ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Četvrti razred škole za divove pohađa 20 učenika. Svi su učenici sudjelovali u izgradnji tornja. Deset je učenika slagalo kocke jednu na drugu tako da je svaki stavio dvostruko više kocaka od prethodnog. Prvi je učenik stavio jednu kocku, drugi dvije kocke, treći četiri kocke, i tako dalje. Nakon toga su preostali učenici s vrha uzimali kocke i to tako da je prvi od njih uzeo jednu kocku, drugi dvije, treći tri i tako redom do posljednjeg preostalog učenika. Kolika je na kraju visina izgrađenog tornja ako je visina svake kocke 5 cm?

Rješenje.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 2 BODA
= 1023 1 BOD
Desetero učenika izgradilo je toranj od 1023 kocke.
S tornja je kocke uzimalo 20 – 10 = 10 učenika. 1 BOD
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 2 BODA
= 55 1 BOD
Uzeli su 55 kocaka.
Ostalo je 1023 – 55 = 968 kocaka. 1 BOD
Visina tornja je 968 · 5 = 4840 cm. 2 BODA
……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

2. Cijena buketa u kojemu su četiri ruže i četiri tulipana je 96 kn, a cijena buketa u kojemu su dvije ruže i šest tulipana je 84 kn. Kolika je cijena buketa u kojemu je pet ruža i tri tulipana?

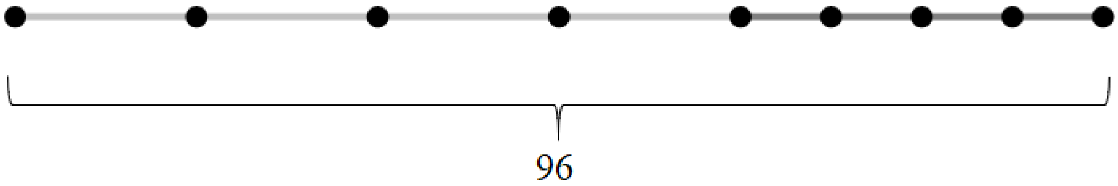
Prvo rješenje.

Nazovimo buket s četiri ruže i četiri tulipana prvi buket. Kad umjesto dvije ruže u prvi buket stavimo dva tulipana, cijena mu se smanji za 96 – 84 = 12 kuna. 3 BODA
To znači da su dvije ruže skuplje od dva tulipana za 12 kuna, 2 BODA
odnosno jedna ruža je skuplja od jednog tulipana za 6 kuna. 1 BOD
Buket od 5 ruža i 3 tulipana dobijemo tako da u prvom buketu tulipan zamijenimo ružom. 1 BOD
To će poskupiti prvi buket za 6 kuna. 1 BOD
Dakle, cijena buketa s 5 ruža i 3 tulipana je: 96 + 6 = 102 kune. 2 BODA
……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

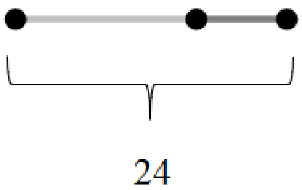
Drugo rješenje.

Označimo cijenu jedne ruže s , a cijenu jednog tulipana s .

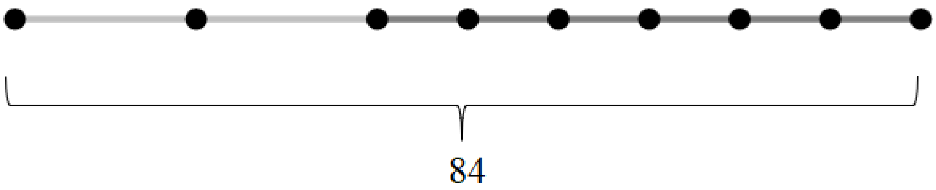
Cijena buketa s 4 ruže i 4 tulipana je 96 kn.

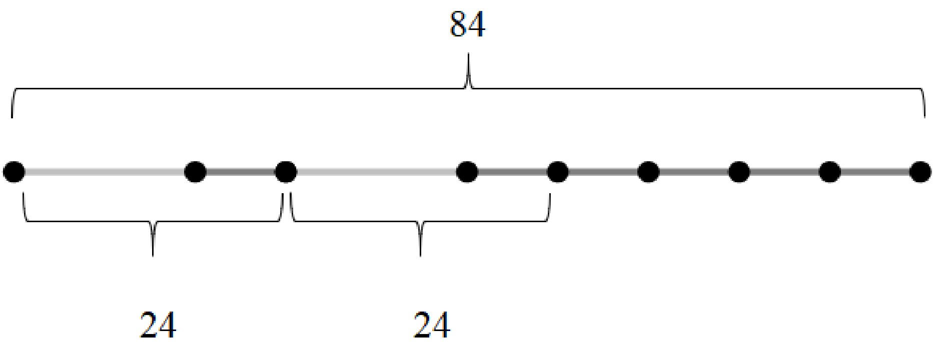


Cijena jedne ruže i jednog tulipana je 96 : 4 = 24 kn. 2 BODA



Cijena buketa s 2 ruže i 6 tulipana je 84 kn.





Cijena 4 tulipana je 84 – 24 – 24 = 36 kn. 4 BODA

Cijena jednog tulipana je 36 : 4 = 9 kn. 1 BOD

Cijena jedne ruže je 24 – 9 = 15 kn. 1 BOD

Cijena buketa s 5 ruža i 3 tulipana je:

$5 \cdot 15 + 3 \cdot 9 = 75 + 27 = 102$ kn. 2 BODA

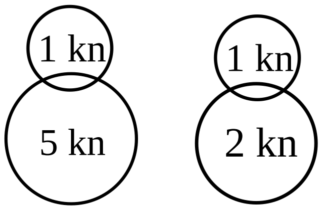
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Dovoljno je rješenje zapisati samo riječima, samo grafički ili samo simbolima (jednadžbama). Bodove nose istaknuti zaključci zapisani na bilo koji od tih načina.

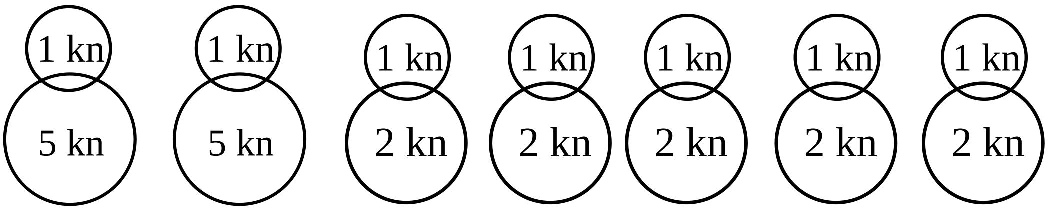
3. Frane u svojoj štednoj kasici ima ukupno 108 kn u kovanicama od 5 kn, 2 kn i 1 kn. Vrijednost novca u kovanicama od 5 kn i 2 kn je jednaka. Broj kovanica od 1 kn jednak je broju kovanica od 5 kn i 2 kn zajedno. Koliko se kovanica pojedine vrste nalazi u kasici?

Prvo rješenje.

Kovanica od 1 kn ima točno onoliko koliko i kovanica od 5 kn i 2 kn zajedno pa možemo na svaku kovanicu od 5 kn staviti kovanicu 1 kn i tako dobiti „paketić“ od 6 kn, te na svaku kovanicu od 2 kn staviti 1 kn i dobiti „paketić“ od 3 kn. 2 BODA



Iznosi u kovanicama od 5 kn i 2 kn su jednaki pa na svake dvije kovanice od 5 kn (tj. paketića od 6 kn) dolazi pet kovanica od 2 kn (tj. paketića od 3 kn). 2 BODA



Dakle, sve kovanice možemo složiti u grupe tako da svaka grupa ima dva paketića od 6 kn i pet paketića od 3 kn te vrijedi $2 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 27$ kn. 2 BODA

Ukupan iznos je 108 kn pa imamo 108 : 27 = 4 takve grupe. 1 BOD

U svakoj grupi imamo 2 kovanice od 5 kn, pa je ukupno 8 takvih kovanica. 1 BOD

U svakoj grupi imamo 5 kovanica od 2 kn, pa je ukupno 20 takvih kovanica. 1 BOD

U svakoj grupi imamo 7 kovanica od 1 kn, pa je ukupno 28 takvih kovanica. 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Ako u kasici ima 8 kovanica od 5 kn, 20 kovanica od 2 kn i 28 kovanica od 1 kn, 2 BODA

onda u kasici ima točno $8 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 28 \cdot 1 = 108$ kn. 1 BOD

Ako smanjimo broj kovanica od 5 kn, moramo smanjiti i broj kovanica od 2 kn (i obrnuto) jer su njihovi iznosi jednaki. Isto ako povećamo jednu vrstu, moramo i drugu. 2 BODA

Ako bismo smanjili broj kovanica od 5 kn i 2 kn, morali bismo smanjiti broj kovanica od 1 kn (jer njih ima kao od 5 kn i 2 kn zajedno), pa bi ukupan iznos bio manji od 108. 2 BODA

Također, ako povećamo broj kovanica od 5 kn i 2 kn, morali bismo povećati broj kovanica od 1 kn i iznos bi bio veći od 108. 2 BODA

Dakle, postoji samo jedno rješenje, ono koje smo naveli na početku. 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Zapisivanje točnog rezultata (bilo kojom metodom, pa makar i pogađanjem) nosi 2 BODA. Provođenje metode koja pokazuje da nema drugih rješenja nosi 8 BODOVA. Jedan način argumentacije je dan u prethodnom rješenju.

Treće rješenje.

Broj kovanica od 2 kn mora biti višekratnik broja 5. 2 BODA

Ako u kasici ima pet kovanica od 2 kn, onda ima dvije kovanice od 5 kn (jer je vrijednost jednih i drugih 10). 1 BOD

To znači da ima 7 kovanica od 1 kn, pa u kasici ima ukupno 10 + 10 + 7 = 27 kn, što nije istina. 1 BOD

Na sličan način bismo računali za veći broj kovanica od 2 kn:

Broj kovanica 2 kn	Broj kovanica 5 kn	Broj kovanica 1 kn	Ukupna vrijednost
10	4	14	54
15	6	21	81
20	**8**	**28**	**108**
25	10	35	135

2 BODA

Kad bismo povećali broj kovanica od 2 kn, povećao bi se i ukupan iznos. 2 BODA

To znači da se u kasici se nalazi 20 kovanica od 2 kn, 8 kovanica od 5 kn i 28 kovanica od 1 kn. 2 BODA

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Konačni rezultat nosi 2 BODA.

Ako učenici ispisuju razne mogućnosti, objašnjenje zašto neke mogućnosti nije potrebno promatrati (npr. broj kovanica od 5 kn je paran broj, broj kovanica od 2 kn je višekratnik broja 5) nosi 2 BODA.

Računanje brojeva kovanica na temelju uvjeta i odbacivanje nemogućih slučajeva (npr. dobili smo ukupnu vrijednost 27, što nije točno) također 2 BODA.

