} = \frac{2}{9}P_{ABC}.$$ 1 bod

Tada je:

$P_{ABC} = P_{APS} + P_{QBR} + P_{SRC} + P_{PQRS}$,

$P_{ABC} = \dfrac{2}{9}P_{ABC} + \dfrac{2}{9}P_{ABC} + \dfrac{1}{9}P_{ABC} + 16$, 1 bod

odnosno: $\dfrac{4}{9}P_{ABC} = 16$.

Konačno, tražena je površina $P_{ABC} = 36\ \text{cm}^2$. 1 bod

Zadatak B-1.5.

Zadana je jednadžba $\dfrac{x-a}{x^2-1}+\dfrac{a}{x^2+x}=\dfrac{x+a}{x^2-x}$. Odredite sve vrijednosti realnoga parametra a za koje ta jednadžba nema realnih rješenja.

Rješenje.

Rastavimo nazivnike svih razlomaka na faktore i napišimo uvjete na rješenje dane jednadžbe.

$$\frac{x-a}{(x-1)(x+1)}+\frac{a}{x(x+1)}=\frac{x+a}{x(x-1)}$$

Uvjeti na rješenje su: $x \neq \pm 1,\ x \neq 0.$ (*) 1 bod

Množenjem jednadžbe zajedničkim nazivnikom i sređivanjem jednadžbe redom se dobiva:

$$x(x-a)+a(x-1)=(x+a)(x+1)$$

$$x^2-ax+ax-a=x^2+ax+x+a$$

$$-ax-x=2a$$

$$-(a+1)x=2a$$ 1 bod

Razlikujemo dva slučaja:

1) Za $a=-1$ jednadžba prelazi u $0 \cdot x=-2$, što nije moguće niti za jedan $x \in \mathbb{R}$. 1 bod

2) Za $a \neq -1$ dobiva se $x=-\dfrac{2a}{a+1}$. 1 bod

Uočimo da je $x=-\dfrac{2a}{a+1}$ rješenje polazne jednadžbe ako su zadovoljeni uvjeti (*):

Iz $x \neq 0$ slijedi $2a \neq 0$ pa mora vrijediti $a \neq 0$.

Iz $x \neq 1$ slijedi $-2a \neq a+1$ pa mora vrijediti $a \neq -\dfrac{1}{3}$.

Iz $x \neq -1$ slijedi $2a \neq a+1$ pa mora vrijediti $a \neq 1$. 1 bod

Prema tome, $x=-\dfrac{2a}{a+1}$ rješenje je polazne jednadžbe za $a \in \mathbb{R} \backslash \left\{-1,\ -\dfrac{1}{3},\ 0,\ 1\right\}$.

Konačno, polazna jednadžba nema rješenja za $a \in \left\{-1,\ -\dfrac{1}{3},\ 0,\ 1\right\}$. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Vlasnici hotela su na početku turističke sezone za 4000 kn kupili nove deke, plahte i jastučnice. Svaku su deku platili 120 kn, svaku plahtu 50 kn, a svaku jastučnicu 25 kn. Ako su kupili ukupno 100 artikala, koliko je kupljeno deka, koliko plahti, a koliko jastučnica? Kupili su barem jedan artikl od svake vrste.

Prvo rješenje.

Neka je x broj kupljenih deka, y broj kupljenih plahti i z broj kupljenih jastučnica, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$x+y+z=100 \qquad \text{i} \qquad 120x+50y+25z=4000.$ 1 bod

Izrazimo jednu nepoznanicu iz prve jednadžbe i uvrstimo u drugu:

$z=100-x-y$

$120x+50y+25(100-x-y)=4000$

$19x+5y=300$ 2 boda

Iz posljednje jednadžbe ponovno izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge:

$x=\frac{300-5y}{19}=\frac{5(60-y)}{19}$ 1 bod

Budući da x, y i z moraju biti prirodni brojevi, zaključujemo da brojnik mora biti djeljiv s nazivnikom, odnosno, da izraz $60-y$ mora biti višekratnik broja 19 1 bod

i da mora vrijediti $y<60$. 1 bod

Tada je $60-y=19$ ili $60-y=19\cdot 2=38$ ili $60-y=19\cdot 3=57$. 1 bod

Za svaku od tih mogućnosti dobivamo jedno od tri rješenja zadatka.

Iz $y=41$ slijedi $x=5$ i $z=54$, odnosno, kupljeno je 5 deka, 41 plahta i 54 jastučnice. 1 bod

Iz $y=22$ slijedi $x=10$ i $z=68$, odnosno, kupljeno je 10 deka, 22 plahte i 68 jastučnica. 1 bod

Iz $y=3$ slijedi $x=15$ i $z=82$, odnosno, kupljeno je 15 deka, 3 plahte i 82 jastučnice. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je x broj kupljenih deka, y broj kupljenih plahti i z broj kupljenih jastučnica, $x,\ y,\ z \in \mathbb{N}$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$x+y+z=100 \qquad \text{i} \qquad 120x+50y+25z=4000.$ 1 bod

Izrazimo iz druge jednadžbe nepoznanicu z i uvrstimo u prvu jednadžbu. Redom dobivamo:

$z=160-\frac{24}{5}x-2y$

$x+y+160-\frac{24}{5}x-2y=100$

$-\frac{19}{5}x-y=-60.$ 1 bod

Iz ove jednadžbe izrazimo nepoznanicu y pomoću x. Slijedi da je $y=60-\frac{19}{5}x.$ 1 bod

Zatim izrazimo i z pomoću x:

$z=160-\frac{24}{5}x-2\left(60-\frac{19}{5}x\right)=40+\frac{14}{5}x.$ 2 boda

Kako su $x,\ y,\ z$ prirodni brojevi, iz $y=60-\frac{19}{5}x$ zaključujemo da je:

x višekratnik broja 5 1 bod

i da mora vrijediti $x \leqslant 15$. 1 bod

Iz $x=5$ slijedi $y=41$ i $z=54$, odnosno, kupljeno je 5 deka, 41 plahta i 54 jastučnice. 1 bod

Iz $x=10$ slijedi $y=22$ i $z=68$, odnosno, kupljeno je 10 deka, 22 plahte i 68 jastučnica. 1 bod

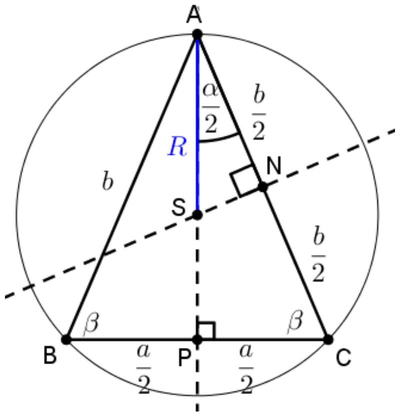
Iz $x=15$ slijedi $y=3$ i $z=82$, odnosno, kupljeno je 15 deka, 3 plahte i 82 jastučnice. 1 bod

Zadatak B-1.7.

Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta je 6 cm, a kosinus kuta uz osnovicu iznosi $\frac{5}{13}$. Odredite polumjer kružnice koja dodiruje oba kraka tog trokuta i njemu opisanu kružnicu.

Prvo rješenje.

Neka je P polovište osnovice $\overline{BC}$, N polovište kraka $\overline{AC}$, a S sjecište simetrala stranica jednakokračnoga trokuta ABC, ujedno i središte trokutu opisane kružnice radijusa R.



