

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

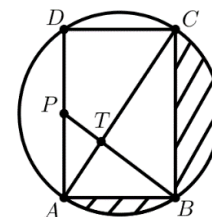
1. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

1. Ako je $A = 456 + 457 + 458 + \dots + 554 + 555$ i $B = 0.04^3 \cdot \frac{1}{25^2} \cdot 125^4$, koliko je $\frac{A}{B}$?
2. Dvije cijevi napune bazen za 4 sata. Samo jedna od tih cijevi napuni bazen za 5 sati i 15 minuta. Koliko vremena treba da se bazen napuni samo drugom cijevi?
3. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\frac{35}{2n-5}$ cijeli broj.
4. S polazne tramvajske stanice u 5 sati ujutro kreću tri tramvaja. Prvome tramvaju treba 1 sat i 30 minuta da se vrati na polaznu stanicu, drugome 1 sat, a trećemu 40 minuta. U koliko će se sati sva tri tramvaja naći ponovo u isto vrijeme na polaznoj stanici? Koliko će se to puta dogoditi istoga dana ako tramvaji voze od 5 sati ujutro do 24 sata navečer (ne računajući prvi polazak u 5 sati ujutro)?
5. U novome postavu nekoga muzeja svaki je eksponat numeriran redom brojevima 1, 2, 3, 4, ... Ako su za numeriranje svih eksponata upotrijebljene ukupno 2022 znamenke, koliko eksponata ima novi postav muzeja?

* * *

6. Pravokutniku $ABCD$ opisana je kružnica. Točka P polovište je stranice \overline{AD} . Dužina \overline{BP} siječe dijagonalu \overline{AC} u točki T . Ako je $|BT| = 10$ cm i $|AP| = 9$ cm, kolika je površina osjenčanoga dijela na slici?



7. Dva Talijana i tri Engleza traže smještaj u hotelu kao vjerni gosti. U hotelu za smještaj svojih vjernih gostiju čuvaju 8 soba, od čega su u 3 sobe zidovi obojeni plavom bojom, u 3 sobe zelenom bojom, a u preostale 2 sobe žutom bojom. Talijani žele biti ili u plavoj ili u žutoj sobi, a Englezi ili u zelenoj ili u žutoj sobi. Na koliko se načina dvojici Talijana i trojici Engleza mogu dodijeliti sobe tako da svatko od njih bude sam u jednoj sobi?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

1. Izračunajte $\sqrt{1 - A^{-1}}$ ako je $A = \frac{\sqrt{2022} + 1}{\sqrt{2022} - 1} - \frac{2}{\sqrt{2022} + 1}$.
2. Filip je provjeravao rezultate množenja prirodnih brojeva svoje mlađe sestre Barbare. U jednom je zadatku primijetio da je Barbara u rezultatu napisala znamenku stotica za jedan veću nego što je točno. Prilikom provjere podijelio je Barbarin umnožak s većim faktorom i dobio količnik 24 i ostatak 12. Koja je dva broja množila Barbara ako im je razlika 2?
3. Grafovi dviju linearnih funkcija imaju nagibe 3 i $\frac{1}{3}$, a sijeku se u točki (3, 3). Odredite površinu trokuta koji je omeđen tim grafovima i osi x .
4. Andro i Leo pogađaju četveroznamenkasti broj koji je onaj drugi zamislio. Pri tome moraju otkriti neke podatke o svom broju. Androv broj ima sve znamenke različite te su mu prva i zadnja znamenka neparni brojevi. Leov broj ne mora imati sve znamenke različite, ali sve su mu znamenke iste parnosti i različite od 0. Prema otkrivenim podacima, tko ima veće šanse pogoditi broj koji je onaj drugi zamislio?
5. Od žice duljine 4.5 metra treba napraviti šest ukrasa, tri u obliku pravilnog šesterokuta i tri u obliku jednakostraničnog trokuta. Svi šesterokuti, odnosno trokuti su međusobno sukkladni. Odredite duljine stranica šesterokuta i trokuta tako da zbroj površina svih likova bude minimalan, a cijela žica upotrebljena.