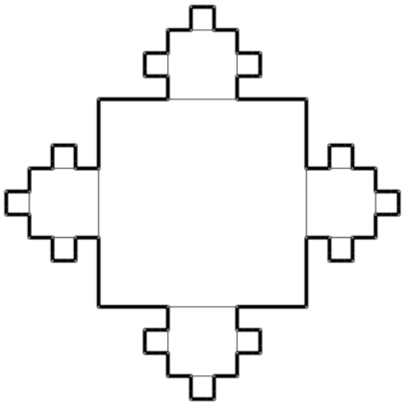
Sustavno organiziranje podataka na način kojim bi se mogle provjeriti sve mogućnosti (npr. od manjeg prema većem broju kovanica određene vrste) nosi 2 BODA.

Isticanje da povećanjem broja kovanica dobivamo veću ukupnu vrijednost i zaključak da nema više rješenja nosi 2 BODA.

Napomena 2: Zadatak se može riješiti i zapisivanjem sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice koje označavaju broj kovanica pojedine vrste. Zapis takvog sustava nosi 2 BODA, eliminacija jedne varijable 3 BODA, određivanje jedna nepoznanice 3 BODA, određivanje preostale dvije nepoznanice 2 BODA.

4. U središtu mozaika nalazi se velika kvadratna ploča sa stranicom duljine 81 cm. Uz srednju trećinu svakog njenog ruba postavljene su manje kvadratne ploče. Potom su uz srednju trećinu svakog slobodnog ruba manje kvadratne ploče postavljene najmanje kvadratne ploče. Od koliko se ploča sastoji mozaik? Koliki je opseg mozaika?

Rješenje.



2 BODA

Jedna je velika, 4 su manje, a 12 je najmanjih kvadratnih ploča.

Ukupno je 1 + 4 + 12 = 17 kvadratnih ploča. 1 BOD

Rub mozaika sastoji se od:

8 dužina duljine 81 : 3 = 27 cm. 2 BODA

$8 \cdot 27 = 216$ cm 1 BOD

60 dužina duljine 27 : 3 = 9 cm. 2 BODA

$60 \cdot 9 = 540$ cm 1 BOD

Opseg mozaika je 216 + 540 = 756 cm. 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Na koliko različitih načina četvero djece Ante, Bruno, Cvijeta i Dunja mogu među sobom podijeliti četiri jednake olovke?

Prvo rješenje.

Djeca među sobom dijele četiri jednake olovke pa svatko od njih može dobiti najviše četiri olovke. No, može se dogoditi da u nekoj podjeli neki od njih ne dobiju niti jednu olovku. Zato možemo imati ovih pet slučajeva:

4 = 4 + 0 + 0 + 0
4 = 3 + 1 + 0 + 0
4 = 2 + 2 + 0 + 0
4 = 2 + 1 + 1 + 0
4 = 1 + 1 + 1 + 1 1 BOD

Odredimo za svaki od tih slučajeva na koliko se različitih načina podjela olovaka može napraviti.

Podjela u kojoj jedno dijete dobiva sve četiri olovke može se napraviti na **4 različita načina**. 1 BOD

Podjela u kojoj jedno dijete dobiva tri olovke, a jedno dijete jednu olovku može se napraviti na **12 različitih načina**:

- dijete koje dobiva tri olovke možemo izabrati na 4 načina
- za svaki odabir djeteta koje dobiva tri olovke, na 3 načina možemo odabrati dijete koje će dobiti jednu olovku 2 BODA

Podjela u kojoj dvoje djece dobivaju po dvije olovke može se napraviti na **6 različitih načina**:

- prvo dijete možemo izabrati na 4 načina, drugo na 3 načina, no na taj način smo svaki odabir brojali dva puta, pa 12 dijelimo s 2 2 BODA

Podjela u kojoj jedno dijete dobiva dvije olovke, a dvoje djece po jednu olovku može se promatrati kao podjela u kojoj jedno dijete dobiva dvije olovke, a jedno dijete niti jednu. Takva se podjela može napraviti na **12 različitih načina**:

- odabir tog jednog djeteta koje dobije dvije olovke možemo napraviti na 4 različita načina, a za svaki taj odabir na 3 načina možemo odabrati dijete koje neće dobiti olovku preostalo dvoje djece dobiva po jednu olovku) 2 BODA

Podjela u kojoj svako dijete dobiva jednu olovku može se napraviti **na 1 način.** 1 BOD

Četvero djece može među sobom podijeliti četiri jednake olovke na
$4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ različitih načina. 1 BOD
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik eksplicitno ne navede pet slučajeva, ali ih ispituje i raspisuje dodjeljuje mu se početni 1 BOD.

Drugo rješenje.
Kao u prvom načinu, imamo pet slučajeva. 1 BOD
Popunimo tablicu tako da za svako dijete napišemo koliko olovaka će dobiti:

Ante	Bruno	Cvijeta	Dunja
4	0	0	0
0	4	0	0
0	0	4	0
0	0	0	4
			1 BOD
3	1	0	0
3	0	1	0
3	0	0	1
1	3	0	0
0	3	1	0
0	3	0	1
1	0	3	0
0	1	3	0
0	0	3	1
1	0	0	3
0	1	0	3
0	0	1	3
			2 BODA
2	2	0	0
2	0	2	0
2	0	0	2
0	2	2	0
0	2	0	2
0	0	2	2
			2 BODA
2	1	1	0
2	1	0	1

2	0	1	1
1	2	1	0
1	2	0	1
0	2	1	1
1	1	2	0
1	0	2	1
0	1	2	1
1	1	0	2
1	0	1	2
0	1	1	2
			2 BODA
1	1	1	1
			1 BOD

Četvero djece može među sobom podijeliti četiri jednake olovke na
4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35 različitih načina. 1 BOD
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U svaku od tri jednake posude stane 600 litara tekućine te je svaka napunjena točno do pola. Iz prve posude u drugu prelijemo 18 % tekućine. Potom iz druge posude u treću prelijemo 2/3 tekućine. Nakon toga iz treće posude u prvu prelijemo 3/8 tekućine i još 5 litara tekućine. Koliko litara tekućine treba preliti iz posude s najviše u posudu s najmanje tekućine kako bi u tim posudama bila jednaka količina tekućine?

Rješenje.

$\frac{1}{2}$ od 600 je 300.

Dakle, u svakoj posudi ima 300 litara tekućine. 1 BOD

18 % zapisujemo u obliku razlomka $18\,\% = \frac{18}{100}$.

$\frac{18}{100}$ od 300 je 54. 1 BOD

54 litara tekućine prelijemo iz prve u drugu posudu pa je u prvoj posudi

300 – 54 = 246 litara tekućine, a u drugoj 300 + 54 = 354 litara tekućine. 1 BOD

$\frac{2}{3}$ od 354 je 236. 1 BOD

236 litara tekućine prelijemo iz druge u treću posudu pa je u drugoj posudi

354 – 236 = 118 litara tekućine, a u trećoj 300 + 236 = 536 litara tekućine. 1 BOD

$\frac{3}{8}$ od 536 je 201. 1 BOD

Kako dodatno prelijevamo još pet litara tekućine ukupno iz treće posude u prvu prelijevamo

201 + 5 = 206 litara tekućine 1 BOD

pa je u trećoj posudi 536 – 206 = 330 litara tekućine, a u prvoj

246 + 206 = 452 litara tekućine. 1 BOD

Nakon svih prelijevanja najviše tekućine je u prvoj posudi (452 L),

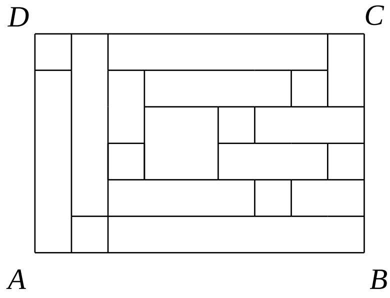
a najmanje u drugoj posudi (118 L). 1 BOD

Da bismo u prvoj i drugoj posudi imali jednaku količinu tekućine iz prve u drugu trebamo preliti

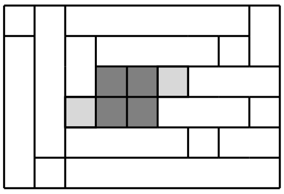
(452 – 118) : 2 = 334 : 2 = 167 litara tekućine. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

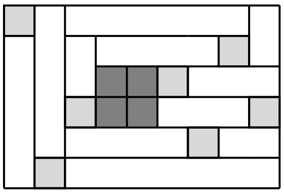
2. Pravokutnik *ABCD* na crtežu podijeljen je na pravokutnike, svi manji kvadrati su sukladni. Površina pravokutnika *ABCD* je 3456 cm^2. Koliki je zbroj opsega svih pravokutnika nacrtanih unutar pravokutnika *ABCD*, a koji unutar sebe ne sadrže manje pravokutnike?



Rješenje.
Uočimo da je duljina stranice većeg kvadrata dvostruko dulja od duljine stranice manjeg kvadrata.
1 BOD



Uočimo da su kvadrati unutar pravokutnika *ABCD* raspoređeni u 9 stupaca i 6 redova. 1 BOD



Duljinu stranice manjeg kvadrata označimo s a.
Duljine stranica pravokutnika *ABCD* su $9a$ i $6a$ pa je površina pravokutnika *ABCD* je:
$9a \cdot 6a = 3456$ tj. 1 BOD
$54a^2 = 3456$
$a^2 = 3456 : 54$
$a^2 = 64$
Duljina stranice manjeg kvadrata je $a = 8$ cm. 1 BOD
Kvadrat je pravokutnik čije su sve stranice jednakih duljina pa u zbroj opsega svih pravokutnika koji su nacrtani unutar pravokutnika *ABCD* trebamo uključiti i opsege svih kvadrata. 1 BOD

Unutar pravokutnika *ABCD* nacrtani su sljedeći pravokutnici i opsezi su redom:
7 kvadrata s duljinom stranice 8 cm…..$7 \cdot 4 \cdot 8 = 224$ cm,
1 kvadrat s duljinom stranice 16 cm…..$1 \cdot 4 \cdot 16 = 64$ cm, 1 BOD
1 pravokutnik s duljinama stranica 56 cm i 8 cm….. $2 \cdot (56 + 8) = 128$ cm,
1 pravokutnik s duljinama stranica 48 cm i 8 cm…..$2 \cdot (48 + 8) = 112$ cm, 1 BOD
2 pravokutnika s duljinama stranica 40 cm i 8 cm….. $2 \cdot 2 \cdot (40 + 8) = 192$ cm,
2 pravokutnika s duljinama stranica 32 cm i 8 cm…..$2 \cdot 2 \cdot (32 + 8) = 160$ cm, 1 BOD
2 pravokutnika s duljinama stranica 24 cm i 8 cm…..$2 \cdot 2 \cdot (24 + 8) = 192$ cm,
3 pravokutnika s duljinama stranica 16 cm i 8 cm….. $3 \cdot 2 \cdot (16 + 8) = 144$ cm. 1 BOD

Zbroj opsega pravokutnika nacrtani unutar pravokutnika *ABCD* je:
224 cm + 64 cm + 128 cm + 112 cm + 192 cm + 160 cm + 128 cm + 144 cm
= 1152 cm 1 BOD
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik ne napiše zaključak da su i kvadrati pravokutnici, ali u daljnjem postupku računa njihov opseg 1 BOD za taj zaključak se dodaje.

