Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

1. Dokaži da je broj $6^{2022} - 2^{2022}$ djeljiv s 2^{2025}.

2. Tea je umijesila tijesto od tri sastojka: brašna, vode i jaja. Masa brašna u tijestu prema masi vode odnosi se kao $7 : 2$, dok se masa vode prema masi jaja odnosi kao $5 : 2$. Ukupna masa tijesta je 1470 grama. Odredi mase svakog od sastojaka.

3. Dva sukladna kvadrata sa stranicama duljine $1 + \sqrt{2}$ imaju isto središte, a njihov presjek je pravilni osmerokut. Kolika je površina tog osmerokuta?

4. Za realne brojeve a, b i c vrijedi $a+b+c = 0$ i $abc = 4$. Odredi vrijednost izraza $a^3+b^3+c^3$.

5. Na stolu se nalazi hrpa s 1001 kamenčićem. U svakom koraku Matko odabire neku hrpu koja sadrži više od tri kamenčića, uklanja jedan kamenčić i podijeli ostatak kamenčića na dvije (ne nužno jednake) hrpe. Može li Matko nizom ovakvih koraka postići da u svakoj hrpi budu točno tri kamenčića?

* * *

6. U trokutu ABC s težištem T vrijedi $|AT| = |BC|$ i $\sphericalangle BCT = 30°$. Odredi $|CT| : |AT|$.

7. Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva za koje je $m(m - 4n) = n - 4$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

1. Koliko je cijelih brojeva n za koje nejednakost $x^2 + nx + 100 > 0$ vrijedi za sve realne brojeve x?

2. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{9-5x} - \sqrt{3-x} = \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

3. Sir se nalazi u točki $(13, 13)$, a miš trči pravocrtno od točke $(4, -2)$ do točke $(-1, 23)$. U kojoj se točki miš nalazi najbliže siru?

4. Pet strana drvene kocke obojano je plavom bojom dok je jedna strana neobojana. Kocka je potom razrezana na sukladne manje kockice od kojih 649 ima točno jednu plavu stranu. Koliko je manjih kockica koje imaju točno dvije plave strane?

5. Dan je kvadrat $ABCD$. Neka je E točka na polupravcu AB takva da je $\sphericalangle AED = 27°$. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DE}$ sijeku se u točki S. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle BSE$.

* * *

6. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a < b$ i neka je $S = \{a^2, a^2+1, a^2+2, \ldots, b^2\}$. Odredi sve parove brojeva a i b za koje je među elementima skupa S točno 1 % kvadrata prirodnih brojeva.

7. Kvadratna jednadžba $x^2 + bx + c = 0$ ima realna rješenja čiji je zbroj kvadrata jednak 2. Odredi sve moguće vrijednosti izraza $b + c$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

1. Ako je $\cos x + \sin x = 0.3$, odredi $\cos^3 x + \sin^3 x$.

2. Odredi realne brojeve a i b tako da skup vrijednosti funkcije $f(x) = 2022^{-2(x-2a)(x+a)} + 1$ bude interval $\langle b, 2023]$.

3. Kvadrat $ABCD$ površine 36 smješten je u koordinatnu ravninu tako da je stranica $\overline{AB}$ paralelna s y-osi, a točke A, B i C redom pripadaju grafovima funkcija $f(x) = 3\log_a x$, $g(x) = 2\log_a x$ i $h(x) = \log_a x$. Odredi broj a.

4. Za koliko je prirodnih brojeva n vrijednost razlomka

$$\frac{n+2022}{n-3}$$

cijeli broj?

5. Kocka $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 presječena je sferom. Središte sfere je točka S na dužini $\overline{AD}$ takva da je $|AS| = \sqrt{3} - 1$. Sfera prolazi točkama C i D', te siječe bridove $\overline{AB}$ i $\overline{AA'}$.

Odredi površinu onog dijela oplošja kocke koji se nalazi unutar te sfere.

* * *

6. Neka su a, b i c redom duljine stranica trokuta nasuprot kutova veličina α, β i γ. Ako vrijedi $9a^2 + 9b^2 = 19c^2$, odredi $\dfrac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

7. Na koliko načina se u tablicu 3×3 mogu upisati brojevi od 1 do 9 tako da zbrojevi brojeva u svakom retku, u svakom stupcu i na svakoj dijagonali budu djeljivi s 3?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je $z^2 = (1+i)\cdot\overline{z}$.

2. Pet međusobno različitih realnih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a njihov zbroj iznosi 50. Odredi te brojeve ako su brojevi a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza.

3. Za kompleksne brojeve p i q vrijedi $p+q=5$ i $p^2+q^2=9$. Dokaži da je p^n+q^n neparan cijeli broj za sve $n \in \mathbb{N}$.

4. Kružnica prolazi točkama $A(0,5)$ i $B(0,-1)$, a njeno središte pripada pravcu $y = 2x-6$. Odredi sinus obodnog kuta nad manjim lukom $\widehat{AB}$ te kružnice.

5. Od 27 sukladnih bijelih kockica sastavljena je kocka te su sve njene vanjske strane obojene crno.

(a) Slučajno je odabrana jedna od tih kockica i postavljena na stol na slučajno odabranu stranu. Kolika je vjerojatnost da svih pet vidljivih strana kockice bude bijele boje?

(b) Na stolu se nalazi kockica kojoj je svih pet vidljivih strana bijele boje. Kolika je vjerojatnost da je i šesta strana te kockice bijela?

* * *

6. Izračunaj
$$\sum_{k=1}^{1011} \binom{2022}{2k-1} 2^{2k-1}.$$

7. U ovisnosti o prostom broju p odredi sve parove (m,n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu
$$m^2 = n^2 - 4np + 3p^2.$$

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.