Prema uvjetima zadatka uz oznake kao na skici vrijedi:

$\cos\beta = \dfrac{\frac{a}{2}}{b}$, odnosno,

$\dfrac{5}{13} = \dfrac{3}{b}$

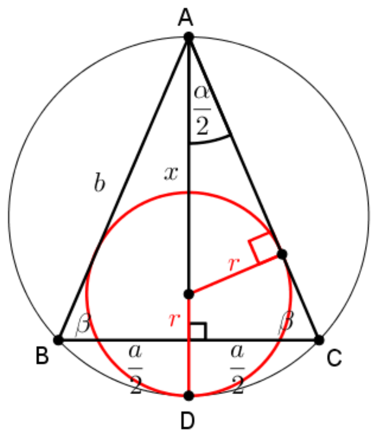
iz čega slijedi da je $b = \dfrac{39}{5}$ cm. 1 bod

Primjenom Pitagorina poučka na trokut APC dobiva se jednakost $|AP|^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$

iz koje slijedi da je $|AP| = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)^2 - 3^2} = \dfrac{36}{5}$ cm. 1 bod

Vrijedi da je $\triangle ANS \sim \triangle APC$ po KK počku o sličnosti jer je $\sphericalangle ANS = \sphericalangle APC = 90^\circ$ i $\sphericalangle NAS = \sphericalangle PAC = \frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Iz sličnosti trokuta slijedi da je $\dfrac{\frac{b}{2}}{R} = \dfrac{|AP|}{b}$, odnosno, da je $2R = \dfrac{169}{20}$ cm. 2 boda



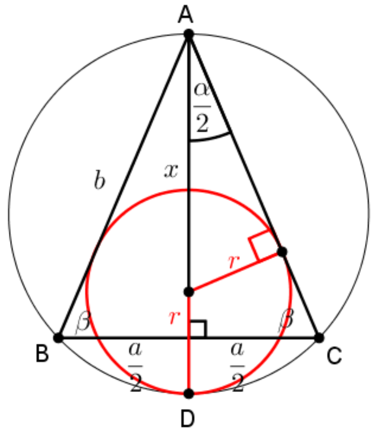
Neka je r traženi polumjer manje kružnice i x udaljenost od središta te kružnice do vrha A. 1 bod

Budući da vrijedi $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\frac{a}{2}}{b} = \dfrac{5}{13}$, slijedi da je $\dfrac{r}{x} = \dfrac{5}{13}$, odnosno, da vrijedi $x = \dfrac{13}{5}r$. 2 boda

Uočimo da vrijedi $|AD| = 2R = x + r$, iz čega slijedi:

$\dfrac{169}{20} = \dfrac{13}{5}r + r$, odnosno, $r = \dfrac{169}{72}$ cm. 2 boda

Drugo rješenje.



Neka je r traženi polumjer manje kružnice, a x udaljenost od središta te kružnice do vrha A nasuprot osnovice jednakokračnoga trokuta ABC.

Neka je R radijus opisane kružnice, a v visina na osnovicu a jednakokračnoga trokuta ABC. 1 bod

Prema uvjetima zadatka uz oznake kao na skici vrijedi:

$\cos\beta = \dfrac{\frac{a}{2}}{b}$, odnosno, $\dfrac{5}{13} = \dfrac{3}{b}$ iz čega slijedi da je $b = \dfrac{39}{5}$ cm. 1 bod

Primjenom Pitagorina poučka dobiva se jednakost $v^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = b^2$ iz koje slijedi da je

$v = \sqrt{\left(\dfrac{39}{5}\right)^2 - 3^2} = \dfrac{36}{5}$ cm. 1 bod

Budući da vrijedi $P_{ABC} = \dfrac{av}{2} = \dfrac{108}{5}$ cm^2, 1 bod

iz $P_{ABC} = \dfrac{a \cdot b \cdot b}{4R}$ slijedi da je $R = \dfrac{ab^2}{4P_{ABC}} = \dfrac{169}{40}$ cm. 2 boda

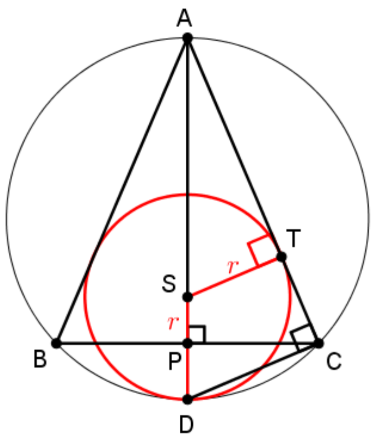
Budući da vrijedi $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos\beta = \dfrac{5}{13}$, slijedi da je $\dfrac{r}{x} = \dfrac{5}{13}$,

odnosno, da vrijedi $x = \dfrac{13}{5}r$. 2 boda

Uočimo da vrijedi $|AD| = 2R = x + r$, iz čega slijedi:

$\dfrac{169}{20} = \dfrac{13}{5}r + r$, odnosno, $r = \dfrac{169}{72}$ cm. 2 boda

Treće rješenje.



U jednakokračnome trokutu ABC točka P polovište je osnovice $\overline{BC}$, a R polumjer tom trokutu opisane kružnice.

Neka je $r = |SD| = |ST|$ traženi polumjer manje kružnice, pri čemu je S njezino središte. 1 bod

U pravokutnome trokutu $\triangle APC$ vrijedi $\cos(\sphericalangle PCA) = \dfrac{|PC|}{|AC|} = \dfrac{3}{|AC|} = \dfrac{5}{13}$

iz čega slijedi $|AC| = \dfrac{39}{5}$ cm. 1 bod

Uočimo da vrijedi $\triangle APC \sim \triangle ATS$ jer je $\sphericalangle ATS = \sphericalangle APC = 90°$ i $\sphericalangle TAS = \sphericalangle PAC$. 1 bod

Slijedi da je $\sphericalangle PCA = \sphericalangle TSA$ pa je prema uvjetu zadatka $\cos(\sphericalangle TSA) = \dfrac{5}{13}$.

Budući je $|AD| = 2R = |AS| + r$, slijedi da je $|AS| = 2R - r$.

U trokutu AST vrijedi $\cos(\sphericalangle TSA) = \dfrac{|ST|}{|AS|} = \dfrac{r}{2R - r}$ pa je $\dfrac{r}{2R - r} = \dfrac{5}{13}$. 2 boda

Polumjer R određujemo iz trokuta ACD u kojemu je $\sphericalangle ACD = 90°$ po Talesovom poučku o kutu nad promjerom kružnice:

$\cos(\sphericalangle DAC) = \dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{\frac{39}{5}}{2R} = \dfrac{39}{10R}$. 1 bod

Budući vrijedi $\cos(\sphericalangle DAC) = \cos(\sphericalangle PAC) = \sin(\sphericalangle PCA) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{12}{13}$, 1 bod

slijedi da je $\dfrac{39}{10R} = \dfrac{12}{13}$, odnosno, da je $R = \dfrac{169}{40}$ cm. 1 bod

Konačno se iz $\dfrac{r}{2R - r} = \dfrac{5}{13}$ dobiva da je $r = \dfrac{169}{72}$ cm. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Ako su α i β šiljasti kutovi pravokutnog trokuta i $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, odredite $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Prvo rješenje.

Iz osnovne veze $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ te $\cos\alpha = \sin\beta$ slijedi da je

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\beta.$$ 2 boda

Nadalje je

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{16-8-2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2.$$ 2 boda

Tada je $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, a 1 bod

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}.$$ 1 bod

Napomena: Ukoliko učenik dobije $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, za dobivanje konačnog rješenja (i zadnjeg boda) treba provesti sljedeći postupak:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}}{8} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})(8+4\sqrt{3})}}{8} = \frac{1}{4}.$$

Drugo rješenje.

Neka je a duljina katete nasuprot kuta α, b duljina katete nasuprot kuta β i c hipotenuza danog pravokutnog trokuta. Tada je $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}$.

Iz $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ slijedi $b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c$. 2 boda

Prema Pitagorinom poučku je

$$a^2 = c^2 - b^2 = c^2\left(1 - \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16}\right) = c^2\frac{16-8-2\sqrt{12}}{16} = c^2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2.$$ 2 boda

Odatle slijedi $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c$, pa je $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 1 bod

Tada je

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}.$$ 1 bod

Zadatak B-2.2.

Odredite apsolutnu vrijednost razlike rješenja jednadžbe

$$x(10a - 5x + 6) = (5a+1)(a+1),\ \ a \in \mathbf{R}.$$

Prvo rješenje.

Nakon sređivanja dana jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$5x^2 - 2(5a+3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0.$$ 1 bod

Neka je $A = x_1 - x_2$. Tada je

$$A^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2.$$ 2 boda

Primijenimo Vièteove formule na rješenja x_1, x_2.

$$x_1 + x_2 = \frac{2(5a+3)}{5}, \qquad x_1x_2 = \frac{5a^2+6a+1}{5}.$$ 1 bod

Tada je

$$A^2 = \left(\frac{2(5a+3)}{5}\right)^2 - 4\frac{5a^2+6a+1}{5} = \frac{4(25a^2+30a+9) - 20(5a^2+6a+1)}{25},$$

odnosno $A^2 = \frac{16}{25}$, pa je $|x_1 - x_2| = \frac{4}{5}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Nakon sređivanja dana jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$5x^2 - 2(5a+3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0.$$ 1 bod

Njezina su rješenja

$$x_{1,2} = \frac{2(5a+3) \pm \sqrt{4(5a+3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (5a^2+6a+1)}}{10} = \frac{2(5a+3) \pm 4}{10},$$ 3 boda

$$x_1 = a+1, \qquad x_2 = a + \frac{1}{5}.$$

Tada je $|x_1 - x_2| = \frac{4}{5}$. 2 boda

Zadatak B-2.3.

Neka je $f(x)$ funkcija za koju vrijedi $f\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = x^2 + x + 1$ te neka je funkcija $g(x)$ definirana s $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$. Odredite prirodno područje definicije funkcije $g(x)$.