3. Anita i Boris gađaju lopticom metu, svatko po 50 puta. Jedan dio mete je obojen žuto, a drugi dio plavo. Za svaki pogodak u metu dobiva se određeni broj bodova, a ako se meta promaši ne dobivaju se bodovi. Anita je 36 puta pogodila žuti dio, a 2 puta promašila metu. Boris je 6 puta pogodio plavi dio, a dvostruko je više puta od Anite promašio metu. Učitelj im je na kraju gađanja rekao da su zajedno osvojili 716 bodova, te da je Boris osvojio 4 boda manje od Anite. Koliko bodova donosi pogodak u žuti, a koliko u plavi dio mete?

Rješenje.
Računamo koliko su puta Anita i Boris pogodili plavi dio mete, žuti dio mete te koliko su puta promašili metu.

Anita je 36 puta pogodila žuti dio mete, a 2 puta promašila metu pa je plavi dio mete pogodila
$50 - (36 + 2) = 50 - 38 = 12$ puta. 1 BOD

Dakle, Boris je 6 puta pogodio plavi dio mete, a 4 puta (2 puta više od Anite) promašio metu pa je žuti dio mete pogodio $50 - (6 + 4) = 50 - 10 = 40$ puta. 1 BOD

Označimo s A broj bodova koje je osvojila Anita, a s B broj bodova koje je osvojio Boris. Iz uvjeta zadatka pronalazimo:
$A + B = 716$ i $B = A - 4$.

Uvrštavanjem $B = A - 4$ u prvu jednadžbu dobivamo:

$A + A - 4 = 716$ 1 BOD

$2A = 716 + 4$

$2A = 720$

$A = 720 : 2$

$A = 360$

Anita je osvojila 360 bodova. 1 BOD

$B = 360 - 4 = 356$

Boris je osvojio 356 bodova. 1 BOD

Označimo s x broj bodova koji se dobiva za pogodak u žuti dio mete, a s y broj bodova koji se dobiva za pogodak u plavi dio mete.

Iz uvjeta zadatka imamo dvije jednadžbe:

$36x + 12y = 360$

$40x + 6y = 356$ 1 BOD

Dalje možemo rješavati na više načina.

Prvi način:
Množenjem druge jednadžbe s 2 dobijemo jednadžbu

$80x + 12y = 712$ 1 BOD

$36x + 12y = 360$

Iz ovog zapisa je vidljivo da se lijeve strane razlikuju za $44x$, a desne za 352 1 BOD

pa je $44x = 352$

$x = 352 : 44$

$x = 8$. Pogodak u žuti dio mete donosi 8 bodova. 1 BOD

$6y = 356 – 320$

$6y = 36$

$y = 36 : 6$

$y = 6$. Pogodak u plavi dio mete donosi 6 bodova. 1 BOD

Drugi način:
Dijeljenjem prve jednadžbe s 2 dobivamo

$18x + 6y = 180$ 1 BOD

$40x + 6y = 356$

Iz ovog zapisa je vidljivo da se lijeve strane razlikuju za $22x$, a desne za 176 1 BOD

pa je $22x = 176$

$x = 176 : 22$

$x = 8$. Pogodak u žuti dio mete donosi 8 bodova. 1 BOD

$6y = 180 – 144$

$6y = 36$

$y = 36:6$

$y = 6$. Pogodak u plavi dio mete donosi 6 bodova. 1 BOD

Treći način:
Iz obje jednadžbe izrazimo $6y$ pa imamo $6y = 180 – 18x$ i $6y = 356 – 40x$. 1 BOD
Izjednačavanjem desnih strana imamo:

$180 – 18x = 356 – 40x$ 1 BOD

$40x – 18x = 356 – 180$

$22x = 176$

$x = 176 : 22$

$x = 8$. Pogodak u žuti dio mete donosi 8 bodova. 1 BOD

$6y = 180 – 144$

$6y = 36$

$y = 36:6$

$y = 6$. Pogodak u plavi dio mete donosi 6 bodova. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik izračuna koliko se bodova dobiva za pogodak u žuti i plavi dio mete na neki drugi način te ukoliko argumentirano objasni sve korake u rješavanju osvaja maksimalan broj bodova predviđen za taj dio zadatka.

4. Izračunaj aritmetičku sredinu svih višekratnika broja 12 koji su oblika $\overline{3a8b}$. Koji od dobivenih višekratnika treba izostaviti kako bi aritmetička sredina preostalih višekratnika bila za 50 veća od aritmetičke sredine svih višekratnika?

Rješenje.

Broj je djeljiv s 12 ako je djeljiv i s 4 i s 3.

Broj je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4 pa je znamenka b 0, 4 ili 8. 1 BOD

Za $b = 0$ broj je oblika $\overline{3a80}$.

$3 + a + 8 + 0 = a + 11$ pa znamenka a može biti 1, 4 ili 7, a

dobiveni su brojevi $3180, 3480, 3780$. 1 BOD

Za $b = 4$ broj je oblika $\overline{3a84}$.

$3 + a + 8 + 4 = a + 15$ pa znamenka a može biti 0, 3, 6 ili 9, a

dobiveni su brojevi $3084, 3384, 3684, 3984$. 1 BOD

Za $b = 8$ broj je oblika $\overline{3a88}$.

$3 + a + 8 + 8 = a + 19$ pa znamenka a može biti 2, 5 ili 8, a

dobiveni su brojevi $3288, 3588, 3888$. 1 BOD

Aritmetička sredina brojeva iznosi

$(3180 + 3480 + 3780 + 3084 + 3384 + 3684 + 3984 + 3288 + 3588 + 3888) : 10 =$

$35340 : 10 = 3534$. 1 BOD

Neka je x broj koji treba izostaviti. Tada vrijedi

$(35340 - x) : 9 = 3584$ 2 BODA

$35340 - x = 3584 \cdot 9$

$35340 - x = 32256$ 1 BOD

$x = 35340 - 32256$ 1 BOD

$x = 3084$

Treba izostaviti broj 3084. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je iz slijeda rješavanja jasno da je traženo rješenje broj 3084 za nedostatak pisanog odgovora ne treba oduzimati bod.

5. Ante, Bruno, Ciprijan, Davor, Emanuel i Franko se trebaju poredati u vrstu.
a) Na koliko se različitih načina dječaci mogu poredati ako Bruno stoji lijevo od Emanuela?
b) Na koliko se različitih načina dječaci mogu poredati ako između Ciprijana i Davora ne stoji niti jedan drugi dječak?

Rješenje.
a) Prvi način:
Ako bismo dječake poredali, bez ikakvih uvjeta, redom biramo jednog od 6 dječaka na prvo mjesto, pa jednog od 5 preostalih dječaka na drugo mjesto i tako do kraja. To možemo učiniti na
$6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ načina. 2 BODA
Uočimo da među tim načinima svaki raspored u kojem je Bruno lijevo od Emanuela ima para u kojem je Bruno desno od Emanuela. Parove formiramo tako da Bruno i Emanuel zamijene svoja mjesta, a svi ostali zadrže svoja mjesta. 3 BODA
Stoga je traženi broj $720 : 2 = 360$. 1 BOD

a) Drugi način:
Ako je Bruno uvijek lijevo od Emanuela, potrebno je razmotriti sljedeće povoljne mogućnosti:

I. Bruno je u vrsti prvi slijeva. Preostali se dječaci tada mogu razmjestiti na sve moguće načine jer je uvjet uvijek ispunjen.
Ukupno je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ različitih načina. 1 BOD
II. Bruno je u vrsti drugi slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), a preostala 4 na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina,
što je ukupno $4 \cdot 24 = 96$ različitih načina. 1 BOD
III. Bruno je u vrsti treći slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), drugo na 3 načina (bez Emanuela), a preostala 3 mjesta na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina,
što je ukupno $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ različita načina. 1 BOD
IV. Bruno je u vrsti četvrti slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), drugo na 3 načina (bez Emanuela), treće na 2 načina (bez Emanuela) a preostala 2 mjesta na $2 \cdot 1 = 2$ načina,
što je ukupno $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ različitih načina. 1 BOD
V. Bruno je u vrsti peti slijeva. Tada se prvo mjesto može popuniti na 4 načina (bez Emanuela), drugo na 3 načina (bez Emanuela), treće na 2 načina (bez Emanuela), četvrto na 1 način (bez Emanuela), a na preostalom šestom mjestu je Emanuel (1 način),
što je ukupno $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$ različita načina. 1 BOD
VI. Ako je Bruno u vrsti šesti (posljednji) nema povoljnih mogućnosti.

Ukupno je $120 + 96 + 72 + 48 + 24 = 360$ povoljnih mogućnosti slaganja vrste prema zadanom uvjetu.
1 BOD

b) Prvi način:
Označimo sa A, B, C, D, E i F dječake prema početnim slovima njihovih imena.
Dječake Ciprijana i Davora promatramo kao nedjeljivu cjelinu i u vrstu ih slažemo u bloku CD (Ciprijan prvi slijeva pored Davora) ili DC (Ciprijan prvi zdesna pored Davora).
Stoga za razmještaj imamo 5 nedjeljivih cjelina: osobe A, B, E, F i blok CD ili blok DC. 1 BOD
Vrstu možemo složiti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ različitih načina. 1 BOD
Ako vrstu slažemo s blokom DC opet je 120 različitih načina. 1 BOD
Ukupno je $120 + 120 = 240$ različitih rasporeda u vrsti sa zadanim uvjetom. 1 BOD

b) Drugi način:

Označimo sa A, B, C, D, E i F dječake prema početnim slovima njihovih imena.

Ako Ciprijan stoji uvijek neposredno pored Davora, onda mu može stajati neposredno slijeva (CD) ili neposredno zdesna (DC).

Promotrit ćemo prvo mogućnosti slaganja vrste ako je Ciprijan prvi slijeva pored Davora.

- Ako Ciprijan stoji prvi u vrsti slijeva onda je Davor drugi pa imamo 24 različita rasporeda:

CD ABEF	*CD BAEF*	*CD EABF*	*CD FABE*
CD ABFE	*CD BAFE*	*CD EAFB*	*CD FAEB*
CD AEBF	*CD BEAF*	*CD EBAF*	*CD FBAE*
CD AEFB	*CD BEFA*	*CD EBFA*	*CD FBEA*
CD AFBE	*CD BFAE*	*CD EFAB*	*CD FEAB*
CD AFEB	*CD BFEA*	*CD EFBA*	*CD FEBA*

1 BOD

- Ako Ciprijan stoji drugi u vrsti slijeva onda je Davor treći pa imamo 24 različita rasporeda.
- Ako Ciprijan stoji treći u vrsti slijeva onda je Davor četvrti pa imamo 24 različita rasporeda.
- Ako Ciprijan stoji četvrti u vrsti slijeva onda je Davor peti pa imamo 24 različita rasporeda.
- Ako Ciprijan stoji peti u vrsti slijeva onda je Davor šesti pa imamo 24 različita rasporeda.