* * *

6. Riješite sustav jednačbi:

$$\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{1}{4y^2 + 3y} = -\frac{2}{3},$$
$$\frac{3}{x^2 + 2x} + \frac{2}{4y^2 + 3y} = 3.$$

7. Pravac koji prolazi vrhom C pravog kuta trokuta ABC s kraćom katetom zatvara kut od 30° i dijeli hipotenuzu u omjeru 1 : 2. Ako je duljina kraće katete $\sqrt{3}$, odredite duljinu hipotenuze.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

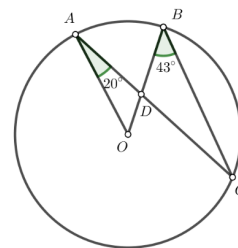
ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

1. Izračunajte: $\frac{1}{\left(337^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{337} - \sqrt{6}}{337^{\frac{3}{2}} - 6^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}$.
2. Ako je $\log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = \log_3 [\log_2 (\log_4 y)] = \log_4 [\log_3 (\log_2 z)] = 0$, izračunajte $\log_y (\log_z x)$.

3. Točke A , B i C nalaze se na kružnici sa središtem u točki O , kao na slici. Tetiva \overline{AC} siječe polumjer \overline{OB} u točki D . Odredite mjeru kuta $\sphericalangle BDA$ ako je $\sphericalangle OAC = 20^\circ$, $\sphericalangle OBC = 43^\circ$.



4. Matko je pripremajući se za natjecanje otkrio knjižaru s dobrom matematičkom literaturom. Knjižara nudi 7 različitih knjiga sa zadacima samo iz geometrije, 4 samo iz teorije brojeva, 5 samo iz kombinatorike. Nadalje, u ponudi su i knjige sa zadacima iz točno dva područja. Tako je 6 različitih knjiga sa zadacima iz teorije brojeva i kombinatorike te 7 sa zadacima iz geometrije i kombinatorike. Na koliko načina Matko može odabrati literaturu iz dva od svih navedenih područja ako može kupiti najviše dvije knjige?
5. Ako je $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, koliko je $(\sin x - \cos x)^{10}$?

* * *

6. Zadan je pravokutnik sa stranicama duljina a i b , $a = \frac{4}{7}b$. Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana točka zadanog pravokutnika bude bliža kraćoj stranici i da je od nje udaljena za manje od $\frac{a}{8}$.
7. Duljine stranica tetivnog četverokuta $ABCD$ su $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|CD| = 5$ cm i $|DA| = 6$ cm. Odredite kosinuse šiljastih kutova i površinu četverokuta $ABCD$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

1. Riješite jednadžbu $\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2\left(\frac{x-1}{3}\right) = 7(x-1)$.
2. Odredite najmanji prirodan broj m za koji je umnožak $3^{\frac{1}{55}} \cdot 3^{\frac{4}{55}} \cdot 3^{\frac{7}{55}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{3m-2}{55}}$ veći od 729?
3. Središte kružnice koja prolazi točkama $A(0, 5)$ i $B(0, -1)$ nalazi se na pravcu $y = 2x - 6$. Odredite tangens manjeg obodnog kuta nad tetivom \overline{AB} .
4. Na ekipnom natjecanju iz matematike sudjeluje 5 timova. Svaki se tim sastoji od 3 učenika među kojima je i vođa tima. Svih 5 timova sjedi za istim okruglim stolom, tako da učenici iz istog tima sjede zajedno, jedan kraj drugoga, a vođa tima je uvijek između članova svojeg tima. Koliko je ukupno različitih razmještaja za okruglim stolom? (Razmještaje smatramo istima ako se jedan od drugog mogu dobiti rotacijom. Razmještaji su različiti ako postoji par osoba koje u jednom razmještaju sjede jedna lijevo od druge, a u drugom to nije istina.)
5. Dekadski zapis broja N završava s 2022. Ako se obrišu zadnje 4 znamenke, broj koji ostaje je djelitelj broja N . Primjerice, ako se broju 22022 obrišu zadnje 4 znamenke, ostaje broj 2, a on je djelitelj broja 22022. Odredite zbroj znamenaka svih brojeva N s opisanim svojstvom.

* * *

6. Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2022 za koje je $\left(\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2\cos\frac{\pi}{8} - 2i\sin\frac{\pi}{8}}\right)^n$ realan broj?
7. Neka su a, b i c uzastopni članovi geometrijskog niza. Ako je $a+b+c = \frac{7}{3}$ i $a^2+b^2+c^2 = \frac{91}{9}$, odredite a, b i c .

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.