Rješenje.

Uvedemo li supstituciju $\frac{x+2}{x-3} = t$ dobivamo da je $x = \frac{3t+2}{t-1}$, pa iz jednakosti $f\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = x^2 + x + 1$ slijedi $f(t) = \left(\frac{3t+2}{t-1}\right)^2 + \frac{3t+2}{t-1} + 1$. 2 boda

Funkciju f možemo pisati i u varijabli x. Tada je funkcija $g(x)$ definirana za sve realne brojeve x za koje je $f(x) - 1 \geqslant 0$, odnosno

$$\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)^2 + \frac{3x+2}{x-1} = \frac{12x^2 + 11x + 2}{(x-1)^2} \geqslant 0.$$ 1 bod

Ova je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $12x^2 + 11x + 2 \geqslant 0$ uz uvjet $x \neq 1$. 1 bod

Rješenje nejednadžbe $12x^2 + 11x + 2 \geqslant 0$ je interval $\left\langle -\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, \infty\right\rangle$, 1 bod

te je prirodno područje definicije funkcije g interval $\left\langle -\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, 1\right\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne napiše uvjet $x \neq 1$ i ne uključi ga u područje definicije funkcije g, a sve drugo je točno napravio treba mu priznati ukupno 4 boda.

Zadatak B-2.4.

Ana je na putovanju po Europi i trenutno se nalazi u jednoj europskoj metropoli. Svakoj od četiri prijateljice poslala je poruku o trenutnoj lokaciji. Tamari je rekla da je trenutno u Parizu ili Londonu, Ivi da je u Beču ili Pragu, Sanja je dobila poruku da se nalazi u Rimu, a Višnji je rekla da nije u Beču. Također je rekla da samo jedna od njih ima točnu informaciju, te da se nalazi u jednom od spomenutih gradova. Koja prijateljica ima točnu informaciju i gdje se nalazi Ana? Je li rješenje jedinstveno? Obrazložite.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da se Ana nalazi u Parizu ili Londonu. Tada su lažne Ivina i Sanjina informacija, a istinite Tamarina i Višnjina informacija, što je kontradikcija budući samo jedna prijateljica može imati istinitu informaciju. 2 boda

Ako pretpostavimo da se Ana nalazi u Beču ili Pragu, tada su lažne Tamarina i Sanjina informacija. 1 bod

Kako samo jedna informacija smije biti istinita, a u ovom slučaju je to Ivina zaključujemo da je i Višnjina informacija lažna, odnosno da je Ana u Beču. 1 bod

Preostaje provjeriti može li Ana biti u Rimu. U tom bi slučaju istinita bila Sanjina informacija, pa Višnjina mora biti lažna, tj. Sanja bi bila i u Rimu i u Beču što je kontradikcija. 1 bod

Jedino moguće rješenje je da je Ana u Beču, a tada može biti istinita samo Ivina informacija. 1 bod

Napomena: Ako učenik krene od pretpostavke da se Ana nalazi u Beču ili Pragu i odmah utvrdi da se Ana nalazi u Beču bez dodatne provjere može li se Ana nalaziti u Parizu, Londonu ili Rimu može dobiti samo 3 boda.

Napomena: Učenik može krenuti i od pretpostavke da se Ana nalazi u Rimu, što ne utječe na sustav bodovanja. Bitno je da učenik provjeri sve gradove i utvrdi koja djevojka ima istinitu informaciju.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo prvo da je Tamarina informacija istinita, tj. da se Ana nalazi u Parizu ili Londonu. Tada su sve druge informacije lažne, pa se iz Ivine poruke može zaključiti da nije ni u Beču ni u Pragu.

Međutim, tada bi i Višnjina tvrdnja bila istinita, a to nije moguće jer je istinita samo jedna tvrdnja. Prema tome, Tamarina informacija mora biti lažna, odnosno Ana nije ni u Parizu ni u Londonu. 1 bod

Sada pretpostavimo da je istinita Ivina informacija, tj. da se Ana nalazi u Beču ili Pragu. U ovom je slučaju lažna Višnjina informacija tj. Ana bi trebala biti u Beču.

Ovo rješenje nije u kontradikciji sa lažnošću Tamarine informacije, budući nije ni u Parizu ni u Londonu. 1 bod

Još ostaje za provjeriti Sanjinu informaciju. Kako je i ta informacija lažna, Ana nije u Rimu što je u suglasju s rješenjem da se nalazi u Beču. 1 bod

Pokažimo još da je istinost Ivine informacije jedino moguće rješenje.

Već smo pokazali da Tamarina informacija ne može biti točna. Ako pretpostavimo da je točna Sanjina informacija, tj. da se Ana nalazi u Rimu, tada je lažna Višnjina informacija, pa bi trebala biti i u Beču što je kontradikcija. Prema tome Sanjina informacija ne može biti točna. 1 bod

Pretpostavimo li da je Višnjina informacija istinita, tj. da Ana nije u Beču, tada je lažna Sanjina informacija pa nije ni u Rimu. A iz lažnosti Tamarine i Ivine informacije zaključujemo da nije ni u Parizu, Londonu, Beču ni Pragu. Ovo je kontradikcija jer se mora nalaziti barem u jednom gradu. 1 bod

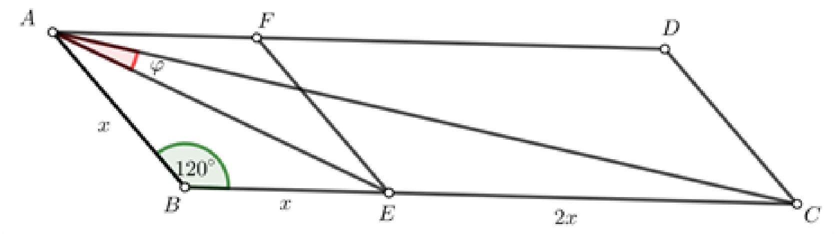
Kako jedino pretpostavka da je Ivina informacija točna ne vodi na kontradikciju s uvjetima zadatka, zaključujemo da točnu informaciju može imati samo Iva te da se Ana može nalaziti samo u Beču. 1 bod

Napomena: Učenik može u rješenje zadatka krenuti analizom istinosti informacije koju je dobila bilo koja djevojka. Da bi dobio sve bodove mora pokazati da je Beč jedino rješenje zagonetke, odnosno da samo istinost Ivine informacije ne vodi na kontradikciju. Ako učenik dobije točno rješenje, ali ne pokaže da je ono jedinstveno može dobiti najviše 3 boda.

Zadatak B-2.5.

U paralelogramu $ABCD$ kut s vrhom u točki B je 120° i stranica AD tri puta je dulja od stranice AB. Na stranici BC odabrana je točka E, a na stranici AD točka F tako da je $ABEF$ romb. Koliki je kosinus kuta EAC?

Rješenje.



1 bod

Neka je $|AB| = x$, $\sphericalangle EAC = \varphi$. Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABE dobivamo:

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BE| \cos 120^\circ = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120^\circ = 3x^2,$$ 1 bod

pa je $|AE| = x\sqrt{3}$. 1 bod

Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABC dobivamo:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cos 120^\circ = x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos 120^\circ = 13x^2,$$ 1 bod

pa je $|AC| = x\sqrt{13}$. 1 bod

Primjenom poučka o kosinusu na trokut AEC dobivamo:

$$\cos\varphi = \frac{|AC|^2 + |AE|^2 - |EC|^2}{2 \cdot |AC| \cdot |AE|} = \frac{13x^2 + 3x^2 - 4x^2}{2 \cdot x\sqrt{13} \cdot x\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$ 1 bod

Napomena: Do zaključka da je $|AE| = x\sqrt{3}$ moglo se doći i iz činjenice da je trokut ABE jednakokračan i relacije $\sin 60^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}|AE|}{x}$ što također vrijedi 2 boda.

Zadatak B-2.6.

U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su dvoznamenkasti prirodni brojevi. Ako broju koji je duljina jedne katete zamijenimo znamenke jedinica i desetica dobit ćemo duljinu hipotenuze tog trokuta. Odredite duljine stranica trokuta.

Rješenje.