Ukupno je $24 \cdot 5 = 120$ različitih poredaka ako je Ciprijan prvi slijeva pored Davora. 1 BOD

Analogno je ukupno je $24 \cdot 5 = 120$ različitih poredaka ako je Ciprijan prvi

zdesna pored Davora. 1 BOD

Ukupno je 120 + 120 = 240 različitih rasporeda u vrsti sa zadanim uvjetom. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko učenik na bilo koji način pokaže sustavnost u prebrojavanju mogućih rasporeda i točno izračuna broj mogućih rasporeda zadatak treba bodovati s maksimalnim brojem bodova. Ukoliko učenik na bilo koji način pokaže sustavnost u prebrojavanju mogućih rasporeda, ali ne dobije točan rezultat može ostvariti najviše 3 BODA u a) i 2 BODA u b).

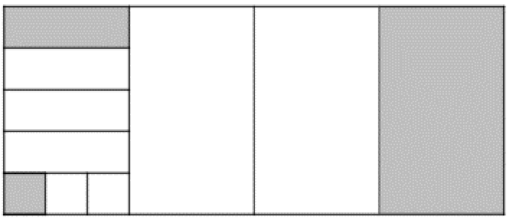
Napomena 2: Samo ako učenik napravi računsku, a ne logičku pogrešku primjenjuje se princip "slijedi pogrešku".

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

6. razred – rješenja

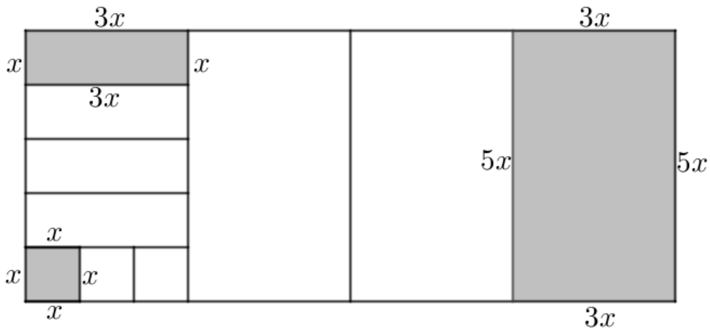
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Veliki pravokutnik je podijeljen na četiri sukladna pravokutnika, od kojih je jedan obojen. Zatim je jedan od neobojenih pravokutnika podijeljen na pet sukladnih pravokutnika od kojih je opet jedan obojen. I na kraju, jedan od tih neobojenih pravokutnika podijeljen je na tri sukladna pravokutnika, od kojih je jedan obojen, kao što je prikazano na slici.



Izračunaj površinu neobojenog dijela pravokutnika na slici, ako je najmanji obojeni pravokutnik kvadrat, a zbroj opsega sva tri obojena pravokutnika iznosi 19.6 cm.

Rješenje.
Označimo duljinu stranice obojenog kvadrata s x.
Tada su duljine stranica drugog obojenog pravokutnika $3x$ i x, a duljine stranica najvećeg obojenog pravokutnika su $3x$ i $5x$ kao što je označeno na slici.



1 BOD

Za obojene pravokutnike vrijedi:
$o_1 = 4x$
$o_2 = 2 \cdot (3x + x) = 8x$
$o_3 = 2 \cdot (3x + 5x) = 16x$.

Zbroj opsega sva tri obojena pravokutnika iznosi:
$o_1 + o_2 + o_3 = 4x + 2(3x + x) + 2(3x + 5x) = 28x$. 1 BOD
Iz uvjeta zadatka vrijedi $28x = 19.6$ 1 BOD
pa je $x = 0.7$ cm (= 7 mm). 1 BOD
Duljine stranica početnog pravokutnika su
$12x = 12 \cdot 7$ mm $= 84$ mm i $5x = 5 \cdot 7$ mm $= 35$ mm. 1 BOD

Njegova je površina:
$P_4 = 84\text{ mm} \cdot 35\text{ mm} = 2940\text{ mm}^2$. 1 BOD
Površine obojenih pravokutnika su:
$P_1 = 7\text{ mm} \cdot 7\text{ mm} = 49\text{ mm}^2$
$P_2 = 21\text{ mm} \cdot 7\text{ mm} = 147\text{ mm}^2$
$P_3 = 21\text{ mm} \cdot 35\text{ mm} = 735\text{ mm}^2$ 2 BODA
Površinu neobojenog dijela pravokutnika izračunat ćemo kao razliku površine početnog pravokutnika i zbroja površina obojenih pravokutnika:
$P = P_4 - (P_1 + P_2 + P_3)$ 1 BOD
$P = 2940 - (49 + 147 + 735)$
$P = 2940 - 931$
$P = 2009\text{ mm}^2 \quad (= 20.09\text{ cm}^2)$. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Maša je imala tri ogrlice s različitim brojem bisera. Od njih je napravila tri nove ogrlice od kojih svaka ima 80 bisera. To je postigla tako da je s prve ogrlice skinula $\frac{3}{7}$ bisera i premjestila ih na drugu ogrlicu, a zatim je s tako dobivene druge ogrlice ponovno premjestila $\frac{3}{7}$ bisera na treću i s tako dobivene treće ogrlice ponovno premjestila $\frac{3}{7}$ bisera na prvu.
Koliko je bisera bilo na svakoj od te tri ogrlice prije premještanja?

Prvo rješenje.
Nakon posljednjeg premještanja $\frac{3}{7}$ bisera, s treće na prvu ogrlicu, na trećoj je ogrlici ostalo 80 bisera.
Prije premještanja na trećoj je ogrlici bilo $\frac{7}{4} \cdot 80 = 140$ bisera. 2 BODA
To znači da je na prvu ogrlicu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ bisera, 1 BOD
pa je na prvoj ogrlici bilo 80 – 60 = 20 bisera. 1 BOD
Slično zaključujemo i za ostala premještanja.

	1. ogrlica	**2.** ogrlica	**3.** ogrlica	
Na kraju	80	80	80	
Prije 3. premještanja	20	80	140	
Prije 2. premještanja	20	140	80	3 BODA
Prije 1. premještanja	35	125	80	3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Neka je *a* broj bisera na prvoj ogrlici prije premještanja, *b* broj bisera na drugoj ogrlici prije premještanja i *c* broj bisera na trećoj ogrlici prije premještanja.
Nakon posljednjeg premještanja $\frac{3}{7}$ bisera, s treće na prvu ogrlicu, na trećoj je ogrlici ostalo 80 bisera.
Neka je *d* broj bisera na trećoj ogrlici prije premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na prvu ogrlicu.
Tada vrijedi $\frac{4}{7}d = 80$ 1 BOD
odnosno $d = \frac{7}{4} \cdot 80 = 140.$ 1 BOD
Dakle, na prvu je ogrlicu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ bisera. 1 BOD

Na prvoj je ogrlici nakon premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na drugu ogrlicu bilo 80 – 60 = 20 bisera,

1 BOD

pa vrijedi $\frac{4}{7}a = 20$

odnosno $a = \frac{7}{4} \cdot 20 = 35$ bisera. 1 BOD

Dakle, s prve je ogrlice na drugu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 35 = 15$ bisera. 1 BOD

Nakon premještanja 15 bisera s prve na drugu ogrlicu i premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na treću ogrlicu vrijedi

$\frac{4}{7}(b + 15) = 80$

odnosno $b + 15 = 140$

pa je $b = 125$. 1 BOD

Na treću je ogrlicu premješteno $\frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ bisera. 1 BOD

Nakon premještanja 60 bisera s druge na treću ogrlicu i premještanja $\frac{3}{7}$ bisera na prvu ogrlicu vrijedi

$\frac{4}{7}(c + 60) = 80$ 1 BOD

odnosno $c + 60 = 140$

pa je $c = 80$. 1 BOD

Na prvoj je ogrlici prije premještanja bilo 35, na drugoj 125, a na trećoj 80 bisera.

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Neka je x broj bisera na prvoj ogrlici prije premještanja, y broj bisera na drugoj ogrlici prije premještanja i z broj bisera na trećoj ogrlici prije premještanja.

Nakon premještanja $\frac{3}{7}x$ bisera s prve na drugu ogrlicu, na prvoj je ostalo je $\frac{4}{7}x$ bisera, 1 BOD

a na drugoj je ogrlici tada bilo $y + \frac{3}{7}x$ bisera. 1 BOD

Kad je Maša s druge ogrlice premjestila $\frac{3}{7}\left(y + \frac{3}{7}x\right)$ bisera na treću, na drugoj je ostalo 80 bisera pa je

$\frac{4}{7}\left(y + \frac{3}{7}x\right) = 80$, 1 BOD

odnosno $y + \frac{3}{7}x = 80 \cdot \frac{7}{4} = 140$. 1 BOD

Na trećoj je ogrlici nakon premještanja s druge ogrlice bilo

$z + \frac{3}{7}\left(y + \frac{3}{7}x\right) = z + \frac{3}{7} \cdot 140 = z + 60$ bisera, 1 BOD

a nakon premještanja $\frac{3}{7}(z + 60)$ bisera na prvu ogrlicu ostalo ih je 80 pa slijedi

$\frac{4}{7}(z + 60) = 80$, 1 BOD

odnosno $z = 80$. 1 BOD

Na prvoj će ogrlici nakon premještanja s treće ogrlice biti

$\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}(z + 60) = 80$ bisera, 1 BOD

otkuda slijedi da je $\frac{4}{7}x + 60 = 80$,

odnosno $x = 35$. 1 BOD

Iz $y + \frac{3}{7}x = 140$ slijedi $y + 15 = 140$ odnosno $y = 125$. 1 BOD

Na prvoj je ogrlici prije premještanja bilo 35, na drugoj 125, a na trećoj 80 bisera.

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Na humanitarnoj akciji prodaju se čokoladne kuglice pakirane u kutije. Ana i Bela kupile su po 2 paketa, a Cico je kupio tri posljednja paketa. Ubrzo im se priključio i Dado, razočaran što su sve kuglice prodane. Ana, Bela i Cico su tada ravnopravno podijelili kuglice na četiri dijela. Dado je za svoj dio ostavio 245 kn. Kako će Ana, Bela i Cico pošteno podijeliti taj iznos?

Prvo rješenje.

Ukupno je bilo $2+2+3=7$ kutija pa zaključujemo da bi svatko trebao platiti $\frac{7}{4}$ kutija. 2 BODA

Kako je Dado za svoj dio ostavio 245 kn, zaključujemo da četvrtina kuglica u kutiji vrijedi 245 kn $:7=35$ kn. 1 BOD

Ana je platila dvije kutije čokoladnih kuglica (8 četvrtina) pa zaključujemo da je potrošila $8\cdot 35$ kn $=280$ kn. 2 BODA

Isto vrijedi i za Belu. 1 BOD

Ana i Bela će od Dadinog novca dobiti svaka po 280 kn -245 kn $=35$ kn. 1 BOD

Cico je kupio tri kutije čokoladnih kuglica (12 četvrtina) pa zaključujemo da je potrošio $12\cdot 35$ kn $=420$ kn. 2 BODA

Cico će od Dadinog novca dobiti $420-245=175$ kuna. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Ukupno je bilo $2+2+3=7$ kutija.

Kako se čokoladne kuglice iz 7 kutija dijele na četvero djece, zaključujemo da svatko treba platiti $\frac{7}{4}$ kutija. 1 BOD

Ana je kupila 2 kutije čokoladnih kuglica (8 četvrtina), a treba zapravo platiti $\frac{7}{4}$.

Znači, Dado plaća njezinih $\frac{1}{4}$. 2 BODA

Isto vrijedi i za Belu. 1 BOD

Cico je kupio 3 kutije čokoladnih kuglica (12 četvrtina), a treba zapravo platiti $\frac{7}{4}$.

Znači, Dado plaća njegovih $\frac{5}{4}$. 2 BODA

245 kuna trebaju podijeliti na 7 jednakih dijelova

245 kn $:7=35$ kn 1 BOD

od kojih će Ana i Bela dobiti po jedan dio, tj. svaka po 35 kn, 2 BODA

a Cico 5 dijelova tj. $5\cdot 35$ kn = 175 kn. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da je $a<b$ i vrijedi $D(a,b)=4$, $D(a,b,c)=2$ te $V(a,b,c)=400$. Odredi sve trojke (a,b,c) prirodnih brojeva za koje vrijede zadani uvjeti.

Prvo rješenje.

Kako vrijedi $V(a,b,c)=400$ rastavimo broj 400 na proste faktore:

$400=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5=2^4\cdot 5^2$. 1 BOD

Iz uvjeta $D(a,b)=4$, zaključujemo da su brojevi a i b višekratnici broja 4.

Iz rastava broja 400 na proste faktore zaključujemo da su $a,b\in\{4,16,20,80,100,400\}$. 2 BODA

Iz rastava broja 400 na proste faktore i uvjeta $D(a,b,c)=2$ zaključujemo da je broj c višekratnik broja 2, ali ne i broja 4, pa vrijedi $c\in\{2,10,50\}$. 2 BODA

Ako je c = 2, vrijedi $a, b \in \{4, 400\}$ i $a, b \in \{16, 100\}$. 1 BOD
Ako je c = 10, vrijedi $a, b \in \{4, 400\}$ i $a, b \in \{16, 100\}$. 1 BOD
Ako je c = 50, vrijedi, $a, b \in \{4, 16\}$, $a, b \in \{4, 80\}$, $a, b \in \{4, 400\}$, $a, b \in \{16, 20\}$, $a, b \in \{16, 100\}$.
2 BODA

Tražene uređene trojke brojeva su:
(4, 400, 2), (16, 100, 2), (4, 400, 10), (16, 100, 10),
(4, 16, 50), (4, 80, 50), (4, 400, 50), (16, 20, 50), (16, 100, 50). 1 BOD

Ili, tražene trojke brojeva učenik može prikazati tablicom.

c	2	2	10	10	50	50	50	50	50
a	4	16	4	16	4	4	4	16	16
b	400	100	400	100	16	80	400	20	100

………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik nema rastav na proste faktore, ali ima sva rješenja uz odgovarajuća obrazloženja, treba dobiti maksimalnih 10 bodova.

Drugo rješenje.
Uočimo da je $V(a, b, c) = 400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. 1 BOD
Iz uvjeta zadatka slijedi da je
$a = 4 \cdot k$ i $b = 4 \cdot l$ pri čemu je $D(k, l) = 1 \ i \ k < l$, 1 BOD
$c = 2 \cdot m$, a m je neparan, zbog $D(a, \mathrm{b}, c) = 2$. 1 BOD
Točno jedan od brojeva k i l mora biti djeljiv s 4 i točno jedan djeljiv s 5 ili 25. 1 BOD
Također to znači da može biti $m = 1$, $m = 5$ ili $m = 25$. 1 BOD
To daje sljedećih 9 mogućnosti za:
$(k, l, m) \boxtimes \{(1, 100, 1), (1, 100, 5), (1, 100, 25), (4, 25, 1), (4, 25, 5), (4, 25, 25), (1, 20, 25),$
$(4, 5, 25), (1, 4, 25)\}$ 4 BODA
pa slijedi:
$(a, b, c) \boxtimes \{(4, 400, 2), (4, 400, 10), (4, 400, 50), (16, 100, 2), (16, 100, 10), (16, 100, 50),$
$(4, 16, 50), (4, 80, 50), (16, 20, 50)\}$ 1 BOD
………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Kako vrijedi $V(a, b, c) = 400$, rastavimo broj 400 na proste faktore:
$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^2$. 1 BOD
Uočimo da su brojevi 2 i 5 jedini prosti faktori u rastavu broja 400 pa tako a, b, c nemaju drugih prostih faktora.
Kako se faktor 2 javlja 4 puta, jedan od brojeva mora sadržavati sva ta četiri faktora ($2^4 = 16$), a zbog uvjeta $D(a, b) = 4$ zaključujemo da drugi broj mora sadržavati $2^2 = 4$.
Brojeve a i b tada možemo zapisati $a = 16 \cdot k$ i $b = 4 \cdot l$ ili $a = 4 \cdot k$ i $b = 16 \cdot l$. 1 BOD
Zbog uvjeta $D(a, b, c) = 2$, treći broj c smije sadržavati samo jedan faktor 2 pa ga možemo zapisati $c = 2 \cdot m$. 1 BOD
Pri tome traženi brojevi mogu sadržavati najviše dva faktora 5, pazeći da a i b nemaju istovremeno faktor 5 zbog $D(a, b) = 4$. 1 BOD
Zbog $D(a, b, c) = 2$, broj c ne smije istovremeno imati zajednički faktor 5 s brojevima a i b. 1 BOD

Ako promatramo broj faktora 5, mogući su sljedeći slučajevi:

(k, l, m)	$a = 16 \cdot k$, $b = 4 \cdot l$, $c = 2 \cdot m$	$a = 4 \cdot k$, $b = 16 \cdot l$, $c = 2 \cdot m$
(1, 1, 25) tj. a i b ne sadrže faktor 5, broj c sadrži dva faktora 5	~~16, 4, 50~~	4, 16, 50
(1, 5, 25) tj. a ne sadrži faktor 5, b sadrži jedan faktor 5, c sadrži dva faktora 5	16, 20, 50	4, 80, 50
(5, 1, 25) tj. a sadrži jedan faktor 5, b ne sadrži faktor 5, c sadrži dva faktora 5	~~80, 4, 50~~	~~20, 16, 50~~
(1, 25, 25) tj. a ne sadrži faktor 5, b i c sadrže dva faktora 5	16, 100, 50	4, 400, 50
(25, 1, 25) tj. a sadrži dva faktora 5, b ne sadrži faktor 5, c sadrži dva faktora 5	~~400, 4, 50~~	~~100, 16, 50~~
(25, 1, 5) tj. a sadrži dva faktora 5, b ne sadrži faktor 5, c sadrži jedan faktor 5	~~400, 4, 10~~	~~100, 16, 10~~
(1, 25, 5) tj. a ne sadrži faktor 5, b sadrži dva faktora 5, c sadrži jedan faktor 5	16, 100, 10	4, 400, 10
(25, 1, 1) tj. a sadrži dva faktora 5, b i c ne sadrže faktor 5	~~400, 4, 2~~	~~100, 16, 2~~
(1, 25, 1) tj. a i c ne sadrže faktor 5, b sadrži dva faktora 5	16,100, 2	4, 400, 2

4 BODA

Ukupno postoji 18 mogućnosti od kojih samo 9 zadovoljava uvjet $a < b$:
$(4, 16, 50), (16, 20, 50), (4, 80, 50), (16, 100, 50), (4, 400, 50), (16, 100, 10), (4, 400, 10),$
$(16, 100, 2)$ i $(4, 400, 2)$. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Za dobivena 4 rješenja učenik treba dobiti 2 BODA, za dobivenih 6 rješenja 3 BODA, a za 8 rješenja 4 BODA. Ukoliko učenik ima samo rastav broja 400 na proste faktore i svih 9 rješenja, a bez odgovarajućeg obrazloženja, može dobiti najviše 6 BODOVA.

5. Na koliko načina Iva, Ana i Tea mogu podijeliti 6 različitih nagrada tako da svaka od njih dobije barem jednu nagradu?

Prvo rješenje.
Iz uvjeta zadatka je vidljivo da sve nagrade moraju biti podijeljene, ali sve djevojčice ne moraju dobiti isti broj nagrada.

Razlikujemo tri slučaja 1–1–4, 2–2–2, 1–2–3, 1 BOD
pri čemu brojevi označavaju koliko nagrada dobiva neka osoba.

U svakom slučaju trebamo odrediti na koliko načina možemo odabrati koja djevojčica će dobiti koji broj nagrada, te koje točno nagrade dobiva.

1° Slučaj 1–1–4
Na tri načina možemo odrediti koja djevojčica dobiva četiri nagrade. 1 BOD

Recimo da Iva i Ana dobivaju po jednu, a Tea četiri nagrade. Ivinu nagradu možemo odabrati na 6 načina, Aninu na 5 načina, a za Teu će tada preostati 4 nagrade koje onda možemo odabrati samo na jedan način. Dobivamo $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ načina. 1 BOD

Analogno zaključujemo u preostala dva slučaja, pa je ukupan broj načina u ovom slučaju $30 \cdot 3 = 90$. 1 BOD

2° Slučaj 2–2–2

Ivine dvije nagrade od ukupno 6 nagrada možemo odabrati na $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ načina,
Anine dvije od preostale 4 nagrade možemo odabrati na $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ načina,
i na kraju, za Teu preostaju dvije nagrade koje onda biramo na jedan način.
Dakle, broj načina podjele nagrada u ovom slučaju je $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$. 1 BOD
Sve djevojčice dobivaju po dvije nagrade, pa ne moramo birati koja dobiva koliko nagrada. 1 BOD

3° Slučaj 1–2–3

Imamo šest načina da odaberemo koja djevojčica će dobiti jednu, dvije ili tri nagrade. 1 BOD
Recimo da Iva dobije jednu, Ana dvije, a Tea tri nagrade.
Ivinu jednu nagradu možemo odabrati na 6 načina, tada će za Anu preostati 5 nagrada pa njene dvije od tih pet nagrada možemo odabrati na $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ načina, a za Teu će ostati tri nagrade koje možemo odabrati na jedan način. Dakle, broj načina podjele nagrada u kojima će Iva dobiti jednu, Ana dvije, a Tea tri nagrade je $6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$. 1 BOD

Ukupan broj načina podjele nagrada u ovom slučaju je $60 \cdot 6 = 360$. 1 BOD
Konačno, 6 različitih nagrada možemo podijeliti Ivi, Ani i Tei na $90 + 90 + 360 = 540$ načina, a da pri tom svaka djevojčica dobije barem jednu nagradu. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je učenik ukupan broj podjela nagrada dobio kao zbroj 90 + 270 + 180 = 540, može dobiti najviše 7 BODOVA.

Drugo rješenje.