Neka je $\overline{xy} = 10x + y$ duljina katete a. Tada je duljina hipotenuze $c = \overline{yx} = 10y + x$ i redom vrijedi:

$$(10x + y)^2 + b^2 = (10y + x)^2,$$ 2 boda

$$100x^2 + 20xy + y^2 + b^2 = 100y^2 + 20xy + x^2,$$

$$b^2 = 99y^2 - 99x^2,$$ 1 bod

$$b^2 = 3^2 \cdot 11(y - x)(y + x).$$ 1 bod

Kako je s lijeve strane kvadrat prirodnog broja, a x i y su jednoznamenkasti brojevi mora vrijediti da je $y + x = 11$, dok $y - x$ mora također biti kvadrat prirodnog broja. Ovo nas vodi na sljedeće slučajeve: 1 bod

1. $y + x = 11, \ y - x = 9$
   Rješenje ovog sustava je $y = 10, \ x = 1$ što ne može biti rješenje zadatka jer je y jednoznamenkasti broj (znamenka). 1 bod
2. $y + x = 11, \ y - x = 4$
   Rješenje ovog sustava je $y = \dfrac{15}{2}, \ x = \dfrac{7}{2}$ što ne može biti rješenje zadatka jer su x i y prirodni brojevi (znamenke). 1 bod
3. $y + x = 11, \ y - x = 1$
   Rješenje ovog sustava je $y = 6, \ x = 5$. 1 bod

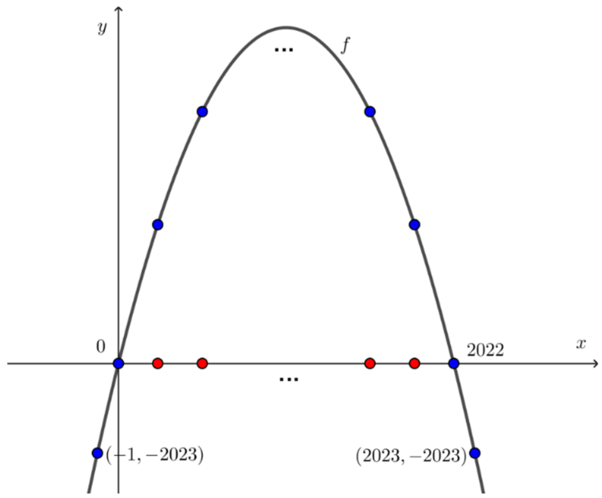
Sada je $b^2 = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 1$, te je $b = 33$.

Prema svemu navedenom radi se o pravokutnom trokutu čije su katete duljina 56 i 33, dok mu je hipotenuza duljine 65. 2 boda

Zadatak B-2.7.

Na grafu funkcije $f(x) = -x^2 + 2022x$ plavom su bojom označene sve cjelobrojne točke (x, y) za koje je $y \geqslant -2023$. Na osi apscisa crvenom su bojom označene sve cjelobrojne točke $(x, 0)$ takve da je $a < x < b$, $f(a) = f(b) = 0$. Koliko ima različitih trokuta kojima su vrhovi dvije plave točke i jedna crvena točka?

Rješenje.



1 bod

Graf zadane funkcije je parabola kojoj su nultočke $(0,0)$ i $(2022,0)$. 1 bod

Prema uvjetu iz zadatka na osi apscisa treba označiti sve točke koje su između nultočaka. To su točke od $(1,0)$ do $(2021,0)$, odnosno 2021 točka je označena crvenom bojom. 1 bod

Broj plavih točaka ovisi o uvjetu $y \geqslant -2023$. Tražimo uvjet na apscise točaka kojima je ordinata veća ili jednaka 2023. Stoga treba riješiti nejednadžbu

$$-x^2 + 2022x \geqslant -2023,$$ 1 bod

odnosno $x^2 - 2022x - 2023 \leqslant 0$ što možemo zapisati u obliku umnoška

$$(x+1)(x-2023) \leqslant 0.$$ 1 bod

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je $x \in [-1, 2023]$. 1 bod

Broj traženih cjelobrojnih točaka na paraboli jednak je broju cijelih brojeva iz dobivenog intervala, a to je 2025. 1 bod

Od plavih točaka dva vrha možemo odabrati na $\dfrac{2025 \cdot 2024}{2}$ načina, a 1 bod

jedan crveni vrh možemo odabrati na 2021 način. 1 bod

Odatle je ukupan broj trokuta koji imaju dva plava i jedan crveni vrh jednak

$$\frac{2025 \cdot 2024}{2} \cdot 2021$$

ali od tog broja moramo oduzeti trokute kojima su dva plava vrha u (0,0) i (2022,0) a treći vrh je jedna od crvenih točaka jer su na istom pravcu. Stoga je ukupan broj trokuta jednak

$$\frac{2025 \cdot 2024}{2} \cdot 2021 - 2021 = 2025 \cdot 1012 \cdot 2021 - 2021 = 4141633279.$$ 2 boda

Napomena: Prvi bod učenik može dobiti i za skicu na kojoj su jasno označene nultočke.

Napomena: Postupak rješavanja nejednažbe $x^2 - 2022x - 2023 \leqslant 0$ nosi jedan bod. Učenik nejednažbu ne mora nužno rješavati metodom faktorizacije.

Napomena: Priznaje se bilo koji zapis konačnog rješenja iz posljednjeg reda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Odredite sve realne brojeve a za koje postoji realan broj x takav da je

$$\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin^3 x + \sin^3 x = a^2 - 3.$$

Rješenje.

Izraz na lijevoj strani jednakosti ćemo zapisati u pogodnijem obliku i primijeniti osnovni identitet $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Redom slijedi:

$$\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin^3 x + \sin^3 x =$$

$$\sin x(\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x) =$$
$$\sin x(\cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x) =$$
$$\sin x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x.$$

2 boda

Tako smo zadanu jednakost sveli na $\sin x = a^2 - 3$.

Budući da je $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, realan broj x za koji dana jednakost vrijedi postoji samo ako je $-1 \leqslant a^2 - 3 \leqslant 1$. 1 bod

Rješenje nejednadžbe $a^2 - 3 \geqslant -1$, tj. $a^2 \geqslant 2$ je $a \in \langle -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty\rangle$. 1 bod

Rješenje nejednadžbe $a^2 - 3 \leqslant 1$, tj. $a^2 \leqslant 4$ je $a \in [-2, 2]$. 1 bod

Dakle, da bi postojao realan broj x takav da je $\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin^3 x + \sin^3 x = a^2 - 3$, broj a mora biti iz intervala $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$. 1 bod

Napomena: Početni izraz se može pojednostaviti i na sljedeći način

$$\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin^3 x + \sin^3 x =$$

$$(1 - \sin^2 x)^2 \sin x + (1 - \sin^2 x) \sin^3 x + \sin^3 x =$$
$$(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \sin x + \sin^3 x - \sin^5 x + \sin^3 x =$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + \sin^5 x + 2\sin^3 x - \sin^5 x = \sin x,$$

što se boduje na isti način, odnosno nosi 2 boda.

Napomena: Nejednadžba $-1 \leqslant a^2 - 3 \leqslant 1$ mogla se riješiti i na sljedeći način

$$-1 \leqslant a^2 - 3 \leqslant 1 \Rightarrow 2 \leqslant a^2 \leqslant 4 \Rightarrow -2 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2,$$

što zamijenjuje analizu dva slučaja, odnosno rješavanje nejednadžbi $a^2 - 3 \geqslant -1$ i $a^2 - 3 \leqslant 1$. Ovaj postupak se može priznati samo ako je u potpunosti točan i to sa 2 boda koja zamijenjuju analizu navedena dva slučaja.

Zadatak B-3.2.

Odredite nultočke funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) - 2x - 1$.

Rješenje.

Nultočke zadane funkcije su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$.

Dakle, treba riješiti jednadžbu $\log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) - 2x - 1 = 0$.

Jednadžbu možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) = 2x + 1,$$ 1 bod

odnosno

$$\log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) = \log_2 2^{2x+1}.$$ 1 bod

Tada redom slijedi

$$\begin{aligned} 18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1 &= 2^{2x+1}, \\ 18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1 &= 2 \cdot 4^x, \\ 16 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1 &= 0. \end{aligned}$$ 2 boda

Možemo uvesti zamjenu $t = 2^x$ pa riješiti pripadnu kvadratnu jednadžbu ili uočiti da je posljednji izraz jednak $(4 \cdot 2^x - 1)^2 = 0$. Odatle zaključujemo da je

$$2^x = \frac{1}{4},$$ 1 bod

$$x = -2.$$ 1 bod

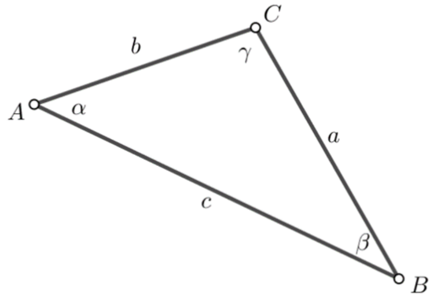
Napomena: Iz izraza $\log_2(18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1) = 2x + 1$ se do izraza $18 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 1 = 2^{2x+1}$ moglo doći i primjenom relacije $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ te taj način također treba bodovati s jednim bodom.

Napomena: U zadatku je zadana domena funkcije pa njenu prirodnu domenu nije potrebno određivati. Iz istog razloga nije potrebno zapisivati uvjet koji treba vrijediti da bi pripadna logaritamska jednadžba imala smisla.

Zadatak B-3.3.

U trokutu ABC vrijedi $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ i $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Odredite mjere preostala dva kuta trokuta ABC.

Prvo rješenje.



Uz oznake kao na slici je $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ i $\alpha=45^\circ$.

Uvrstimo li $c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b$ u poučak o kosinusu, dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

$$a^2=b^2+\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b\right)^2-2b\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b\cos 45^\circ,$$ 1 bod

$$a^2=b^2+\frac{8+2\sqrt{12}}{4}b^2-\frac{2+\sqrt{12}}{2}b^2,$$

$$a^2=b^2+\frac{4+\sqrt{12}}{2}b^2-\frac{2+\sqrt{12}}{2}b^2,$$

$$a^2=b^2+b^2,$$

$$a^2=2b^2.$$

Dakle, $a=\sqrt{2}b$. 2 boda

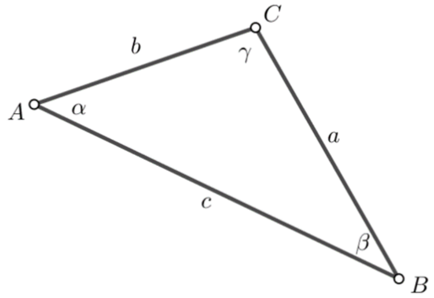
Primjenom poučka o sinusima dobivamo

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}=\frac{b\sin 45^\circ}{\sqrt{2}b}=\frac{1}{2}.$$ 1 bod

Iz $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ i $\alpha=45^\circ$ zaključujemo da kut β mora biti šiljasti kut, odnosno da je $\beta=30^\circ$. 1 bod

$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta=180^\circ-45^\circ-30^\circ=105^\circ$. 1 bod

Drugo rješenje.



Uz oznake kao na slici je $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ i $\alpha=45^{\circ}$.
Iz poučka o zbroju kutova u trokutu dobiva se

$$\gamma=180^{\circ}-\alpha-\beta=180^{\circ}-45^{\circ}-\beta=135^{\circ}-\beta.$$ 1 bod

Prema poučku o sinusima dobivamo $\frac{c}{b}=\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$, pa je

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$ 1 bod

$$\frac{\sin \left(135^{\circ}-\beta\right)}{\sin \beta}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

$$\frac{\sin 135^{\circ} \cdot \cos \beta-\cos 135^{\circ} \cdot \sin \beta}{\sin \beta}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$ 1 bod

pri čemu se koristila adicijska formula za funkciju sinus. Uvrstimo li u taj izraz da je $\cos 135^{\circ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 135^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ te da je $\operatorname{ctg} \beta=\frac{\cos \beta}{\sin \beta}$ dobivamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \beta+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$ 1 bod

Slijedi da je $\operatorname{ctg} \beta=\sqrt{3}$, odnosno $\beta=30^{\circ}$. 1 bod

Konačno je $\gamma=135^{\circ}-\beta=135^{\circ}-30^{\circ}=105^{\circ}$. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Zadana je kvadratna mreža dimenzija 20×20. U jedno polje te mreže upisana je nula. U preostala polja treba upisati prirodne brojeve tako da razlika brojeva u susjednim poljima bude najviše 5. Susjednim poljima smatramo polja koja imaju zajedničku stranicu. Dokažite da postoje barem tri takva polja u koja je upisan isti broj.

Rješenje.

Krenimo od polja u kojemu je 0. Da bismo iz tog polja došli do bilo kojeg drugog polja, potrebno je napraviti najviše 38 koraka. Naime, najveći broj koraka bi se postigao ako bi 0 bila u jednom kutu, a mi se želimo pomaknuti u suprotni kut. Tada trebamo napraviti 19 horizontalnih i 19 vertikalnih pomaka, odnosno 38 koraka. 1 bod

U svakom je koraku dozvoljeno povećanje za najviše 5 pa je najveći broj koji se može pojaviti u mreži jednak $38 \cdot 5 = 190$. 2 boda

Dakle, u mrežu je moguće upisati najviše 191 različiti broj. 1 bod

Kad bi se svaki od tih brojeva javljao manje od tri puta, tada bi bilo upisano najviše $2 \cdot 191 = 382$ broja, a tablica ima 400 mjesta. 1 bod

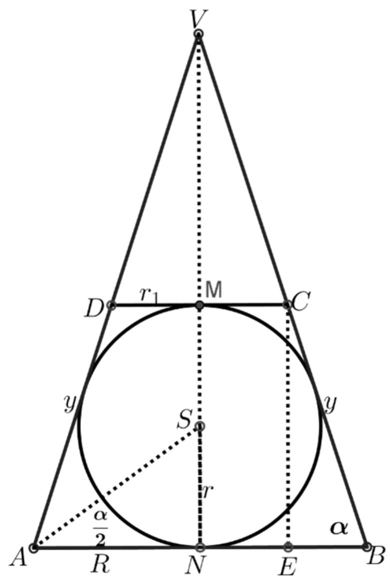
Prema tome u mreži se nalaze barem tri polja u kojima je zapisan isti broj. 1 bod

Zadatak B-3.5.

U uspravni stožac upisana je kugla polumjera 1. Izvodnica zatvara s bazom stošca kut od 60°. Stožac je presječen ravninom koja je paralelna s bazom stošca i dodiruje kuglu. Kolika je površina presjeka te ravnine i stošca?

Prvo rješenje.

Na slici je prikazan osni presjek zadanog stošca i upisane kugle.



1 bod

Uz oznake kao na slici iz pravokutnog trokuta ANS dobivamo da je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} \Rightarrow R = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}30^\circ} = \sqrt{3}.$$ 1 bod

Trapez $ABCD$ je tangencijalni pa vrijedi da je $2R + 2r_1 = 2y \Rightarrow y = R + r_1 = \sqrt{3} + r_1$.

1 bod

Nadalje, iz pravokutnog trokuta EBC dobivamo $\sin\alpha = \frac{2r}{y}$ pa je

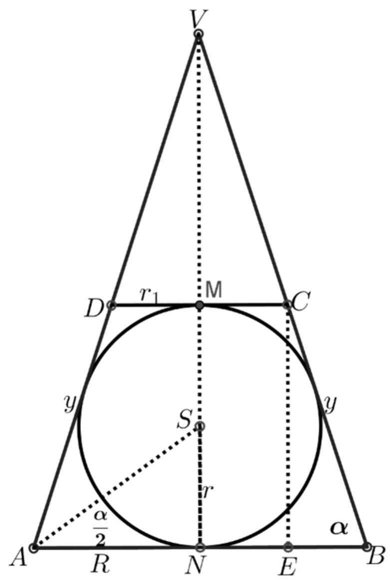
$$y = \frac{2r}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$ 1 bod

Kako je $r_1 = y - R$ konačno dobivamo $r_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 1 bod

Dakle, površina presjeka ravnine i stošca jednaka je $P = r_1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Na slici je prikazan osni presjek zadanog stošca i upisane kugle.



1 bod

Uz oznake kao na slici iz pravokutnog trokuta ANS dobivamo da je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} \Rightarrow R = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}.$$ 1 bod

Iz pravokutnog trokuta ANV dobivamo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|NV|}{|AN|}$, odakle slijedi

$$|NV| = \operatorname{tg}\alpha \cdot R = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sqrt{3} = 3.$$ 1 bod

Trokut ANV sličan je trokutu DMV. Stoga vrijedi $\frac{|AN|}{|NV|} = \frac{|DM|}{|MV|}$, odnosno

$\frac{R}{|NV|} = \frac{r_1}{|MV|}$. 1 bod

Dakle, dobivamo $r_1 = \frac{R \cdot |MV|}{|NV|} = \frac{R \cdot (|NV| - 2r)}{|NV|} = \frac{\sqrt{3} \cdot (3-2)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 1 bod

Konačno, površina presjeka ravnine i stošca jednaka je $P = r_1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$. 1 bod

Zadatak B-3.6.

Riješite sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} \sqrt{9x^2-12x+5} \geqslant \sin x, \\ |x| - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \cos x. \end{cases}$$

Rješenje.

Rješenje prve nejednadžbe mora ispunjavati uvjet $9x^2-12x+5 \geqslant 0$. 1 bod

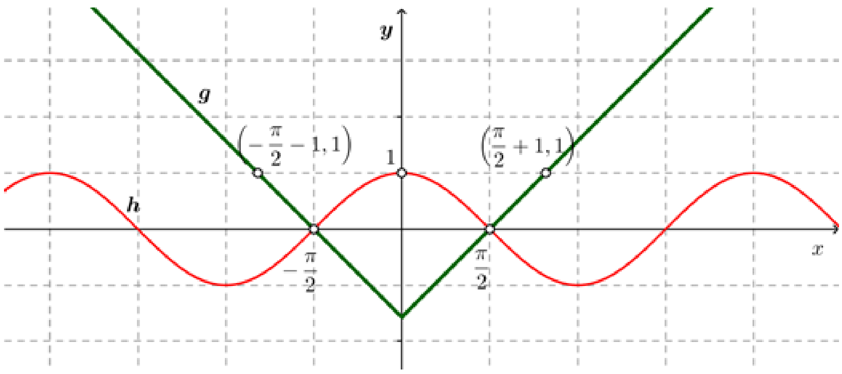
Kako je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe $D = -36$ negativna, a vodeći koeficijent veći od nule, zaključujemo uvjet je ispunjen za svaki $x \in \mathbf{R}$. 2 boda

Budući da je najmanja moguća vrijednost funkcije $f(x) = 9x^2 - 12x + 5$ jednaka

$$y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a} = 1,$$ 1 bod

i $\sin x \in [-1,1]$, zaključujemo da je nejednakost $\sqrt{9x^2-12x+5} \geqslant \sin x$ ispunjena za svaki realan broj x. 1 bod

Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu graf funkcije $g(x) = |x| - \dfrac{\pi}{2}$ i graf funkcije $h(x) = \cos x$.



2 boda

Uočimo da grafovi funkcija $g(x) = |x| - \dfrac{\pi}{2}$ i $h(x) = \cos x$ imaju zajednička sjecišta s x osi, točke $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ i $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ te da su im to jedine zajedničke točke, što je očito iz grafičkog prikaza. 1 bod

Nadalje, graf funkcije $g(x) = |x| - \dfrac{\pi}{2}$ se nalazi ispod grafa funkcije $h(x) = \cos x$ između $-\dfrac{\pi}{2}$ i $\dfrac{\pi}{2}$ pa je rješenje druge nejednadžbe $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. 1 bod

Kako je rješenje prve nejednadžbe svaki realan broj x, a rješenje druge $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, zaključujemo da je rješenje danog sustava $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne navede da grafovi funkcija g i h nemaju drugih sjecišta osim $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ treba oduzeti jedan bod. Prihvaća se i sljedeće obrazloženje.

Na intervalima $\left\langle\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right\rangle$ i $\left\langle-\frac{\pi}{2}-1,-\frac{\pi}{2}\right\rangle$ je $h(x)<0$, $g(x)>0$, a za $x>\frac{\pi}{2}+1$ i za $x<-\frac{\pi}{2}-1$ funkcija $g(x)>1$ pa se grafovi funkcija g i h ne sijeku desno od točke $\frac{\pi}{2}$, odnosno lijevo od točke $-\frac{\pi}{2}$.

Zadatak B-3.7.

Odredite sve cijele brojeve a za koje su rješenja jednadžbe $x^2-(3+a)x+3a+3=0$ također cijeli brojevi. Koji su to brojevi?

Prvo rješenje.

Primjenom Vièteovih formula na rješenja x_1, x_2 dane jednadžbe dobivamo:

$$\begin{cases} x_1+x_2=3+a, \\ x_1 \cdot x_2=3a+3. \end{cases} \qquad (\star) \qquad \text{2 boda}$$

Izrazimo li iz jednakosti $(\star)$ npr. x_1 preko x_2, dobivamo $x_1=\frac{3x_2-6}{x_2-3}$. 2 boda

Sada x_1 možemo zapisati u obliku

$$x_1=\frac{3x_2-6}{x_2-3}=\frac{3(x_2-3)+3}{x_2-3}=3+\frac{3}{x_2-3}. \qquad (\star\star) \qquad \text{2 boda}$$

Kako je x_1 cijeli broj, iz jednakosti $(\star\star)$ zaključujemo da je $x_2-3 \in\{1,3,-1,-3\}$.

Dakle, imamo sljedeće mogućnosti:

$$\begin{gathered} x_2-3=1 \Rightarrow x_2=4 \Rightarrow x_1=6, \\ x_2-3=3 \Rightarrow x_2=6 \Rightarrow x_1=4, \\ x_2-3=-1 \Rightarrow x_2=2 \Rightarrow x_1=0, \\ x_2-3=-3 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow x_1=2. \end{gathered} \qquad \text{2 boda}$$

Iz $x_1=6$, $x_2=4$ i jednakosti $(\star)$ dobivamo $a=7$, analogno kao i iz $x_1=4$ i $x_2=6$. 1 bod

Iz $x_1=0$, $x_2=2$ i jednakosti $(\star)$ dobivamo $a=-1$, analogno kao i iz $x_1=2$ i $x_2=0$. 1 bod

Dakle, samo za cijele brojeve $a=-1$ i $a=7$ su rješenja jednadžbe $x^2-(3+a)x+3a+3=0$ također cijeli brojevi.

Drugo rješenje.

Da bi rješenja jednadžbe $x^2-(3+a)x+3a+3=0$ bili cijeli brojevi nužno je da je diskriminanta te jednadžbe potpuni kvadrat. Izračunajmo diskriminantu.

$$D=(3+a)^2-4(3a+3)=a^2-6a-3.$$

Dakle, zaključujemo da je

$$a^2-6a-3=b^2. \tag{$\star$}$$

Izraz ($\star$) možemo zapisati u obliku $(a-3)^2-12=b^2$, $b>0$, odakle dobivamo $(a-3)^2-b^2=12$, odnosno

$$(a-3-b)(a-3+b)=12. \tag{$\star\star$}$$

2 boda

Kako su a i b cijeli brojevi, $b>0$ imamo sljedeće mogućnosti:

1. $\begin{cases} a-3-b=1 \\ a-3+b=12 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{19}{2}\notin \mathbf{Z},$
2. $\begin{cases} a-3-b=2 \\ a-3+b=6 \end{cases} \Rightarrow a=7,$
3. $\begin{cases} a-3-b=3 \\ a-3+b=4 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{13}{2}\notin \mathbf{Z},$
4. $\begin{cases} a-3-b=-12 \\ a-3+b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-\dfrac{7}{2}\notin \mathbf{Z},$
5. $\begin{cases} a-3-b=-6 \\ a-3+b=-2 \end{cases} \Rightarrow a=-1,$
6. $\begin{cases} a-3-b=-4 \\ a-3+b=-3 \end{cases} \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}\notin \mathbf{Z}.$ 6 bodova

Za $a=7$ dobivamo jednadžbu $x^2-10x+24=0$ čije su nultočke $x_1=4$ i $x_2=6$ cijeli brojevi. 1 bod

Za $a=-1$ dobivamo jednadžbu $x^2-2x=0$ čije su nultočke $x_1=0$ i $x_2=2$ cijeli brojevi. 1 bod

Napomena: Učenik u drugom rješenju može isključiti slučajeve u kojima se promatra rastav broja 12 na djelitelje različite parnosti pa zadatak svesti odmah samo na dva slučaja koja vode do rješenja. Pri tome mora napomenuti zašto promatra samo ta dva slučaja. Ako to nije napravio, a sve drugo ima točno oduzeti 2 boda.

Treće rješenje.

Jednadžbu $x^2 - (3+a)x + 3a + 3 = 0$ možemo zapisati u obliku $(x-a)(x-3) = -3$. 3 boda

Prema uvjetu zadatka x i a su cijeli brojevi, pa je tada $x-a$ cijeli broj, kao i $x-3$. 1 bod

Prema tome imamo sljedeće slučajeve:

1. $\begin{cases} x - a = 1 \\ x - 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \quad a = -1,$ 1 bod
2. $\begin{cases} x - a = -1 \\ x - 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 6, \quad a = 7,$ 1 bod
3. $\begin{cases} x - a = 3 \\ x - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, \quad a = -1,$ 1 bod
4. $\begin{cases} x - a = -3 \\ x - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 4, \quad a = 7.$ 1 bod

Kako je zadana jednadžba kvadratna, za svaki dobiveni a možemo imati najviše dva različita rješenja. Iz provedene analize svaki dobiveni a daje dva rješenja čime su svi uvjeti zadatka zadovoljeni. Za $a = -1$ rješenja su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$, a za $a = 7$ rješenja su $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

24. ožujka 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Za koje je vrijednosti realnoga broja x zbroj trećega i petoga člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2^x}+2^{\frac{-x+1}{2}}\right)^n$ jednak 135 ako je zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana toga razvoja jednak 22?

Rješenje.

Zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana jednak je zbroju binomnih koeficijenata prva tri člana pa možemo pisati:

$\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}=22$ ili $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=22.$ 1 bod

Nakon raspisivanja i binomnih koeficijenata i sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2+n-42=0$ čija su rješenja $n_1=-7$ i $n_2=6$.

Budući je n prirodan broj, jedino moguće rješenje je $n=6$. 1 bod

Označimo s T_{k+1} $(k+1)$. član u razvoju binoma $(a+b)^n$. Tada je $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ pa su treći i peti član razvoja binoma jednaki:

$T_3=\binom{6}{2}(\sqrt{2^x})^4\left(2^{\frac{-x+1}{2}}\right)^2=15\cdot 2^{x+1}$

$T_5=\binom{6}{4}(\sqrt{2^x})^2\left(2^{\frac{-x+1}{2}}\right)^4=15\cdot 2^{2-x}$ 1 bod

Prema uvjetu zadatka je $T_3+T_5=135$ pa treba riješiti jednadžbu

$15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{2-x}=135.$ 1 bod

Uvođenjem supstitucije $2^x=t$ dobivamo $2t^2-9t+4=0$, odnosno, $t_1=\frac{1}{2}$ i $t_2=4$. 1 bod

Iz $2^x=t$, tražene vrijednosti su $x_1=-1$ i $x_2=2$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Polumjer osnovke, izvodnica i visina uspravnog stošca u nekom su poretku tri uzastopna člana rastućega aritmetičkog niza. Ako je površina osnoga presjeka stošca 300 cm^2, koliki je njegov obujam?

Rješenje.

Ako polumjer, izvodnica i visina čine aritmetički niz s razlikom d, dva su moguća slučaja:

1. slučaj: $r = a_1,\ v = a_1 + d,\ s = a_1 + 2d$ 1 bod

2. slučaj: $v = a_1,\ r = a_1 + d,\ s = a_1 + 2d$ 1 bod

Prvi slučaj:

Prema svojstvu aritmetičkoga niza vrijedi $d = v - r$ i $s = a_1 + 2d = r + 2(v - r) = 2v - r$.

1 bod

Površina osnoga presjeka stošca jednakokračan je trokut i vrijedi $P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot v$, odnosno, $rv = 300$.

Za izvodnicu prema Pitagorinu poučku vrijedi $s^2 = r^2 + v^2$ pa je $(2v - r)^2 = r^2 + v^2$, odnosno:

$3v^2 = 4rv = 4 \cdot 300.$

Iz toga slijedi da je $v = 20$ cm i $r = 15$ cm pa je traženi obujam:

$V_1 = \frac{1}{3} r^2 \pi v = 1500\pi\ \text{cm}^3.$ 1 bod

Drugi slučaj:

Prema svojstvu aritmetičkoga niza vrijedi $d = r - v$ i $s = a_1 + 2d = v + 2(r - v) = 2r - v$.

1 bod

Površina osnoga presjeka stošca jednakokračan je trokut i vrijedi $P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot v$, odnosno, $rv = 300$.

Za izvodnicu prema Pitagorinu poučku vrijedi $s^2 = r^2 + v^2$ pa je $(2r - v)^2 = r^2 + v^2$, odnosno:

$3r^2 = 4rv = 4 \cdot 300.$

Iz toga slijedi da je $r = 20$ cm i $v = 15$ cm pa je traženi obujam:

$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi v = 2000\pi\ \text{cm}^3.$ 1 bod

Zadatak B-4.3.

Ako je $z+z^{-1}=2\cos 5^{\circ}$, koliko je $\left(z^{2022}-z^{-2022}\right)^{2022}$?

Rješenje.

Iz $z+z^{-1}=2\cos 5^{\circ}$ nakon množenja brojem z dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$z^{2}-\left(2\cos 5^{\circ}\right)z+1=0.$ 1 bod

Njezina su rješenja:

$$z_{1,2}=\frac{2\cos 5^{\circ}\pm\sqrt{4\cos^{2}5^{\circ}-4}}{2}=\frac{2\cos 5^{\circ}\pm 2\sqrt{\cos^{2}5^{\circ}-1}}{2}=\cos 5^{\circ}\pm i\sin 5^{\circ}.$$ 1 bod

Tada je:

$$z^{2022}=\left(\cos 5^{\circ}\pm i\sin 5^{\circ}\right)^{2022}=\cos 10110^{\circ}\pm i\sin 10110^{\circ}=\cos 30^{\circ}\pm i\sin 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i.$$ 2 boda

$$z^{-2022}=\left(\cos 5^{\circ}\pm i\sin 5^{\circ}\right)^{-2022}=\cos\left(-30^{\circ}\right)\pm i\sin\left(-30^{\circ}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\mp\frac{1}{2}i.$$ 1 bod

Konačno, vrijednost traženoga izraza jest:

$$\left(z^{2022}-z^{-2022}\right)^{2022}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mp\frac{1}{2}i\right)\right)^{2022}=(\pm i)^{2022}=i^{2022}=i^{2}=-1.$$ 1 bod

Zadatak B-4.4.

Ako je $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(x+a)\left(\frac{1}{x}+b\right)$ neparna funkcija i $f\left(a^{2}\right)+f(a)=\frac{35}{6}$, odredite realne brojeve a i b.

Rješenje.

Budući je funkcija f neparna funkcija, za sve realne brojeve x iz njezine domene vrijedi $f(-x)=-f(x)$. 1 bod

Neka je $x=1$. (Može se uzeti bilo koji realan broj različit od 0 ili općenito x.)

Tada je $f(-1)=-f(1)$, odnosno, $(-1+a)(-1+b)=-(1+a)(1+b)$. 1 bod

Nakon sređivanja tog izraza dobivamo $ab=-1$. 1 bod

Iz uvjeta $f\left(a^{2}\right)+f(a)=\frac{35}{6}$ i $b=-\frac{1}{a}$ slijedi:

$$\left(a^{2}+a\right)\left(\frac{1}{a^{2}}-\frac{1}{a}\right)+(a+a)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{35}{6}$$ 1 bod

iz čega dobivamo jednadžbu:

$\frac{1}{a}-a=\frac{35}{6}$, odnosno, $6a^{2}+35a-6=0$.

Njezina su rješenja $a_{1}=-6$ i $a_{2}=\frac{1}{6}$, 1 bod

a iz $ab=-1$ slijedi $b_{1}=\frac{1}{6}$ i $b_{2}=-6$. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Odredite sve prirodne brojeve $y>1$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$\log_{\sin x} y - 3\log_y \sqrt{\sin x} = \dfrac{1}{2}$, pri čemu je $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu na sljedeći način:

$\log_{\sin x} y - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{\log_{\sin x} y} = \dfrac{1}{2}$.

Uvedimo supstituciju $t = \log_{\sin x} y$ čime ova jednadžba prelazi u $t - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{2}$. 1 bod

Uočimo da vrijedi $t = \log_{\sin x} y > 0$ zbog $y > 1$ pa je gornja jednadžba ekvivalenta s $2t^2 - t - 3 = 0$. 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = -1$ i $t_2 = \dfrac{3}{2}$.

Dakle, $\log_{\sin x} y = -1$ ili $\log_{\sin x} y = \dfrac{3}{2}$, odnosno:

$y = \dfrac{1}{\sin x}$ ili $y = (\sin x)^{\frac{3}{2}}$. 1 bod

Rješenje $y = (\sin x)^{\frac{3}{2}}$ odbacujemo jer je $y > 1$, a $(\sin x)^{\frac{3}{2}} \leqslant 1$. 1 bod

Na zadanome intervalu $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ vrijedi $\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$,

a kako je funkcija sinus rastuća na tom intervalu, slijedi:

$\sin\dfrac{\pi}{6} \leqslant \sin x \leqslant \sin\dfrac{\pi}{3}$, odnosno, $\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pa je $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqslant \dfrac{1}{\sin x} \leqslant 2$. 1 bod

Dakle, $y \in \left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 2\right]$.

Budući je y prirodan broj i $y > 1$, jedino je rješenje $y = 2$. 1 bod

Zadatak B-4.6.

Dizalo u jednoj vožnji može prevesti najviše osmero ljudi. Jedanaest stanara, među kojima su i dvojica posvađanih, čeka dizalo i svi idu na isti kat. Kolika je vjerojatnost da će se u dizalu naći posvađani stanari ako se svi stanari trebaju prevesti dizalom u minimalnom broju vožnji?

Rješenje.

Jedanaest stanara dizalo može prevesti u najmanje dvije vožnje.

Odredimo najprije ukupan broj načina na koji je moguće prevesti sve stanare, bez obzira na posvađanu dvojicu.

U dvije vožnje dizalo može prevoziti:

3 stanara u prvoj $+8$ stanara u drugoj vožnji ili obratno $8+3$, zatim $4+7$ ili $7+4$ te $5+6$ ili $6+5$. U prvom slučaju od 11 stanara biramo njih 3 koji idu u prvoj vožnji (ili

8 stanara koji idu u drugoj vožnji) na $\binom{11}{3} = \binom{11}{8} = 165$ načina. Očito je isti broj načina i ako se u prvoj vožnji preveze 8 stanara, a u drugoj njih 3, pa je ukupan broj načina za prijevoz $3+8$ i $8+3$ jednak $2 \cdot \binom{11}{3} = 330$. 2 boda

Broj načina da dizalo preveze u prvoj vožnji 4, a u drugoj 7 stanara ili obratno iznosi $2 \cdot \binom{11}{4} = 660$. 1 bod

Broj načina da dizalo preveze u prvoj vožnji 5, a u drugoj vožnji 6 stanara ili obratno iznosi $2 \cdot \binom{11}{5} = 2 \cdot 462 = 924$. 1 bod

Dakle, ukupan broj načina je $2\left(\binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{11}{5}\right) = 1914$. 1 bod

Odredimo i broj načina u kojima su dvojica posvađanih stanara zajedno u dizalu.

U svakoj od kombinacija vožnji (3+8, 8+3, 4+7, 7+4, 5+6, 6+5) posvađani stanari idu u dizalo zajedno ili u prvoj ili drugoj vožnji i dovoljno je odabrati ostale stanare u dizalu od ukupno 9 preostalih stanara.

Ako dizalo u prvoj vožnji prevozi 3 stanara, među kojima su dvojica posvađanih, preostaje odabrati samo jednoga od preostalih 9 stanara što možemo napraviti na $\binom{9}{1} = 9$ načina. Ako dizalo u prvoj vožnji prevozi 3 stanara, a među njima nisu dvojica posvađanih, onda je broj načina jednak broju odabira 3 stanara od njih 9, odnosno, $\binom{9}{3} = 84$.

Ako dizalo u prvoj vožnji prevozi 8 stanara, među kojima su dvojica posvađanih, biramo 6 stanara od preostalih 9 na $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$ načina. Ako su dvojica posvađanih u drugoj vožnji, broj načina odabira preostalog člana jest $\binom{9}{1} = 9$. 2 boda

Ukupan broj načina u kombinaciji vožnji $3+8$ i $8+3$ jednak je $2\left(\binom{9}{1} + \binom{9}{6}\right) = 186$.

Analogno ćemo računati i za preostale slučajeve.

U kombinaciji vožnji $4+7$ i $7+4$ jednak je $2\left(\binom{9}{2} + \binom{9}{5}\right) = 324$.

U kombinaciji vožnji $5+6$ i $6+5$ jednak je $2\left(\binom{9}{3} + \binom{9}{4}\right) = 420$. 2 boda

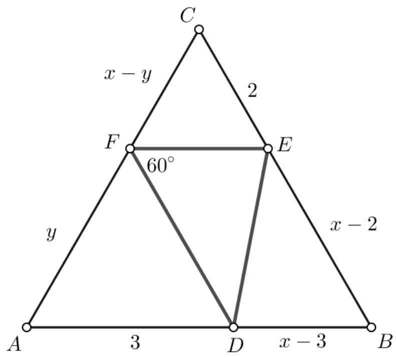
Konačno, vjerojatnost da se posvađani stanari nađu zajedno u liftu je:

$$\frac{\left(\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6}\right) \cdot 2}{1914} = \frac{930}{1914} = \frac{155}{319}.$$ 1 bod

Zadatak B-4.7.

U jednakostraničnom trokutu ABC točka D je na stranici $\overline{AB}$, točka E na stranici $\overline{BC}$ i točka F na stranici $\overline{AC}$. Pri tome je $|AD| = 3$, $|CE| = 2$ i $\sphericalangle DFE = 60°$. Ako je površina trokuta DEF jednaka $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, odredite površinu trokuta ABC.

Prvo rješenje.



Označimo s x stranicu trokuta ABC te ostale stranice kao na skici. Promatrajući površine trokuta sa slike dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$P(ABC) = P(ADF) + P(DBE) + P(CFE) + P(DEF)$ 1 bod

$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |AF| \sin 60° + \frac{1}{2}|DB| \cdot |BE| \sin 60° + \frac{1}{2}|CE| \cdot |CF| \sin 60° + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}y + (x-3)(x-2)\frac{\sqrt{3}}{4} + (x-y)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$x^2 = 3y + (x-3)(x-2) + 2(x-y) + 6$

$x^2 = 3y + x^2 - 5x + 6 + 2x - 2y + 6$

$y = 3x - 12$ (*) 2 boda

Kut $\sphericalangle DFC$ vanjski je kut trokuta ADF pa vrijedi:

$\sphericalangle DFC = \sphericalangle DAF + \sphericalangle FDA = 60° + \sphericalangle FDA$,

a kako je $\sphericalangle DFC = 60° + \sphericalangle EFC$, slijedi da je $\sphericalangle EFC = \sphericalangle FDA$. 1 bod

Dakle, trokuti ADF i CFE imaju dva sukladna kuta pa su slični prema poučku KK. 1 bod

Tada vrijedi $\frac{3}{x-y} = \frac{y}{2}$, iz čega slijedi $xy - y^2 = 6$. 1 bod

Uvrstimo li u ovaj izraz y iz jednakosti (*) redom slijedi:

$x(3x - y) - (3x - 12)^2 = 6$

$3x^2 - 12x - 9x^2 + 72x - 144 = 6$

$6x^2 - 60x + 150 = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 0.$ 2 boda

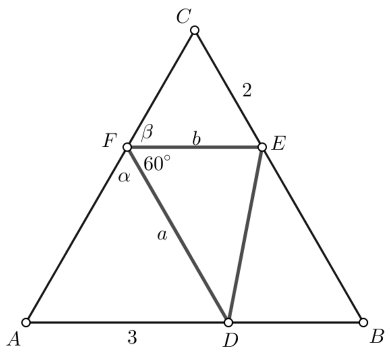
Rješenje dobivene jednadžbe je $x = 5$. 1 bod

Konačno, $P(ABC) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. 1 bod

Napomena:

Ako je učenik raspisao poučak o kosinusu za svaki od četiri trokuta, ali nije iz njih dobio vezu između x i y, može dobiti samo 1 bod za sve raspisane poučke. Ukoliko je dobio neku točnu vezu između x i y, ali nije uočio sličnost i nije računao x i y, dobiva 3 boda.

Drugo rješenje.



Uz oznake kao na slici i prema uvjetu zadatka primjenom formule za površinu trokuta $P = \dfrac{ab \sin \sphericalangle(a,\ b)}{2}$ slijedi:

$P = \dfrac{ab \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, odnosno, $ab = 6$. (**) 1 bod

Primijenimo poučak o sinusima na trokute ADF i FEC. Tada je:

$\dfrac{3}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin 60^\circ}$ i $\dfrac{2}{\sin\beta} = \dfrac{b}{\sin 60^\circ}$. 1 bod

Iz dobivenih jednakosti slijedi da je $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin\alpha},\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\beta}$. 1 bod

Uvrštavanjem a i b u jednakost (**) dobiva se:

$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin\alpha} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\beta} = 6$, odnosno, $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{3}{4}$. 1 bod

Kako je $\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 1 bod

slijedi da je $\sin\alpha \cdot \sin(120^\circ - \alpha) = \dfrac{3}{4}$.

Koristeći formule pretvorbe slijedi: $\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - 120^\circ + \alpha) - \cos(\alpha + 120^\circ - \alpha) = \dfrac{3}{4}$, 1 bod

odnosno, $\cos(2\alpha - 120^\circ) = 1$ pa je $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 120^\circ - \alpha = 60^\circ$. 2 boda

Zaključujemo da su trokuti ADF i FEC jednakostranični pa je $|AF| = 3,\ |FC| = 2$. 1 bod

Slijedi da je $|AB| = 5$, a tražena površina $P(ABC) = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$. 1 bod

Napomena:

Za rješavanje jednadžbe $\sin\alpha \cdot \sin(120^\circ - \alpha) = \dfrac{3}{4}$ umjesto formula pretvorbe mogu se koristiti i adicijske formule. Tada se jednadžba svodi na jednadžbu

$\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = \dfrac{3}{2}$ i dalje na $\operatorname{tg}^2\alpha - 2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$ kojoj je rješenje $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

Bilo koji način izračunavanja kutova α i β iz početne jednadžbe vrijedi 3 boda.