Odredimo broj svih rasporeda, u kojima neke djevojčice neće dobiti nagrade, i od njega oduzmimo broj rasporeda u kojima baš neka od njih neće dobiti nagradu. 1 BOD
Svaku od 6 nagrada možemo dati bilo kojoj od tri djevojčice. Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, nagrade možemo raspodijeliti na $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$ 1 BOD
$= 27 \cdot 27 = 729$ načina. 1 BOD
Međutim, tu smo prebrojali i one načine u kojima jedna ili dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu. 1 BOD
Ako Iva ne dobije niti jednu nagradu, onda svih 6 nagrada dijelimo samo Ani i Tei. To možemo napraviti na $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 8 \cdot 8 = 64$ načina. 2 BODA
Analogno, ako Ana ili Tea neće dobiti niti jednu nagradu, taj broj treba pomnožiti s 3, tj.
$64 \cdot 3 = 192$. 1 BOD
No, tada smo dvaput prebrojali slučajeve u kojima po dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu.
To se događa na 3 moguća načina (sve nagrade Ivi, sve nagrade Ani ili sve nagrade Tei). 1 BOD
Dakle, broj načina podjele nagrada u kojima jedna ili dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu je $192 - 3 = 189$. 1 BOD
Konačno, 6 različitih nagrada možemo podijeliti Ivi, Ani i Tei na $729 - 189 = 540$ načina, a da pri tom svaka djevojčica dobije barem jednu nagradu. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Iva i Maja dobile su narudžbu za izradu 72 čestitke. Svaka od njih izradila je 36 čestitki, a svaku od svojih čestitki izrađivala je jednako dugo. Iva je izradila 6 čestitki za isto vrijeme za koje je Maja izradila 5 čestitki. Iva je svojih 36 čestitki izradila za 1 sat i 48 minuta prije nego što je Maja izradila sve svoje čestitke. Koliko je čestitki za 1 sat izradila Iva, a koliko Maja?

Prvo rješenje.

Neka je x vrijeme za koje je Iva izradila 6 čestitki, a Maja 5 čestitki.

Tada je Ivi za izradu jedne čestitke trebalo $\frac{x}{6}$ sati, a Maji $\frac{x}{5}$ sati. 1 BOD

Znači da je Iva svojih 36 čestitki izradila za $\frac{36}{6}x = 6x$ sati, a Maja za $\frac{36}{5}x$ sati. 1 BOD

Pretvorimo 1 sat i 48 minuta u sate.

1 minuta = $\frac{1}{60}$ sati.

$\Rightarrow$ 1sat i 48 minuta = $\frac{108}{60} = \frac{9}{5}$ sati. 1 BOD

Budući je za izradu čestitki Ivi trebalo 1 sat i 48 minuta manje vremena nego Maji, vrijedi jednakost:

$6x + \frac{9}{5} = \frac{36}{5}x$ 3 BODA

$30x + 9 = 36x$ 1 BOD

$6x = 9$

$x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ 1 BOD

Iva za 1h i 30 minuta izradi 6 čestitki, što znači da za 1 sat izradi $6 : 1\frac{1}{2} = 4$ čestitke. 1 BOD

Maja za 1h i 30 minuta izradi 5 čestitki, što znači da za 1 sat izradi

$5 : 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{3}$ čestitki. 1 BOD

………………………………………………………..………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Označimo sa x vrijeme u minutama potrebno Ivi za izradu jedne čestitke.

To znači da će 6 čestitki izraditi za $6x$ minuta. 1 BOD

Za isto vrijeme Maja izradi 5 čestitki iz čega slijedi da joj za izradu jedne čestitke treba $\frac{6}{5}x$ minuta. 1 BOD

Za izradu 36 čestitki Ivi treba $36x$, a Maji $36 \cdot \frac{6}{5}x = \frac{216}{5}x$ minuta. 2 BODA

Budući je za izradu čestitki Ivi trebalo 1 sat i 48 minuta = 108 minuta manje vremena nego Maji, vrijedi jednakost:

$36x + 108 = \frac{216}{5}x$ 2 BODA

$180x + 540 = 216x$

$36x = 540$

$x = 15$ minuta 1 BOD

Dakle, Ivi za izradu jedne čestitke treba 15 minuta, a Maji $\frac{6}{5} \cdot 15 = 18$ minuta. 1 BOD

Slijedi da će za 60 minuta (1 sat) Iva izraditi $\frac{60}{15} = 4$ čestitke,

a Maja $\frac{60}{18} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ čestitki. 2 BODA

……………………………………………………………..………………… UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Za vrijeme dok Iva napravi 6 čestitki, Maja ih napravi 5.

Dok Iva napravi svojih 36 čestitki, Maja će ih napraviti 30. 1 BOD

Za izradu preostalih 6 čestitki Maji treba 1 sat i 48 minuta, tj. 108 minuta. 3 BODA

Za izradu jedne čestitke Maji treba 108 : 6 = 18 minuta. 1 BOD

Za jedan sat Maja izradi $\frac{60}{18} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$čestitki. 2 BODA

Za izradu 5 čestitki Maji treba 5 · 18 = 90 minuta. 1 BOD

Za to vrijeme Iva izradi 6 čestitki, pa joj za jednu treba 90 : 6 = 15 minuta. 1 BOD

Za jedan sat Iva izradi 60 : 15 = 4 čestitke. 1 BOD

..…………………………………………………………..………………… UKUPNO 10 BODOVA

2. Odredi prirodne brojeve *a, b, c* i *d* tako da vrijedi:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{599}{121}.$$

Rješenje.

Budući je

$$a + \frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}} = \frac{599}{121} = 4 + \frac{115}{121}$$

zaključujemo da je $a = 4$. 2 BODA

Dalje je:

$$\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}} = \frac{115}{121}$$

$$\frac{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}{1} = \frac{121}{115}$$ 1 BOD

$$b + \frac{1}{c+\frac{1}{d}} = 1 + \frac{6}{115}$$

Zaključujemo da je $b = 1$. 2 BODA

Analognim postupkom dobivamo

$$\frac{c+\frac{1}{d}}{1} = \frac{115}{6}$$ 1 BOD

tj. $c + \frac{1}{d} = 19 + \frac{1}{6}$

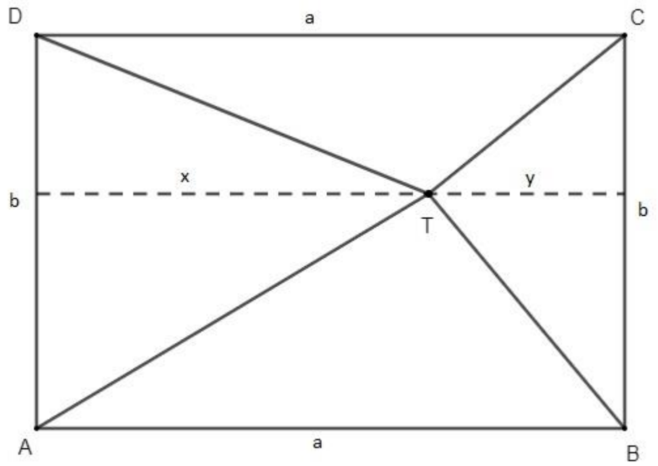
pa je $c = 19$. 2 BODA

Konačno iz $\frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ zaključujemo da je $d = 6$. 2 BODA

……………………………………………………………..………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Unutar pravokutnika $ABCD$ nalazi se točka T. Spoji li se točka T s vrhovima pravokutnika, pravokutnik će biti podijeljen na četiri trokuta. Površine triju od tih trokuta su 15 cm^2, 54 cm^2 i 75 cm^2. Odredi sve moguće površine pravokutnika $ABCD$.

Rješenje.
Skica:



Označimo redom površine trokuta ΔATD s P_1, ΔABT s P_2, ΔBCT s P_3, te ΔCDT s P_4.
Nacrtajmo visine iz vrha T u ΔATD i ΔBCT, te ih označimo x, odnosno y.
Tada vrijedi da je $a = x + y$. 1 BOD
Nadalje,
$P_1 = \frac{1}{2}bx$, $P_3 = \frac{1}{2}by$. 1 BOD
Zbrajanjem površina P_1 i P_3 dobivamo sljedeću jednakost:
$P_1 + P_3 = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}by$ 1 BOD
$= \frac{1}{2}b(x + y)$
$= \frac{1}{2}ba$
$= \frac{1}{2}P_{ABCD}$ 1 BOD
Nadalje zaključujemo da je $P_2 + P_4 = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. 1 BOD
Označimo četvrtu nepoznatu površinu jednog od trokuta s Q. Tada imamo 3 mogućnosti:

I. 15 + 54 = 75 + Q
II. 15 + 75 = 54 + Q
III. 54 + 75 = 15 + Q

Prvi slučaj otpada jer je 15 + 54 < 75, a time i 15 + 54 < 75 + Q. 1 BOD
Iz drugog slučaja imamo Q = 36 cm^2. 1 BOD
Iz trećeg slučaja imamo Q = 114 cm^2. 1 BOD
Dakle, zadatak ima dva rješenja, to jest postoje dva pravokutnika koji zadovoljavaju zadane uvjete.
Površine tih pravokutnika su 15 + 54 + 75 + 36 = 180 cm^2 i 15 + 54 + 75 + 114 = 258 cm^2. 2 BODA
……………………………………………………………..………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Učenik koji napiše samo jedno točno rješenje treba, u skladu s bodovanjem, dobiti 7 BODOVA. Učenik koji nije pokazao da jedno rješenje nije moguće, treba dobiti 9 BODOVA.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $(a+6)(b+5) = 3ab$.

Prvo rješenje.

$ab + 5a + 6b + 30 - 3ab = 0$ 1 BOD

$-2ab + 5a = -6b - 30 / \cdot (-1)$

$2ab - 5a = 6b + 30$

$a(2b - 5) = 6b + 30$ 1 BOD

$a = \frac{6b+30}{2b-5}$

$a = \frac{3(2b-5)+15+30}{2b-5}$

$a = 3 + \frac{45}{2b-5}$ 1 BOD

$a \in N \Leftrightarrow \frac{45}{2b-5} \in N \Leftrightarrow 2b - 5 \in \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ 2 BODA

$\Leftrightarrow 2b \in \{6, 8, 10, 14, 20, 50\}$

$\Leftrightarrow b \in \{3, 4, 5, 7, 10, 25\}$ 1 BOD

$\Leftrightarrow \frac{45}{2b-5} \in \{45, 15, 9, 5, 3, 1\}$ 1 BOD

$\Leftrightarrow a = 3 + \frac{45}{2b-5} \in \{48, 18, 12, 8, 6, 4\}$ 1 BOD

Traženi parovi brojeva su $(48, 3), (18, 4), (12, 5), (8, 7), (6, 10), (4, 25)$. 2 BODA

……………………………………………………….………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako su u odgovoru navedeni svi uređeni parovi učenik dobiva 2 BODA, ako su navedena tri, četiri ili pet uređenih parova dobiva 1 BOD, a ako je navedeno manje od tri uređena para dobiva 0 BODOVA.

Drugo rješenje.

$ab + 5a + 6b + 30 - 3ab = 0$ 1 BOD

$-2ab + 5a + 6b + 30 = 0$

$2ab - 5a - 6b - 30 = 0$

$2ab - 5a - 6b + 15 - 15 - 30 = 0$ 1 BOD

$a(2b - 5) - 3(2b - 5) = 45$

$(a - 3)(2b - 5) = 45$ 1 BOD

Broj 45 se može rastaviti na:

$1 \cdot 45, 3 \cdot 15, 5 \cdot 9, 9 \cdot 5, 15 \cdot 3, 45 \cdot 1$ 2 BODA

Iz $a - 3 = 1$ i $2b - 5 = 45$, dobije se $a = 4$ i $b = 25$. 1 BOD

Analogno se računaju i ostali slučajevi:

Iz $a - 3 = 3$ i $2b - 5 = 15$, dobije se $a = 6$ i $b = 10$.

Iz $a - 3 = 5$ i $2b - 5 = 9$, dobije se $a = 8$ i $b = 7$.

Iz $a - 3 = 9$ i $2b - 5 = 5$, dobije se $a = 12$ i $b = 5$.

Iz $a - 3 = 15$ i $2b - 5 = 3$, dobije se $a = 18$ i $b = 4$.

Iz $a - 3 = 45$ i $2b - 5 = 1$, dobije se $a = 48$ i $b = 3$. 2 BODA

Traženi parovi brojeva su $(48, 3), (18, 4), (12, 5), (8, 7), (6, 10), (4, 25)$. 2 BODA

……………………………………………………….………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako su u odgovoru navedeni svi uređeni parovi učenik dobiva 2 BODA, ako su navedena tri, četiri ili pet uređenih parova dobiva 1 BOD, a ako je navedeno manje od tri uređena para dobiva 0 BODOVA.

5. Niz znamenaka sastoji se od, redom napisana, prva 222 prirodna broja. U tom nizu precrtamo znamenke koje se nalaze na neparnim mjestima. Nakon toga ponovno precrtamo znamenke koje se nalaze na (novim) neparnim mjestima. Taj postupak ponavljamo sve dok ne ostane samo jedna znamenka. Koja će to znamenka biti?

Rješenje.

U nizu se nalazi $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 123 \cdot 3 = 558$ znamenaka. 1 BOD

Nakon prvog precrtavanja ostat će znamenke na drugom, četvrtom, šestom,…, tj. na parnim mjestima.

Nakon drugog precrtavanja ostat će znamenke koje su na početku bile na četvrtom, osmom, dvanaestom,… mjestu. Ostat će one čiji je početni redni broj mjesta djeljiv s $4 = 2^2$.

Nakon trećeg precrtavanja ostat će znamenke čiji je početni redni broj mjesta djeljiv s $8 = 2^3$.

Nakon četvrtog precrtavanja ostat će znamenke čiji je početni redni broj mjesta djeljiv sa $16 = 2^4$.

Može se zaključiti da nakon svakog k-tog precrtavanja, ostaju znamenke čiji je početni redni broj djeljiv s 2^k. 3 BODA

Da bi odredili na kojem se mjestu nalazi znamenka koja će ostati posljednja, potrebno je odrediti najveći mogući prirodni broj k, za koji vrijedi $2^k < 558$.

To se događa za $k = 9$, pri čemu je $2^k = 512$.

Na kraju će ostati znamenka koja se u nizu nalazi na 512. mjestu. 3 BODA

Prvih 9 znamenaka su znamenke od 1 do 9.

Zatim dolazi 180 znamenaka koje čine sve dvoznamenkaste brojeve.

Do 512. znamenke preostaje još $512 - 189 = 323$ znamenke koje čine troznamenkaste brojeve, počevši od broja 100.

Budući da je $323 = 107 \cdot 3 + 2$, tražena znamenka je druga znamenka u 108. troznamenkastom broju.

To je broj 207, a tražena znamenka je znamenka 0. 3 BODA

……………………………………………………………..………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
24. ožujka 2022.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Ako je $x + y = 1$ i $x^2 + y^2 = 2$, koliko je $x^4 + y^4$?

Prvo rješenje.
Kako je $x^2 + y^2 = 2$, možemo tu jednakost napisati u obliku
$(x + y)^2 - 2xy = 2$, 2 BODA

a iz te jednakosti uvrštavanjem $x + y = 1$ dobijemo $xy = -\frac{1}{2}$. 2 BODA

Dalje je $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 =$ 1 BOD

$= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 =$ 1 BOD

$= 2^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$ 1 BOD

$= 4 - 2 \cdot \frac{1}{4} =$ 1 BOD

$= 4 - \frac{1}{2} =$ 1 BOD

$= 3\frac{1}{2}$ $(= 3.5 = \frac{7}{2})$. 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Zadatak se može riješiti pomoću kvadratne jednadžbe.
Iz $x + y = 1$ slijedi $y = 1 - x$.
Tada je $x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1$. 1 BOD
Iz $x^2 + y^2 = 2$ slijedi
$2x^2 - 2x + 1 = 2$,
odnosno
$2x^2 - 2x - 1 = 0$. 1 BOD

Upotpunimo lijevu stranu jednadžbe na potpun kvadrat i tako nađimo rješenja jednadžbe.

$2(x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{3}{2} = 0$

1 BOD

$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

1 BOD

Za $x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ je

$$y_1=1-x_1=1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{2-1-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

a za $x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ je

$$y_2=1-x_2=1-\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{2-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

1 BOD

Kako su rješenja simetrična, za oba slučaja vrijedi

$$x^4+y^4=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^4=\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2+\left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2=$$

1 BOD

$$=\left(\frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}\right)^2+\left(\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4}\right)^2=\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

1 BOD

$$=\frac{16+16\sqrt{3}+12}{16}+\frac{16-16\sqrt{3}+12}{16}$$

1 BOD

$$=\frac{56}{16}=\frac{7}{2}\left(=3.5=3\frac{1}{2}\right).$$

2 BODA

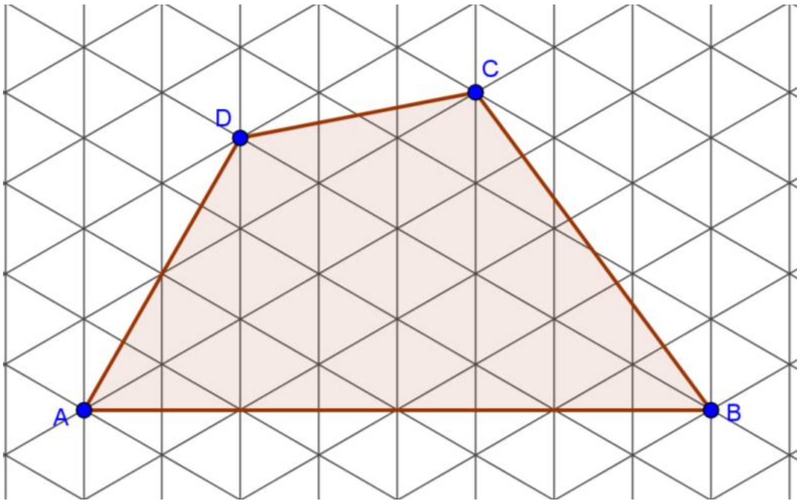
………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Iako kvadratna jednadžba nije u kurikulumu osnovne škole, ako učenik riješi zadatak koristeći formulu za rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

rješenje mu se mora priznati.

2. Mreža je konstruirana od niza paralelnih pravaca tako da je udaljenost bilo koja dva najbliža sjecišta uvijek jednaka 1 m. Izračunaj opseg i površinu četverokuta *ABCD*.



Rješenje.

Budući da se mreža sastoji od jednakostraničnih trokuta duljine stranice 1 m, visina jednog trokuta je

$v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m. 1 BOD

Uočavamo da je:

$|AB|=8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ m, 1 BOD

$|AD|=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ m. 1 BOD

Duljinu dužine $\overline{BC}$ nalazimo pomoću Pitagorinog poučka:

$$|BC|^2=3.5^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{49}{4}+\frac{27}{4}$$

$$=\frac{76}{4}=19$$

$|BC|=\sqrt{19}$ m. 1 BOD

Duljinu dužine $\overline{CD}$ nalazimo također pomoću Pitagorinog poučka:

$$|CD|^2=0.5^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{27}{4}$$

$$=\frac{28}{4}=7$$

$|CD|=\sqrt{7}$ m. 1 BOD

Opseg četverokuta je $O=6\sqrt{3}+\sqrt{19}+\sqrt{7}$ m. 1 BOD

Da bismo izračunali **površinu**, podijelimo četverokut na dva trokuta: ΔABD i ΔBCD (**prvi način**).
Površina trokuta ΔABD je

$$P_1 = \frac{4\sqrt{3}\cdot 3}{2},$$

pa je $P_1 = 6\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

Duljina visine trokuta ΔBCD na stranicu $\overline{BD}$ je $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ m. 1 BOD

Površina trokuta ΔBCD je

$$P_2 = \frac{6\cdot\sqrt{3}}{2},$$

pa je $P_2 = 3\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

Površina četverokuta *ABCD* je $P = 9\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

…………………………..…………………………………………….....….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Površinu možemo izračunati i na sljedeće načine.

Drugi način. Ukoliko se nacrtaju okomice iz točaka *D* i *C* na stranicu $\overline{AB}$, onda se četverokut dijeli na dva pravokutna trokuta i trapez.

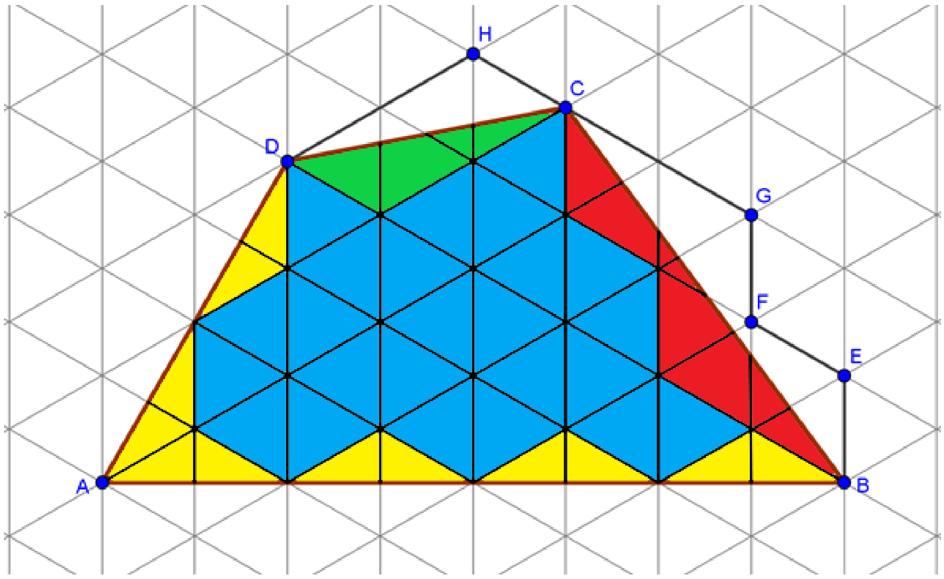
Površina manjeg pravokutnog trokuta je $P_1 = \dfrac{3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$, pa je $P_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

Površina većeg pravokutnog trokuta je $P_2 = \dfrac{3.5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{7}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{21}{8}\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

Površina trapeza je $P_3 = \dfrac{(3+3.5)\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{13}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{39}{8}\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

Površina četverokuta *ABCD* je $P = P_1 + P_2 + P_3 = 9\sqrt{3}\ \text{m}^2$. 1 BOD

Treći način. Promotrimo sliku.



Površina četverokuta *ABCD* jednaka je zbroju površina:

- 24 jednakostranična trokuta (obojena plavom bojom) koje tvori mreža,
- 12 sukladnih pravokutnih trokuta (obojenih žutom bojom),
- trokuta (obojenog zelenom bojom) sukladnog trokutu ΔDCH
- i mnogokuta (obojenog crvenom bojom) sukladnog mnogokutu *CBEFG*. 1 BOD

Površina 'plavog' jednakostraničnog trokuta je $P_1 = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m}^2$. 1 BOD

Površina jednog 'žutog' pravokutnog trokuta je jednaka polovini površine 'plavog' jednakostraničnog trokuta, pa 12 'žutih' trokuta ima površinu kao 6 'plavih'.
'Zeleni' trokut (kao i trokut ΔDCH) ima površinu kao 2 'plava' trokuta.
'Crveni' mnogokut (kao i mnogokut *CBEFG*) ima površinu kao 4 'plava' trokuta. 1 BOD

Stoga četverokut *ABCD* ima površinu kao $24 + 6 + 2 + 4 = 36$ jednakostraničnih 'plavih' trokuta, odnosno

$$P = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2.$$

1 BOD

3. Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva zapisanih pomoću devet različitih znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ takvih da je svaki troznamenkasti broj koji formiraju tri uzastopne znamenke tog broja djeljiv s 3?

Prvo rješenje.
Znamenke 1, 4 i 7 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3.
Znamenke 2, 5 i 8 daju ostatak 2 pri dijeljenju s 3.
Znamenke 3, 6 i 9 daju ostatak 0 pri dijeljenju s 3. 1 BOD

Troznamenkast broj je djeljiv s 3 ako i samo ako njegove znamenke

- sve daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 ili
- sve daju različite ostatke pri dijeljenju s 3.

Ako bi za traženi deveteroznamenkasti broj vrijedilo da mu npr. prve tri znamenke daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, onda bi i četvrta znamenka morala dati isti ostatak pri dijeljenju s 3, što nije moguće.

Zato ostaci koje znamenke traženog broja daju pri dijeljenju s 3 formiraju niz:

$$a\ b\ c\ a\ b\ c\ a\ b\ c,$$

pri čemu su a, b i c različiti elementi skupa $\{0,1,2\}$. 2 BODA

Od ostataka 0, 1 i 2 može se formirati niz abc na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. 1 BOD
Znamenke koje daju ostatak a se mogu ispremještati na 6 načina. 1 BOD
Znamenke koje daju ostatak b se mogu ispremještati na 6 načina. 1 BOD
Znamenke koje daju ostatak c se mogu ispremještati na 6 načina. 1 BOD
Dakle, brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka ima $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$. 3 BODA
……………………………..…………………………………………………..….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik primjerice ne uračunava broj načina na koji se može ispermutirati niz 012 te dobije rezultat $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ ili primjerice ima rezultat $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ (ili napravi neku sličnu pogrešku, ali zna da dobivene brojeve treba pomnožiti), treba dobiti 2 od zadnja 3 BODA.

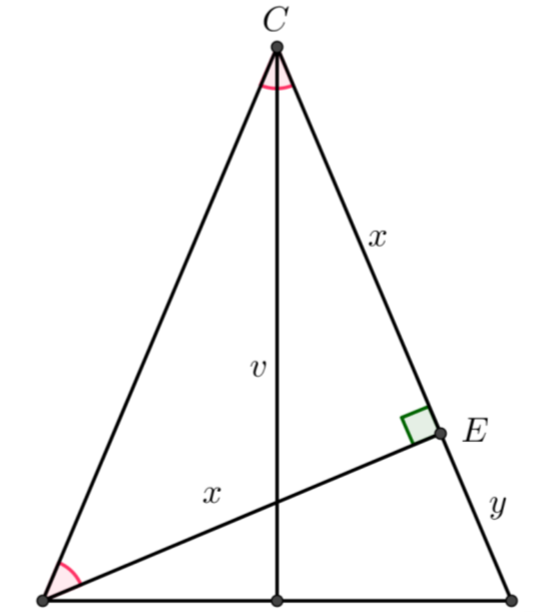
Drugo rješenje.
Prva 3 BODA kao u prvom rješenju!

Prvu znamenku s lijeva možemo birati na 9 načina, drugu na 6 načina (jer znamenku biramo među onih šest koje ne daju isti ostatak kao i prva znamenka), 1 BOD
treću na 3 načina (jer znamenku biramo među one tri koje ne daju isti ostatak kao i prva znamenka i druga znamenka), 1 BOD
četvrtu, petu i šestu na 2 načina svaku (jer ih biramo između preostale dvije znamenke poznatog ostatka pri dijeljenju s 3, 1 BOD
a onda su sedma, osma i deveta znamenka određene jednoznačno. 1 BOD
Zato brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka ima $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1296$. 3 BODA
…………………………..…………………………………………….....……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik primjerice dobro računa broj načina na koji se mogu odabrati prva, druga i treća znamenka, ali primjerice pogrešno računa broj načina na koji se mogu odabrati četvrta, peta i šesta znamenka (ili napravi neku sličnu pogrešku, ali zna da dobivene brojeve pomnožiti), treba dobiti 2 od zadnja 3 BODA.

4. Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta ima duljinu $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Ako je mjera kuta nasuprot osnovici jednaka 45°, kolika je duljina visine na krak tog trokuta?

Rješenje.
Neka je $\overline{AB}$ osnovica jednakokračnog trokuta ΔABC i $|\angle ACB| = 45°$.
Skica:



Označimo s D nožište visine iz vrha C. Tada je $v = |CD| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.
Neka je E nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$.
Trokut ΔAEC je pravokutan, a kako je $|\angle ACB| = 45°$, slijedi $|\angle EAC| = 180° - (90° + 45°) = 45°$.
1 BOD

Dakle, trokut ΔAEC je jednakokračan, pa je $|AE| = |EC| = x$.
Dalje, prema Pitagorinom poučku je $|AC| = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$. 1 BOD

Neka je $|BE| = y$.
Kako je ΔABC jednakokračan, slijedi $x + y = x\sqrt{2}$.
Odavde je $y = x\sqrt{2} - x = x(\sqrt{2} - 1)$. 1 BOD
Trokut ΔABE je također pravokutan i vrijedi $|AB|^2 = x^2 + y^2$ (Pitagorin poučak). 1 BOD
S druge strane je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + x^2(\sqrt{2} - 1)^2 \\ &= x^2 + x^2(2 - 2\sqrt{2} + 1) \\ &= x^2 + x^2(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= x^2(1 + 3 - 2\sqrt{2}) \\ &= x^2(4 - 2\sqrt{2}), \end{aligned}$$ 1 BOD

pa je $|AB| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2(4 - 2\sqrt{2})} = x\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = x\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. 1 BOD
Površina trokuta ΔABC je
$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}|BC| \cdot x$.
Odavde slijedi
$|AB| \cdot v = |BC| \cdot x$ 1 BOD
$x\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = x\sqrt{2} \cdot x \;/ : x\sqrt{2}$ 1 BOD
$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = x$ 1 BOD
$x = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})}$
$x = \sqrt{4 - 2}$
Duljina visine na krak je $x = \sqrt{2}$. 1 BOD
…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Nakon što izračuna $|AB|$, učenik može *x* dobiti primjenom **Pitagorinog poučka**.
U pravokutnom trokutu ΔADC vrijedi

$$|AC|^2 = v^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2,$$

1 BOD

odnosno

$$\left(x\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)^2.$$

1 BOD

Dalje je:

$$2x^2 = 2 + \sqrt{2} + \frac{2x^2(2 - \sqrt{2})}{4}$$

1 BOD

$$2x^2 = 2 + \sqrt{2} + x^2 - \frac{x^2\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} - \frac{x^2\sqrt{2}}{2} \;/ \cdot 2$$

$$2x^2 = 4 + 2\sqrt{2} - x^2\sqrt{2}$$

$2x^2 + x^2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$
$x^2(2+\sqrt{2}) = 2(2+\sqrt{2})$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}.$ 1 BOD

Napomena 2: Nakon što izračuna $|AB|$, učenik može x dobiti primjenom **sličnosti trokuta**.
Trokuti ΔADC i ΔABE su slični prema K-K poučku o sličnosti (jer je $|\angle CDA| = |\angle AEB| = 90°$ i $|\angle DAC| = |\angle EBA| = 90° - 22.5° = 67.5°$). 1 BOD
Tada je

$$\frac{|AB|}{2} : v = y : x,$$

odnosno

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} : \sqrt{2+\sqrt{2}} = x \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) : x.$$

1 BOD

Slijedi:

$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) \qquad / \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$

1 BOD

$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2-\sqrt{2}\right) = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)$
$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2-\sqrt{2}\right) = \sqrt{4-2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)$
$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)$
$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2-\sqrt{2}\right) = 2-\sqrt{2}$
$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
$x = \sqrt{2}.$ 1 BOD

5. Dokaži da ne postoje neparni prirodni brojevi a i b čiji su umnožak i zbroj kvadrati nekih dvaju prirodnih brojeva.

Prvo rješenje.
Pretpostavimo da postoje neparni prirodni brojevi a i b takvi da je $a + b = m^2$ i $a \cdot b = n^2$, za prirodne brojeve m i n. 1 BOD
Kako su a i b neparni, onda je $a + b$ paran broj.
Kako su a i b neparni brojevi, onda je $a \cdot b$ neparan broj. 1 BOD

Zbrojimo umnožak i zbroj brojeva a i b:
$a + b + ab = m^2 + n^2.$ 1 BOD

Kako su a i b neparni, oni su oblika $a = 2x + 1$ i $b = 2y + 1$, pri čemu su x i y prirodni brojevi ili 0.

Kako je $a + b$ paran, on je oblika $m = 2t$, gdje je t prirodan broj, a $a \cdot b$ neparan, on je oblika $n = 2s + 1$, gdje je s prirodan broj ili 0 pa imamo

$2x+1+2y+1+(2x+1)(2y+1)=(2t)^2+(2s+1)^2$ 2 BODA

$2x+2y+2+4xy+2x+2y+1=4t^2+4s^2+4s+1$ 2 BODA

$4x+4y+4xy+3=4t^2+4s^2+4s+1$

$4x+4y+4xy+2=4t^2+4s^2+4s\ /:2$

$2x+2y+2xy+1=2t^2+2s^2+2s$

$2(x+y+xy)+1=2(t^2+s^2+s)$ 2 BODA

Budući da smo dobili da je neki neparan broj jednak nekom parnom broju, zaključujemo da je to nemoguće. 1 BOD

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da postoje neparni prirodni brojevi a i b takvi da je $a+b=m^2$ i $a\cdot b=n^2$, za prirodne brojeve m i n. 1 BOD

Kako su a i b neparni, onda je $a+b$ paran pa m^2 mora biti djeljiv s 4, jer je paran broj oblika $(2j)^2=4j^2$, pri čemu je j prirodan broj. 2 BODA

Da bi m^2 bio djeljiv s 4, jedan od brojeva a i b mora biti oblika $4k-1$, a drugi oblika $4l-3$, pri čemu su k i l prirodni brojevi, jer su a i b neparni. 2 BODA

No, tada je i $a\cdot b=(4k-1)\cdot(4l-3)$, 1 BOD

što je broj koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 1 BOD

te ne može biti kvadrat prirodnog broja jer kvadrat neparnog prirodnog broja uvijek daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4:

$(2i-1)^2=4i^2-4i+1=4\cdot(i^2-i)+1.$ 2 BODA

Time smo došli do kontradikcije i dokazali smo tvrdnju. 1 BOD

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA