ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Dokaži da je broj $6^{2022} - 2^{2022}$ djeljiv s 2^{2025}.

Prvo rješenje.

Uočimo da je $6^{2022} = 2^{2022} \cdot 3^{2022}$, odnosno $6^{2022} - 2^{2022} = 2^{2022}\left(3^{2022} - 1\right)$. 1 bod

Kako je $2^{2025} = 2^{2022} \cdot 2^3$, preostaje pokazati da je broj $3^{2022} - 1$ djeljiv s $2^3 = 8$. 1 bod

Prema formuli za razliku kvadrata, vrijedi

$$3^{2022} - 1 = (3^{1011} - 1) \cdot (3^{1011} + 1).$$ 1 bod

Iz formula za zbroj i razliku (neparnih) potencija imamo

$$3^{1011} - 1 = (3 - 1) \cdot \left(3^{1010} + 3^{1009} + \cdots + 3^2 + 3 + 1\right),$$ 1 bod

$$3^{1011} + 1 = (3 + 1) \cdot \left(3^{1010} - 3^{1009} + \cdots + 3^2 - 3 + 1\right).$$ 1 bod

Uvrštavanjem slijedi

$$\begin{aligned} 3^{2022} - 1 &= 2 \cdot \left(3^{1010} + \cdots + 1\right) \cdot 4 \cdot \left(3^{1010} - \cdots - 3 + 1\right) \\ &= 8 \cdot \left(3^{1010} + \cdots + 1\right) \cdot \left(3^{1010} - \cdots - 3 + 1\right), \end{aligned}$$

čime je dokazana tvrdnja. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da treba pokazati da je $3^{2022} - 1$ djeljivo s 8. 2 boda

Uočimo da je $3^{2022} = 3^{2 \cdot 1011} = 9^{1011}$. 1 bod

Iz formule za razliku potencija imamo

$$\begin{aligned} 9^{1011} - 1 &= (9 - 1) \cdot \left(9^{1010} + 9^{1009} + \cdots + 9^2 + 9 + 1\right) && \text{2 boda} \\ &= 8 \cdot \left(9^{1010} + \cdots + 1\right), && \text{1 bod} \end{aligned}$$

čime je dokazana tvrdnja.

Napomena: U drugom rješenju, nakon uočavanja $3^{2022} = 9^{1011}$, zadatak je moguće riješiti i uočavajući da broj 9^k uvijek daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8, za sve $k \in \mathbb{N}$.

Zadatak se može riješiti i tako da se faktor 2^{2022} ne izluči na početku rješavanja. Takvo rješenje treba bodovati analogno, tj. početna 2 boda iz gornjih bodovnih shema treba dati rješenju na mjestu gdje se komentira taj faktor.

Zadatak A-1.2.

Tea je umijesila tijesto od tri sastojka: brašna, vode i jaja. Masa brašna u tijestu prema masi vode odnosi se kao $7 : 2$, dok se masa vode prema masi jaja odnosi kao $5 : 2$. Ukupna masa tijesta je 1470 grama. Odredi mase svakog od sastojaka.

Prvo rješenje.

Označimo mase brašna, vode i jaja s x, y i z, redom.

Zadane omjere možemo prikazati, kao $x : y = 7 : 2 = 35 : 10$ i $y : z = 5 : 2 = 10 : 4$, tj. kao razmjer

$$x : y : z = 35 : 10 : 4.$$ 1 bod

Zato možemo pisati $x = 35t$, $y = 10t$ i $z = 4t$, pri čemu je t pozitivan realni broj. 1 bod

Ukupna masa je 1470 grama, tj. vrijedi $35t + 10t + 4t = 1470$. 1 bod

Dakle, imamo $49t = 1470$, tj. $t = 30$. 1 bod

Ukupna masa brašna je $35t = 1050$ g, vode $10t = 300$ g i jaja $4t = 120$ g. 2 boda

Drugo rješenje.

Označimo mase brašna, vode i jaja s x, y i z, redom.

Iz omjera $x : y = 7 : 2$ slijedi da je $x = \frac{7}{2}y$. Slično, iz $y : z = 5 : 2$ slijedi da je $z = \frac{2}{5}y$. 1 bod

Kako je ukupna masa 1470 grama, vrijedi $x + y + z = 1470$. 1 bod

Uvrštavajući izražene vrijednosti u zadnju jednakost, dobivamo

$$\frac{7}{2}y + y + \frac{2}{5}y = 1470,$$ 1 bod

odakle slijedi $\frac{49}{10}y = 1470$, tj. $y = 300$. 1 bod

Uvrštavanjem u početne izraze vidimo da je ukupna masa brašna $x = \frac{7}{2}y = 1050$ grama, ukupna masa vode $y = 300$ grama te ukupna masa jaja $z = \frac{2}{5}y = 120$ grama. 2 boda

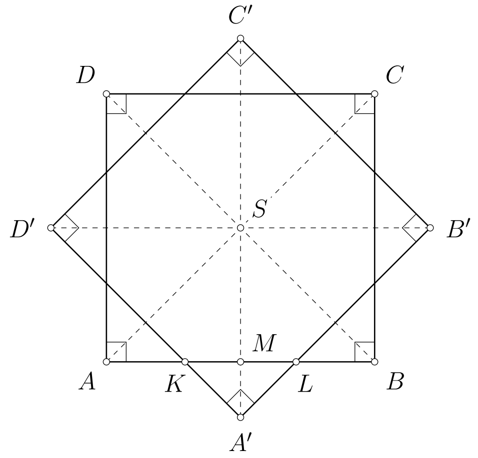
Napomena: Za ovaj zadatak mogući su mnogi načini rješavanja. Svi prate sljedeću strukturu bodovanja: 1 bod za izražavanje oba omjera iz teksta zadatka preko (nekih) varijabli, 1 bod za izražavanje uvjeta ukupne mase preko istih varijabli, 1 bod za sređivanje uvjeta u jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom, 1 bod rješavanje te jednadžbe te 2 boda za određivanje traženih svih masa iz teksta zadatka.

Zadatak A-1.3.

Dva sukladna kvadrata sa stranicama duljine $1+\sqrt{2}$ imaju isto središte, a njihov presjek je pravilni osmerokut. Kolika je površina tog osmerokuta?

Rješenje.

Označimo vrhove kvadrata kao na slici te središte sa S. Označimo s K i L presjeke stranica $\overline{A'D'}$ i $\overline{A'B'}$ sa stranicom $\overline{AB}$, redom, te neka je M presjek dužina $\overline{SA'}$ i $\overline{AB}$.



Uočimo da je površina P traženog osmerokuta jednaka površini kvadrata $ABCD$ umanjenoj za površine četiri međusobno sukladna trokuta sukladnima trokutu $A'LK$.

Odnosno, vrijedi $P = P(ABCD) - 4P(A'LK)$. 1 bod

Dužina $\overline{SA'}$ povezuje središte kvadrata s vrhom kvadrata $A'B'C'D'$, pa je njezina duljina jednaka polovini duljine dijagonale tog kvadrata:

$$|SA'| = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 1 bod

Dužina $\overline{SM}$ povezuje središte kvadrata s polovištem stranice kvadrata $ABCD$, pa njezina duljina iznosi polovinu duljine stranice kvadrata:

$$|SM| = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 1 bod

Trokut $A'LK$ je jednakokračan pravokutan trokut. Duljina visine na hipotenuzu iznosi $|A'M| = |SA'| - |SM| = \dfrac{1}{2}$. 1 bod

Duljina hipotenuze iznosi $|KL| = 2|A'M| = 1$, pa površina trokuta $A'LK$ iznosi

$$P(A'KL) = \frac{1}{2} \cdot |A'M| \cdot |KL| = \frac{1}{4}.$$ 1 bod

Zato je tražena površina osmerokuta jednaka

$$P = P(ABCD) - 4P(A'LK) = (1+\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 + 2\sqrt{2}.$$ 1 bod

Napomena: Tražena površina može se izračunati kao osam površina trokuta SKL, računajući iste duljine dužina kao u navedenom rješenju.

Zadatak A-1.4.

Za realne brojeve a, b i c vrijedi $a+b+c=0$ i $abc=4$. Odredi vrijednost izraza $a^3+b^3+c^3$.

Prvo rješenje.

Iz prve jednakosti slijedi $a+b=-c$, odnosno $(a+b)^3=-c^3$. 1 bod

Primjenom formule za zbroj kubova, imamo

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3 \qquad \text{1 bod}$$

$$a^3+3ab\,(a+b)+b^3=-c^3 \qquad \text{1 bod}$$

$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b). \qquad \text{1 bod}$$

Iz $a+b=-c$ imamo $ab(a+b)=-abc=-4$. 1 bod

Zato konačno imamo $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=(-3)\cdot(-4)=12$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvedimo oznaku

$$S=a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b. \qquad \text{1 bod}$$

Uočimo da vrijedi

$$0=(a+b+c)(ab+bc+ca)=S+3abc, \qquad \text{1 bod}$$

te

$$0=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=S+a^3+b^3+c^3. \qquad \text{1 bod}$$

Oduzimajući te dvije jednakosti, dobivamo

$$a^3+b^3+c^3=3abc. \qquad \text{2 boda}$$

Zato je $a^3+b^3+c^3=3\cdot 4=12$. 1 bod

Zadatak A-1.5.

Na stolu se nalazi hrpa s 1001 kamenčićem. U svakom koraku Matko odabire neku hrpu koja sadrži više od tri kamenčića, uklanja jedan kamenčić i podijeli ostatak kamenčića na dvije (ne nužno jednake) hrpe. Može li Matko nizom ovakvih koraka postići da u svakoj hrpi budu točno tri kamenčića?

Rješenje.

Označimo s A_k broj kamenčića nakon k-tog koraka, a s B_k broj hrpi nakon k-tog koraka. Na početku imamo $A_0=1001$ i $B_0=1$. 1 bod

Primijetimo da se nakon svakog koraka broj kamenčića smanji za jedan, odnosno $A_{k+1}=A_k-1$. Također, nakon svakog koraka broj hrpi se uveća za jedan, odnosno $B_{k+1}=B_k+1$.

Prema tome, zbroj broja kamenčića i broja hrpi A_k+B_k ostaje nepromijenjen nakon svakog koraka. 2 boda

Posebno, vrijedi $A_k + B_k = A_0 + B_0 = 1002$ za sve vrijednosti k. 1 bod

Pretpostavimo da nakon nekog poteza l imamo n hrpi s točno tri novčića u svakoj. Tada je $A_l = 3n$ i $B_l = n$. Slijedi $A_l + B_l = 4n = 1002$, što nije moguće jer 1002 nije djeljivo s 4. 2 boda

Dolazimo do kontradikcije, pa možemo zaključiti da nije moguće doći do traženog rasporeda kamenčića.

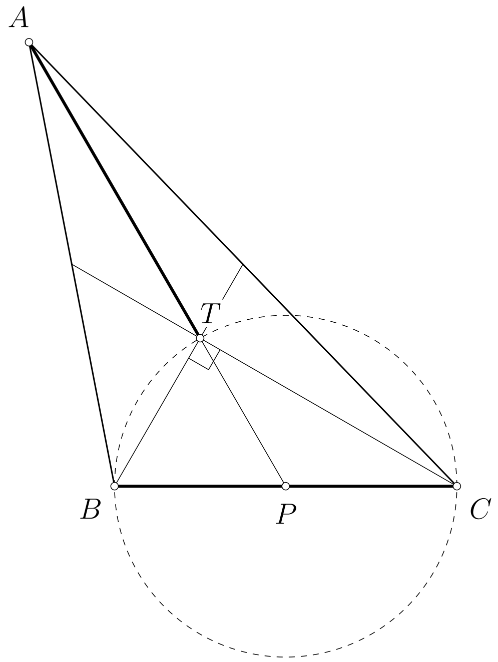
Napomena: Kada bi odgovor na pitanje iz zadatka bio potvrdan, Matko bi u mnogim koracima dijelio neku hrpu s N kamenčića na dvije s $N - 4$ i 3 kamenčića, no ne mora takav potez vršiti u svakom koraku. Zato takav način obrazlaganja ne pokazuje da Matko ne može postići da sve hrpe imaju točno tri kamenčića. Iz tog razloga, sva rješenja koja ne promatraju brojeve A_k, B_k niti sumu $A_k + B_k$ iz gornjeg rješenja vrijede 0 bodova.

Zadatak A-1.6.

U trokutu ABC s težištem T vrijedi $|AT| = |BC|$ i $\sphericalangle BCT = 30°$. Odredi $|CT| : |AT|$.

Rješenje.

Označimo polovište stranice $\overline{BC}$ s P te neka je a duljina dužine $\overline{BC}$.



Iz tvrdnje zadatka vrijedi $|AT| = |BC| = a$.

Budući da je T težište trokuta, iz $|AT| : |PT| = 2 : 1$ slijedi $|PT| = \frac{a}{2}$. 1 bod

Kako je P polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi $|CP| = |BP| = \frac{a}{2}$. Kako je i $|PT| = \frac{a}{2}$, zaključujemo da je polovište stranice $\overline{BC}$ središte opisane kružnice trokutu TBC, pa je zato taj trokut pravokutan. 3 boda

Nadalje, kako je $\sphericalangle BCT = 30°$, a kut $\sphericalangle CTB$ pravi, dobivamo da je kut $\sphericalangle TBC = 60°$. 1 bod

Zajedno s $|CP| = |TP|$, to znači da je trokut BPT jednakostraničan, pa je $|BT| = \frac{a}{2}$. 2 boda

Primjenom Pitagorinog poučka u trokutu CTB imamo

$$|CT| = \sqrt{|BC|^2 - |BT|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$ 2 boda

Konačno, vrijedi $|AT| : |CT| = a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 1 bod

Zadatak A-1.7.

Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva za koje je $m(m - 4n) = n - 4$.

Rješenje.

Sređivanjem danog izraza imamo

$$\begin{aligned} m^2 - 4mn &= n - 4 \\ m^2 + 4 &= n(4m + 1), \end{aligned}$$ 1 bod

odnosno $n = \frac{m^2 + 4}{4m + 1}$. 1 bod

Proširivanjem razlomka s faktorom 16 i nadopunjavanjem brojnika do razlike kvadrata imamo

$$n = \frac{16m^2 + 64}{16 \cdot (4m + 1)} = \frac{16m^2 - 1 + 65}{16 \cdot (4m + 1)} = \frac{(4m + 1)(4m - 1) + 65}{16 \cdot (4m + 1)},$$ 2 boda

odnosno

$$16n = 4m - 1 + \frac{65}{4m + 1}.$$ 2 boda

Kako $\frac{65}{4m + 1}$ mora biti cijeli broj, broj $4m + 1$ treba biti djelitelj broja 65. Kako je $65 = 5 \cdot 13$, jedine mogućnosti za $4m + 1$ su $1, 5, 13$ i 65. 2 boda

Iz $4m + 1 = 1$ slijedi $m = 0$ što nije moguće.

Iz $4m + 1 = 5$ slijedi $m = 1$ i $n = 1$, a iz $4m + 1 = 13$ slijedi $m = 3$ i $n = \frac{3^2 + 4}{4 \cdot 3 + 1} = 1$. 1 bod

Iz $4m + 1 = 65$ slijedi $m = 16$ i $n = \frac{16^2 + 4}{4 \cdot 16 + 1} = 4$. 1 bod

Dakle, svi takvi parovi brojeva (m, n) su $(1, 1)$, $(3, 1)$ i $(16, 4)$.

Napomena: Bodove je moguće dobiti i za pogođena rješenja bez dokaza da su to sva. Za oba para rješenja $(1, 1)$ i $(3, 1)$ dobiva se 1 bod (koji odgovara predzadnjem bodu iz bodovne sheme), te se za par $(16, 4)$ dobiva 1 bod (koji odgovara zadnjem bodu iz bodovne sheme).

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Koliko je cijelih brojeva n za koje nejednakost $x^2 + nx + 100 > 0$ vrijedi za sve realne brojeve x?

Rješenje.

Diskriminanta kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + nx + 100$ je $D = n^2 - 400$. 1 bod

Kako je vodeći koeficijent pozitivan, da bi vrijedila tražena nejednakost, nužno mora biti $D < 0$. 2 boda

Dakle, mora vrijediti nejednakost $n^2 < 400$, tj. $|n| < 20$. 2 boda

Konačno, uvjet zadatka zadovoljavaju cijeli brojevi $-19, -18, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 19$, kojih ukupno ima 39. 1 bod

Napomena: Za zadnji 1 bod iz bodovne sheme nije nužno popisati brojeve n.

Zadatak A-2.2.

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{9-5x} - \sqrt{3-x} = \dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

Rješenje.

Grupirajmo izraze koji uključuju $\sqrt{3-x}$ na jednu stranu jednadžbe, pa ju kvadrirajmo:

$$\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}, \quad /^2$$

$$9 - 5x = 3 - x + 12 + \frac{36}{3-x}, \qquad \text{1 bod}$$

$$-6 - 4x = \frac{36}{3-x}, \quad / \cdot (3-x)$$

$$(-6-4x)(3-x) = 36, \qquad \text{1 bod}$$

$$4x^2 - 6x - 54 = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $x = \frac{9}{2}$ i $x = -3$. 1 bod

Uvrštavajući u početnu jednakost, vidimo da za $x = \frac{9}{2}$ jednakost nije definirana, 1 bod

dok $x = -3$ jest rješenje. 1 bod

Dakle, jedino rješenje jednadžbe je $x = -3$.

Napomena: Umjesto uvrštavanja vrijednosti $x = \frac{9}{2}$ moguće je uvjeriti se da je početna jednadžba definirana za vrijednosti x koje zadovoljavaju $9-5x \geqslant 0$ i $3-x > 0$, odnosno $x \leqslant \frac{9}{5}$. Ta analiza mijenja predzadnji 1 bod iz bodovne sheme. Broj $x = -3$ nužno je uvrstiti unatoč ovoj analizi.

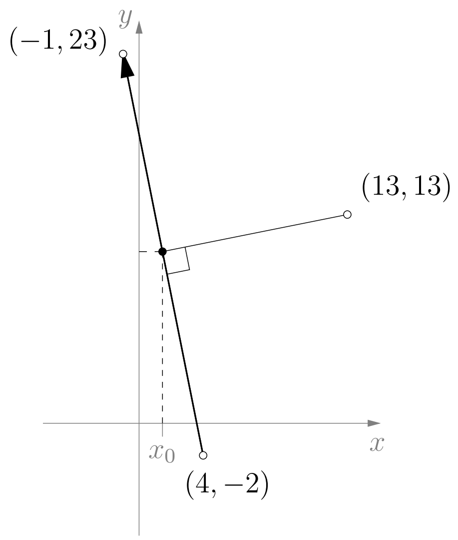
Prvi koraci rješenja mogu se izvesti i drugim redoslijedom: moguće je prvo pomnožiti jednakost s $\sqrt{3-x}$, a zatim kvadrirati sređenu jednakost. Svaki od tih koraka također nosi 1 bod.

Svođenje zadatka na kvadratnu jednadžbu s postupkom ukupno nosi 3 boda. Drugačijim kvadriranjem nego u ovom rješenju (recimo kvadriranjem originalne jednadžbe bez prethodnog sređivanja) moguće je doći do jednadžbe četvrtog stupnja. U takvom rješenju točna jednadžba višeg stupnja vrijedi 2 boda, dok se 1 bod dodjeljuje za opravdanje da nalazak preostalih nultočaka polinoma i opravdanje da oni nisu rješenja početne jednadžbe. Zadnja 3 boda iz gornje bodovne sheme dodjeljuju se na isti način.

Zadatak A-2.3.

Sir se nalazi u točki $(13, 13)$, a miš trči pravocrtno od točke $(4, -2)$ do točke $(-1, 23)$. U kojoj se točki miš nalazi najbliže siru?

Prvo rješenje.



Jednadžba pravca po kojem miš trči je određena točkama $(4, -2)$ i $(-1, 23)$:

$$y - (-2) = \frac{23 - (-2)}{-1 - 4}(x - 4),$$

odakle sređivanjem dobivamo $y = -5x + 18$. 1 bod

Potrebno je odrediti realan broj x takav da se točka $(x, -5x + 18)$ nalazi na dužini određenoj točkama $(4, -2)$ i $(-1, 23)$, te da je udaljenost točaka $(13, 13)$ i $(x, -5x+18)$ najmanja moguća. Udaljenost tih točaka je

$$\sqrt{(x - 13)^2 + (-5x + 18 - 13)^2} = \sqrt{26x^2 - 76x + 194}.$$ 1 bod

Minimum kvadratne funkcije (pod korijenom) postiže se u njezinom tjemenu. 1 bod

Za kvadratnu funkciju $26x^2 - 76x + 194$ minimum se postiže u točki $x_0 = \frac{19}{13}$. 1 bod

Da bi se točka $(x_0, -5x_0 + 18)$ nalazila na dužini, mora vrijediti $-1 \leqslant x_0 \leqslant 4$. Kako zaista vrijedi $-1 \leqslant \frac{19}{13} \leqslant 4$, zaključujemo da je to naš traženi x_0. 1 bod

Konačno, tražena točka je $\left(\frac{19}{13}, \frac{139}{13}\right)$. 1 bod

Napomena: Zadatak se može interpretirati i na sljedeći način: cilj je naći radijus r kružnice sa središtem u $(13, 13)$ takav da ta kružnica dira dužinu određenu točkama $(4, -2)$ i $(-1, 23)$. Uvjet dodira kružnice i pravca dobije se tako da se u dobivenoj kvadratnoj jednadžbi traži da je diskriminanta jednadžbe jednaka nuli (jer u suprotnom kružnica siječe pravac dvaput ili nijednom, ovisno o predznaku diskriminante).

Upravo na taj način se i izvodi formula za računanje udaljenosti r točke $S(p, q)$ od pravca $y = kx + l$:

$$r = \frac{|q - kp - l|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Bodovna shema za takvo rješenje je slična gornjoj shemi: 1 bod za pronalazak jednadžbe pravca, 1 bod za navođenje ili izvođenje formule za udaljenost točke od pravca, 1 bod za određivanje te udaljenosti, 1 bod za određivanje koordinate x_0, 1 bod za opravdanje da se ta točka nalazi na dužini (a ne samo na pravcu), te 1 bod za određivanje ordinate tražene točke.

Drugo rješenje.

Jednadžba pravca po kojem miš trči je, kao u prvom rješenju, $y = -5x + 18$. 1 bod

Točka na pravcu $y = -5x + 18$ najbliža točki $(13, 13)$ leži na presjeku tog pravca i njemu okomitog pravca koji prolazi točkom $(13, 13)$. 1 bod

Odredimo pravac koji je okomit na pravac s jednadžbom $y = -5x + 18$ i prolazi točkom $(13, 13)$. Iz uvjeta okomitosti koeficijent smjera iznosi $\frac{1}{5}$, pa jednadžba glasi

$$y - 13 = \frac{1}{5}(x - 13),$$

odnosno $y = \frac{1}{5}x + \frac{52}{5}$. 1 bod

Nađimo presjek pravaca $y = -5x + 18$ i $y = \frac{1}{5}x + \frac{52}{5}$:

$$\begin{aligned} -5x + 18 = y &= \frac{1}{5} + \frac{52}{5}, \\ \frac{-26}{5}x &= \frac{-38}{5}, \\ x &= \frac{19}{13}. \end{aligned}$$

1 bod

Kao u prvom rješenju nalazimo ordinatu $\frac{139}{13}$, te argumentiramo da se točka $\left(\frac{19}{13}, \frac{139}{13}\right)$ zaista nalazi na dužini. 2 boda

Zadatak A-2.4.

Pet strana drvene kocke obojeno je plavom bojom dok je jedna strana neobojena. Kocka je potom razrezana na sukladne manje kockice od kojih 649 ima točno jednu plavu stranu. Koliko je manjih kockica koje imaju točno dvije plave strane?

Rješenje.

Neka je kocka podijeljena na n^3 sukladnih manjih kockica.

Svakoj od 5 plavo obojenih strana kocke odgovara točno $(n-2)^2$ kockica kojima je točno jedna strana plava. Dodatno, na svakom od 4 ruba neobojenih strana kocke nalazimo još po $n-2$ kockica kojima je točno jedna strana plava. Dakle, ukupno postoji $5(n-2)^2+4(n-2)$ kockica kojima je točno jedna strana plava. 2 boda

Rješenja kvadratne jednadžbe $5(n-2)^2+4(n-2)=649$ su 13 i $-\frac{98}{10}$.

Zanima nas samo prvo, jer se radi o prirodnom broju. Dakle, $n=13$. 2 boda

Sličnom argumentacijom kao gore, uz 8 bridova kocke koji su zajednički za dvije obojene strane kocke nalazi se ukupno $8(n-2)$ kockica kojima su dvije strane obojene. Nadalje, u 4 vrha neobojene strane nalazi se još ukupno 4 takve kockice. Zato je ukupno

$$8(n-2)+4=8\cdot 11+4=92$$

kockica koje imaju točno dvije plave strane. 2 boda

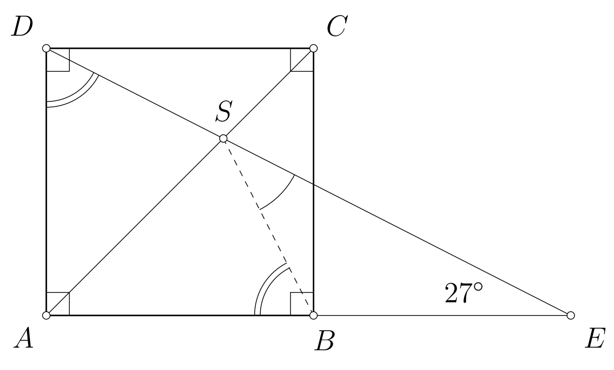
Napomena: Jednadžbu $5(n-2)^2+4(n-2)$ moguće je riješiti na više načina u prirodnim brojevima. Recimo, primjećujući da je izraz $5m^2+4m$ rastući po $m:=n-2$, a $m=11$ je neko rješenje, pa i jedino, ili koristeći rastav $649=11\cdot 59$ i jednakost $m(5m+4)=649$. Od srednja 2 boda iz gornje bodovne sheme, nalazak rješenja $n=13$ nosi 1 bod, te bilo koji način opravdanja da je to jedino rješenje nosi 1 bod.

Zadatak A-2.5.

Dan je kvadrat $ABCD$. Neka je E točka na polupravcu AB takva da je $\sphericalangle AED=27°$. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{DE}$ sijeku se u točki S. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle BSE$.

Prvo rješenje.

Iz pravokutnog trokuta AED imamo $\sphericalangle EDA=90°-\sphericalangle AED=90°-27°=63°$. 1 bod



Kutovi $\sphericalangle BAS$ i $\sphericalangle SAD$ leže uz dijagonalu kvadrata, pa iznose $45°$. Također, vrijedi $|AB| = |AD|$. Konačno, trokutima ABS i ADS je stranica $\overline{AS}$ zajednička. Iz svega ovoga zaključujemo da su ti trokuti sukladni prema S–K–S poučku o sukladnosti. 2 boda

Dakle, vrijedi $\sphericalangle ABS = \sphericalangle SDA = \sphericalangle EDA = 63°$. 1 bod

Konačno, u trokutu SBE imamo

$$\begin{aligned} \sphericalangle BSE &= 180° - \sphericalangle SBE - \sphericalangle BES \\ &= 180° - (180° - \sphericalangle ABS) - \sphericalangle AED \\ &= \sphericalangle ABS - \sphericalangle AED = 63° - 27° = 36°. \end{aligned}$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Kutovi $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle CDE$ su kutovi s paralelnim kracima, pa je zato

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle AED = 27°.$$ 1 bod

Kutovi $\sphericalangle SCD$ i $\sphericalangle BCS$ leže uz dijagonalu kvadrata, pa iznose $45°$. Također, vrijedi $|DC| = |BC|$. Konačno, trokutima SCB i SCD je stranica $\overline{CS}$ zajednička. Iz svega ovoga zaključujemo da su ti trokuti sukladni prema S–K–S poučku o sukladnosti. 2 boda

Dakle, vrijedi $\sphericalangle SBC = \sphericalangle CDS = \sphericalangle CDE = 27°$. 1 bod

Konačno, u trokutu SBE imamo

$$\begin{aligned} \sphericalangle BSE &= 180° - \sphericalangle SBE - \sphericalangle BES \\ &= 180° - (90° + \sphericalangle SBC) - \sphericalangle AED \\ &= 90° - \sphericalangle SBC - \sphericalangle AED = 90 - 27° - 27° = 36°. \end{aligned}$$ 2 boda

Zadatak A-2.6.

Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a < b$ i neka je $S = \{a^2, a^2+1, a^2+2, \dots, b^2\}$. Odredi sve parove brojeva a i b za koje je među elementima skupa S točno 1 % kvadrata prirodnih brojeva.

Rješenje.

Skup S sadrži ukupno $b^2 - a^2 + 1$ brojeva. 1 bod

Potpuni kvadrati u skupu S su brojevi $a^2, (a+1)^2, \dots, b^2$ i njih ukupno ima $b-a+1$. 2 boda

Dakle, tražimo parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $\dfrac{b^2 - a^2 + 1}{100} = b - a + 1$. 1 bod

Zapišimo tu jednakost u drugačijem obliku:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 + 1 &= 100(b - a + 1) \\ (b-a)(b+a) &= 100(b-a) + 99 \\ (b-a)(b+a-100) &= 99. \end{aligned}$$ 2 boda

Kako je $b > a$, faktori $b - a$, $b + a - 100$ trebaju biti pozitivni djelitelji broja 99. Oni su $1, 3, 9, 11, 33, 99$. Dakle, mora biti

$$(b - a, b + a - 100) \in \{(1, 99), (3, 33), (9, 11), (11, 9), (33, 3), (99, 1)\}.$$ 2 boda

Svaki od tih slučajeva je sustav jednadžbi po a i b koji vodi k rješenju. Svi traženi parovi brojeva (a, b) su

$$(1, 100), (35, 68), (49, 60), (51, 60), (65, 68), (99, 100).$$ 2 boda

Zadatak A-2.7.

Kvadratna jednadžba $x^2 + bx + c = 0$ ima realna rješenja čiji je zbroj kvadrata jednak 2. Odredi sve moguće vrijednosti izraza $b + c$.

Rješenje.

Prema Vièteovim formulama, za rješenja x_1, x_2 dane kvadratne jednadžbe vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = b^2 - 2c.$$ 2 boda

Dakle, vrijedi $b^2 - 2c = 2$, odnosno $c = \dfrac{b^2 - 2}{2}$. 1 bod

Primijetimo da je

$$b + c = b + \frac{b^2 - 2}{2} = \frac{b^2 + 2b - 2}{2} = \frac{(b + 1)^2 - 3}{2}.$$ 2 boda

Dana jednadžba ima realna rješenja pa je nužno $b^2 - 4c \geqslant 0$. 1 bod

Zbog $c = \dfrac{b^2 - 2}{2}$ uvjet $b^2 - 4c \geqslant 0$ postaje $b^2 \leqslant 4$, odnosno $-2 \leqslant b \leqslant 2$. 1 bod

Sada iz uvjeta $-2 \leqslant b \leqslant 2$ redom slijedi

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant b + 1 \leqslant 3, \\ 0 &\leqslant (b + 1)^2 \leqslant 9, && \text{1 bod} \\ -3 &\leqslant (b + 1)^2 - 3 \leqslant 6, \\ -\frac{3}{2} &\leqslant \frac{(b + 1)^2 - 3}{2} \leqslant 3. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Kako je $b + c = \dfrac{(b + 1)^2 - 3}{2}$, zaključujemo da je $b + c$ može poprimiti proizvoljnu vrijednost u intervalu $\left[-\dfrac{3}{2}, 3\right]$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Ako je $\cos x + \sin x = 0.3$, odredi $\cos^3 x + \sin^3 x$.

Prvo rješenje.

Kvadrirajući početnu jednakost, dobivamo

$$\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 0.09.$$ 1 bod

Za svaki realan x vrijedi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. 1 bod

Uvrštavajući to u gornji račun, dobivamo $1 + 2\cos x \sin x = 0.09$, odakle je

$$\cos x \sin x = \frac{0.09 - 1}{2} = -0.455.$$ 1 bod

Koristeći formulu za zbroj kubova imamo

$$\begin{aligned}\cos^3 x + \sin^3 x &= (\cos x + \sin x)\left(\cos x^2 - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) && \text{2 boda}\\ &= 0.3 \cdot (1 + 0.455)\\ &= 0.4365. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, dobivamo $\cos x \sin x = -0.455$. 3 boda

Koristeći formulu za kub zbroja, imamo

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x)^3 &= \cos^3 x + 3\cos^2 x \sin x + 3\cos x \sin^2 x + \sin^3 x && \text{1 bod}\\ &= \cos^3 x + \sin^3 x + 3\cos x \sin x(\cos x + \sin x). && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)^3 - 3\cos x \sin x(\cos x + \sin x) = 0.3^3 + 3 \cdot 0.3 \cdot 0.455 = 0.4365.$$ 1 bod

Zadatak A-3.2.

Odredi realne brojeve a i b tako da skup vrijednosti funkcije $f(x) = 2022^{-2(x-2a)(x+a)} + 1$ bude interval $\langle b, 2023]$.

Rješenje.

Kako kvadratna funkcija $g(x)=-2(x-2a)(x+a)$ svoju maksimalnu vrijenost dostiže u tjemenu, maksimalna vrijednost te kvadratne funkcije jednaka je ordinati tjemena i iznosi $\frac{9a^2}{2}$. 1 bod

Slika funkcije $g(x)=-2(x-2a)(x+a)$ je interval $\left\langle -\infty, \frac{9a^2}{2}\right]$. 1 bod

Kako je funkcija $h(x)=2022^{-2(x-2a)(x+a)}$ rastuća, njezina slika je interval $\left\langle 0, 2022^{\frac{9a^2}{2}}\right]$.

Slika funkcije $f(x)=2022^{-2(x-2a)(x+a)}+1$ je interval $\left\langle 1, 2022^{\frac{9a^2}{2}}+1\right]$. 1 bod

Uspoređujući dobiveni i traženi interval, zaključujemo

$$b=1, \quad \text{1 bod}$$

$$2022^{\frac{9a^2}{2}}+1=2023. \quad \text{1 bod}$$

Iz druge jednakosti dobivamo $\frac{9a^2}{2}=1$, pa je $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$. 1 bod

Zadatak A-3.3.

Kvadrat $ABCD$ površine 36 smješten je u koordinatnu ravninu tako da je stranica $\overline{AB}$ paralelna s y-osi, a točke A, B i C redom pripadaju grafovima funkcija $f(x)=3\log_a x$, $g(x)=2\log_a x$ i $h(x)=\log_a x$. Odredi broj a.

Rješenje.

Koordinate točaka označimo s $A(x_A, 3\log_a x_A)$, $B(x_B, 2\log_a x_B)$ i $C(x_C, \log_a x_C)$. Kako je površina kvadrata jednaka 36, duljina stranice iznosi 6. Stranica $\overline{AB}$ je paralelna s y-osi, vrijedi $x_A=x_B$ i $|3\log_a x_A - 2\log_a x_B|=6$, odakle je $|\log_a x_B|=6$. 1 bod

Nadalje, vrijedi $2\log_a x_B=\log_a x_C$, tj. $x_C=x_B^2$. 1 bod

Stranica $\overline{BC}$ je paralelna s x-osi, pa vrijedi $|x_C-x_B|=6$. 1 bod

Zbog toga x_B i x_C moraju biti veći od 1. Razlikujemo slučajeve $a>1$ i $a<1$.

Ako je $a>1$, onda je $\log_a x_B=6$ i $x_C=x_B+6$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu $x_B^2-x_B-6=0$. Rješenja te jednadžbe su $x_B=3$ i $x_B=-2$, a kako x_B mora biti pozitivan, zaključujemo da je jedino moguće rješenje $x_B=3$. 1 bod

Budući da je $\log_a x_B=6$, tj. $x_B=a^6$, slijedi da je $a=\sqrt[6]{3}$. 1 bod

Zadatak ima dva rješenja, pri čemu su rezultati recipročni brojevi, a grafovi su zrcalno simetrični obzirom na x-os. Za $a<1$ dobivamo rješenje $a=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne promatra slučaj $a<1$ može dobiti najviše 5 bodova. Ako učenik odbaci slučaj $a<1$ na temelju orijentacije vrhova kvadrata $ABCD$, treba dobiti posljednji bod iz sheme (ako je točno riješen slučaj $a>1$, uz taj komentar treba dobiti 6 bodova).

Zadatak A-3.4.

Za koliko je prirodnih brojeva n vrijednost razlomka

$$\frac{n+2022}{n-3}$$

cijeli broj?

Rješenje.

Zapišimo izraz na drugačiji način:

$$\frac{n+2022}{n-3} = \frac{2025}{n-3} + 1. \qquad \text{1 bod}$$

Ako je $n-3$ pozitivan, mora biti djelitelj broja 2025. Broj 2025 ima 15 pozitivnih djelitelja: 1 bod

$$1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025. \qquad \text{1 bod}$$

Ako je izraz $n-3$ negativan, može poprimati vrijednosti -1 ili -2 (jer je n prirodan broj). 1 bod

Kako 2 nije djelitelj od 2025, jedina mogućnost $n-3=-1$ (tj. $n=2$). 1 bod

Zaključujemo da ukupno postoji 16 prirodnih brojeva n sa svojstvom iz teksta zadatka. 1 bod

Napomena: Treći bod iz bodovne sheme daje se za argumentaciju tvrdnje da 2025 ima točno 15 pozitivnih djelitelja. Jedan alternativan način dokaza te tvrdnje je koristeći rastav $2025 = 3^4 5^2$ i formulu za broj pozitivnih djelitelja $\tau(m)$ broja m (pri čemu je $m = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ njegov rastav na proste faktore):

$$\tau(m) = (a_1+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1).$$

Zadatak A-3.5.

Kocka $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 presječena je sferom. Središte sfere je točka S na dužini $\overline{AD}$ takva da je $|AS| = \sqrt{3}-1$. Sfera prolazi točkama C i D', te siječe bridove $\overline{AB}$ i $\overline{AA'}$.

Odredi površinu onog dijela oplošja kocke koji se nalazi unutar te sfere.

Rješenje.

Presjek zadane sfere i bilo koje ravnine je kružnica kojoj je središte ortogonalna projekcije točke S na tu ravninu. Neka su K, K', L i L' redom presjeci sfere s bridovima $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AA'}$ i $\overline{A'D'}$. Ostale bridove sfera siječe u točkama C i D ili ih uopće ne siječe. Neka je r radijus te sfere.

Promotrimo stranu $ABCD$. Kako je duljina brida kocke jednaka 1, iz uvjeta $|AS| = \sqrt{3}-1$ i slijedi $|SD| = 2-\sqrt{3}$. Iz Pitagorinog poučka u trokutu SCD slijedi

$$r^2 = |SC|^2 = |DC|^2 + |DS|^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3}. \qquad \text{1 bod}$$

Zato je i $|SK|^2 = r^2 = 8 - 4\sqrt{3}$. Primijetimo da je

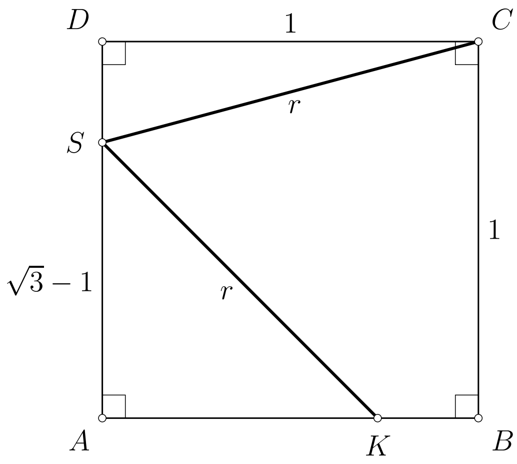
$$|AS|^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}|SK|^2,$$

odnosno $|SK| = \sqrt{2}|SA|$. Odavde zaključujemo da je trokut SAK jednakokračan pravokutan trokut. 1 bod

Uočavamo da su točke K i S osnosimetrične obzirom na pravac AC, pa iz te simetrije slijedi $|AK| = |AS| = \sqrt{3} - 1$, $|BK| = |DS|$, $|CK| = |CS| = r$. Dakle, trokut SKC je jednakostraničan.

Vrijedi da je $|CK'| = 2|DS| = 4 - 2\sqrt{3}$, pa je $|BK'| = 1 - (4 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{3} \cdot |BK|$. Iz toga zaključujemo da je $\sphericalangle BKK' = 60°$ i $|KK'| = 2|BK| = 2|DS| = |CK'|$.

Trokuti SKK' i $SK'C$ su jednakokračni s krakovima duljine r, te sukladnim osnovicama, pa su sukladni i vrijedi $\sphericalangle KSK' = \sphericalangle K'SC = 30°$. 1 bod



Površina dijela strane $ABCD$ unutrar sfere računamo kao zbroj površina trapeza $DSK'C$, pravokutnog trokuta SAK i kružnog isječka SKK' sa središnjim kutem $30°$ i polumjerom r:

$$\frac{(2 - \sqrt{3} + 2(2 - \sqrt{3})) \cdot 1}{2} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} + 4(2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{\pi}{12} = (2 - \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$ 1 bod

Jednako iznosi tražena površina na strani $ADD'A'$.

Na strani $CC'D'D$ unutar sfere se nalazi četvrtina kruga sa središtem u D i radijusom $|DC| = 1$. Površina je $\frac{1}{4}\pi$. Na strani $ABB'A'$ unutar sfere se nalazi četvrtina kruga sa središtem u A i radijusom $|AK| = 1$. Površina je $\frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)^2\pi$. 1 bod

Konačno, na strani $BB'C'C$ unutar sfere je polovina kruga s promjerom $\overline{CK'}$, dok je na stranici $A'B'C'D'$ polovina kruga s promjerom $\overline{D'L'}$. Svaki od tih polukrugova ima površinu $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^2\pi$. 1 bod

Zbrajanjem svih izračunatih površina, dobivamo konačni rezultat:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{(4 - 2\sqrt{3})\pi}{4} + 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}(7 - 4\sqrt{3})\pi = \frac{(115 - 62\sqrt{3})\pi}{12} + 10 - 5\sqrt{3}.$$

Zadatak A-3.6.

Neka su a, b i c redom duljine stranica trokuta nasuprot kutova veličina α, β i γ. Ako vrijedi $9a^2+9b^2=19c^2$, odredi $\dfrac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\\ &= \frac{\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} && \text{2 boda}\\ &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Slijedi

$$\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}}{\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}. \qquad \text{1 bod}$$

Iz poučka o kosinusu slijedi

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \qquad \text{1 bod}$$

te iz poučka o sinusima slijedi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{a}{c} \quad \text{i} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}. \qquad \text{1 bod}$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{ab}{c^2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^2}. \qquad \text{2 boda}$$

Koristeći uvjet $a^2+b^2=\frac{19}{9}c^2$ iz zadatka slijedi

$$\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{\frac{19}{9}c^2-c^2}{2c^2}=\frac{5}{9}. \qquad \text{2 boda}$$

Drugo rješenje.

Prema poučku o kosinusu vrijedi

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad \text{1 bod}$$

Prema poučku o sinusu vrijedi

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R}, \qquad \text{1 bod}$$

pri čemu je R radijus opisane kružnice tom trokutu.

Tada imamo

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{R}{abc}\left(b^2+c^2-a^2\right).$$ 2 boda

Analogno za β i γ vrijede formule

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{R}{abc}\left(c^2+a^2-b^2\right), \qquad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{R}{abc}\left(a^2+b^2-c^2\right).$$ 2 boda

Uvrstimo to u izraz iz teksta zadatka:

$$\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\frac{R}{abc}\left(a^2+b^2-c^2\right)}{\frac{R}{abc}\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{R}{abc}\left(c^2+a^2-b^2\right)} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2c^2}$$ 2 boda

Kako za stranice trokuta vrijedi uvjet iz teksta zadatka, možemo izraziti $a^2+b^2=\frac{19}{9}c^2$ te konačno dobiti

$$\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\frac{19}{9}c^2-c^2}{2c^2} = \frac{\frac{10}{9}}{2} = \frac{5}{9}.$$ 2 boda

Zadatak A-3.7.

Na koliko načina se u tablicu 3×3 mogu upisati brojevi od 1 do 9 tako da zbrojevi brojeva u svakom retku, u svakom stupcu i na svakoj dijagonali budu djeljivi s 3?

Rješenje.

Kako su uvjeti u zadatku dani za djeljivost brojem 3, dovoljno je promatrati ostatke koje brojevi $1,2,3,\dots,9$ u tablici daju pri dijeljenju s 3. Točnije, umjesto tablice u koje upisujemo brojeve od 1 do 9, promatrat ćemo tablice u koje upisujemo tri broja 0, tri broja 1 i tri broja 2, i dalje uz uvjet da je suma elemenata u svakom retku, stupcu i dijagonali djeljiva s 3, te ćemo prebrojati koliko ima takvih tablica. Nazovimo te tablice *novim tablicama.* 2 boda

Izračunajmo vezu brojeva tablica opisanih u zadatku i novih tablica. Svaki ostatak iz skupa $\{0,1,2\}$ pojavljuje se tri puta u tablici i prezentira jedan od tri broja iz skupa od 1 do 9. Ukupan broj načina kako jedan od tri ostatka zamijeniti brojevima od 1 do 9 možemo odabrati na 3 načina, a potom još na 2 načina biramo kako dva preostala ostataka prezentiraju dva preostala broja koja daju taj isti ostatak. Time zaključujemo da za svaki ostatak iz skupa $\{0,1,2\}$ ukupan broj novih tablica treba pomnožiti s faktorom 6. Konačno, broj tablica opisanih u zadatku jednak je broju novih tablica pomnožen s 6^3. 1 bod

Sada odredimo broj novih tablica. Prvo primjećujemo da se u svakom retku, stupcu ili dijagonali, kako bi suma bila djeljiva s 3 mogu nalaziti ili tri različita broja, ili tri ista broja. 1 bod

Promotrimo prvi redak tablice. Prebrojimo prvo nove tablice u kojima su u tom retku svi brojevi različiti. Pretpostavimo da su to brojevi $0,1,2$ redom. Na prvom mjestu drugog retka tada može pisati bilo koji od brojeva iz skupa $\{0,1,2\}$, te on kao prvo jednoznačno određuje element u zadnjem retku prvog stupca (zbog sume elemenata u prvom stupcu), pa zatim element u sredini tablice (zbog sume na dijagonali), a zatim i sve elemente u tablici.

Tablice koje smo dobili su:

0	1	2
0	1	2
0	1	2

0	1	2
1	2	0
2	0	1

0	1	2
2	0	1
1	2	0

2 boda

Ako pak pretpostavimo da je u prvom retku bilo koji drugi redoslijed tri različita broja (ukupno ih je 6), analogno dobivamo tri nove tablice nalik gornjima (zamjenom uloga brojeva $0, 1, 2$ u cijeloj tablici). Zato je ukupan broj novih tablica u kojima se u prvom retku nalaze tri različita broja jednak $6 \cdot 3 = 18$. 1 bod

Prebrojimo sada nove tablice u kojima su u prvom retku svi brojevi jednaki. Tada, da bi i ostali retci imali sumu djeljivu s tri, svi retci sadrže tri ista broja. Broj načina na koje možemo odabrati broj koji će se ponavljati u prvom retku je 3, a na 2 načina tada biramo broj u drugom retku (broj u zadnjem retku je jednoznačno određen prvim dvama retcima). Zato je ukupan broj novih tablica u kojima se u prvom retku nalaze tri ista broja jednak $3 \cdot 2 = 6$. 2 boda

Ukupno je novih tablica $6 + 18 = 24$, pa je ukupan broj tablica traženih u tekstu zadatka jednak $24 \cdot 6^3 = 5184$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je $z^2 = (1+i) \cdot \overline{z}$.

Prvo rješenje.

Neka je $z = x + iy$, gdje su x i y realni brojevi. Tada slijedi

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \qquad \text{i} \quad (1+i)\overline{z} = (1+i)(x-iy) = x + y + i(x-y).$$ 1 bod

Uvrštavajući u početnu jednakost i uspoređujući realne i imaginarne dijelove kompleksnog broja, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x + y, \\ 2xy &= x - y. \end{aligned}$$ 2 boda

Iz prve jednakosti imamo $(x-y)(x+y) = x + y$, odnosno

$$(x - y - 1)(x + y) = 0.$$ 1 bod

U slučaju da je $x+y=0$, možemo izraziti $y=-x$ i uvrstiti u drugu jednadžbu sustava. Dobijemo $-2x^2 = 2x$, odakle dobivamo rješenja $x = 0,\ -1$, tj. $z = 0, -1+i$. 1 bod

U slučaju da je $x-y-1=0$, izrazimo $y = x-1$ i uvrstimo ponovno u drugu jednadžbu. Dobijemo jednadžbu $2x(x-1) = 1$ čija su rješenja $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, odnosno

$$z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod

Dakle, rješenja početne jednadžbe su

$$z = 0, \quad -1+i, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Drugo rješenje.

Pomnožimo polaznu jednadžbu sa z. Dobivamo

$$z^3 = (1+i) \cdot \bar{z}z = (1+i)|z|^2.$$ 2 boda

Usporedimo apsolutnu vrijednost lijeve i desne strane jednadžbe:

$$|z|^3 = \sqrt{2}|z|^2$$

odakle je $|z| = 0$ ili $|z| = \sqrt{2}$. 1 bod

U slučaju kada je $|z| = 0$, jedino je moguće da je $z = 0$, što zaista jest rješenje. 1 bod

U slučaju kada je $|z| = \sqrt{2}$ dobivamo jednadžbu

$$z^3 = (1+i) \cdot |z|^2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$ 1 bod

Računajući treći korijen iz kompleksnog broja, dobivamo rješenja

$$\begin{aligned} z = \sqrt{2}&\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), \\ &\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$ 1 bod

Konačno, sva rješenja su

$$\begin{aligned} z = 0, &\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), \\ &\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

Napomena: Kao što je pokazano gore, dopušteno je rješenja zapisati i u klasičnom i u trigonometrijskom zapisu.

Zadatak A-4.2.

Pet međusobno različitih realnih brojeva a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a njihov zbroj iznosi 50. Odredi te brojeve ako su brojevi a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza.

Rješenje.

Budući da su a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 uzastopni članovi aritmetičkog niza, postoji realan broj d takav da je $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d$ i $a_5 = a_1 + 4d$. 1 bod

Zbog $50 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d = 5(a_1 + 2d)$ dobivamo $a_1 + 2d = 10$. 1 bod

Budući da su a_1, a_2 i a_5 uzastopni članovi geometrijskog niza, dobivamo

$$a_1 \cdot a_5 = a_2^2$$

odnosno

$$a_1 \cdot (a_1 + 4d) = (a_1 + d)^2.$$

Ako u ovu jednadžbu uvrstimo $a_1 + 2d = 10$ dobivamo $(10 - 2d)(10 + 2d) = (10 - d)^2$. 1 bod

Rješavanjem gornje jednadžbe dobivamo da je $d = 0$ ili 4. 1 bod

Budući da su a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5 različiti realni brojevi, slučaj $d = 0$ otpada, pa zaključujemo da je nužno $d = 4$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo da su traženi brojevi $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$, $a_4 = 14$ i $a_5 = 18$. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Za kompleksne brojeve p i q vrijedi $p + q = 5$ i $p^2 + q^2 = 9$. Dokaži da je $p^n + q^n$ neparan cijeli broj za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Kvadriranjem izraza $p + q = 5$ dobivamo $p^2 + q^2 + 2pq = 25$. Zbog $p^2 + q^2 = 9$ slijedi da je $pq = 8$. 1 bod

Pokažimo sada tvrdnju matematičkom indukcijom. Baza indukcije zadovoljena je za $n = 1$ i $n = 2$. 1 bod

Za pretpostavku indukcije pretpostavimo sljedeće: postoji prirodan broj $N \geqslant 2$ takav da je $p^n + q^n$ neparan cijeli broj za sve prirodne brojeve $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Za korak indukcije koristimo identitet

$$p^{N+1} + q^{N+1} = (p + q)\left(p^N + q^N\right) - pq\left(p^{N-1} + q^{N-1}\right).$$ 2 boda

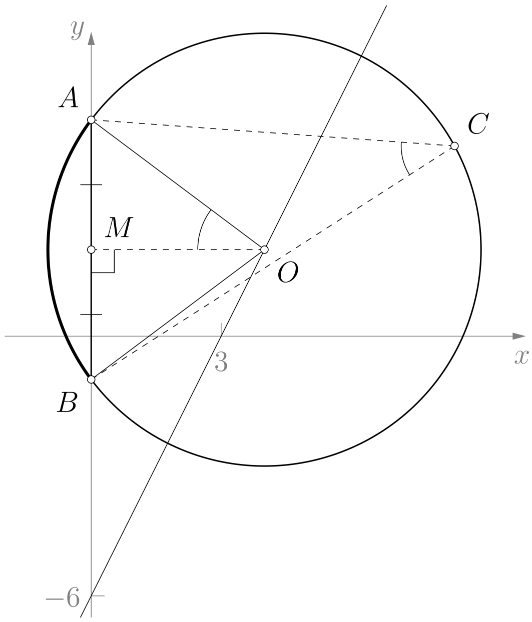
Zbog $pq = 8$ (i pretpostavke indukcije) znamo da je $pq(p^{N-1} + q^{N-1})$ paran cijeli broj, a zbog pretpostavke indukcije znamo da je $(p + q)(p^N + q^N)$ neparan cijeli broj. 1 bod

Sada zaključujemo da je i $p^{N+1} + q^{N+1}$ neparan cijeli broj, čime je dokazana tvrdnja indukcije, a time i tvrdnja zadatka. 1 bod

Zadatak A-4.4.

Kružnica prolazi točkama $A(0, 5)$ i $B(0, -1)$, a njeno središte pripada pravcu $y = 2x - 6$. Odredi sinus obodnog kuta nad manjim lukom $\overparen{AB}$ te kružnice.

Prvo rješenje.



Jednadžba kružnice radijusa r sa središtem u (x_0, y_0) glasi $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Uzimajući u obzir da se središte kružnice nalazi na pravcu $y=2x-6$, sve točke na kružnici zadovoljavaju jednakost $(x-x_0^2)+(y-2x_0+6)^2=r^2$. 1 bod

Posebno, tu jednakost zadovoljavaju točke $A(0,5)$ i $B(0,-1)$, pa imamo

$$\begin{aligned} x_0^2+(5-2x_0+6)^2&=r^2, \\ x_0^2+(-1-2x_0+6)^2&=r^2. \end{aligned}$$ 1 bod

Oduzimanjem i sređivanjem, dobivamo $(11-2x_0)^2=(5-2x_0)^2$, odnosno $4x_0=16$, odakle je $x_0=4$. Kako središte kružnice leži na pravcu $y=2x-6$, dobivamo $y_0=2$, dakle središte kružnice je točka $O(4,2)$. 1 bod

Radijus r dobivamo uvrštavajući točku $B(0,-1)$ u jednadžbu kružnice: $(0-4)^3+(-1-2)^2=r^2$, odakle je $r=5$. 1 bod

Neka je C bilo koja točka na većem luku $\widehat{AB}$ kružnice, te γ mjera kuta $\sphericalangle ACB$. Koristeći sinusov poučak za trokut ABC, traženi sinus obodnog kuta možemo dobiti po formuli $\sin\gamma=\dfrac{c}{2r}$, gdje je $c=|AB|$. 1 bod

Kako je $|AB|=\sqrt{(0-0)^2+(-1-5)^2}=6$, konačno imamo

$$\sin\gamma=\frac{6}{2\cdot 5}=\frac{3}{5}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Primijetimo da je točka $M(0,2)$ polovište dužine $\overline{AB}$, te da ta dužina leži na y-osi. Središte ove kružnice se nalazi na simetrali dužine $\overline{AB}$. To je pravac koji je okomit na y-os i prolazi kroz polovište, pa mu jednadžba glasi $y = 2$. 1 bod

Uvrštavanjem uvjeta $y = 2$ u jednadžbu pravca $y = 2x - 6$ dobivamo koordinate središta kružnice $O(4,2)$. 2 boda

Radijus kružnice je $|AO| = \sqrt{(0-4)^2 + (5-2)^2} = 5$. 1 bod

Sinus obodnog kuta nad manjim i nad većim lukom $\widehat{AB}$ ove kružnice se poklapaju (jer vrijedi $\sin x = \sin(\pi - x)$). Obodni kut nad većim lukom jednak je polovini središnjeg kuta $\sphericalangle AOB$ nad tetivom $\overline{AB}$. Kako je M polovište osnovice jednakokračnog trokuta ABO, zaključujemo da sinus traženog kuta možemo računati kao sinus kuta $\sphericalangle AOM$. 1 bod

Trokut AMO je pravokutan, pa zato imamo

$$\sin \sphericalangle AOM = \frac{|AM|}{|AO|} = \frac{\sqrt{(0-0)^2 + (5-2)^2}}{5} = \frac{3}{5}.$$ 1 bod

Napomena: Elementi gornjih rješenja mogu se kombinirati. Općenito u svim rješenjima, struktura bodovanja je sljedeća: pronalazak središta kružnice nosi 3 boda, izračun radijusa kružnice 1 bod, određivanje načina računa tražene vrijednosti zadatka 1 bod, te konačan izračun 1 bod.

Zadatak A-4.5.

Od 27 sukladnih bijelih kockica sastavljena je kocka te su sve njene vanjske strane obojene crno.

(a) Slučajno je odabrana jedna od tih kockica i postavljena na stol na slučajno odabranu stranu. Kolika je vjerojatnost da svih pet vidljivih strana kockice bude bijele boje?

(b) Na stolu se nalazi kockica kojoj je svih pet vidljivih strana bijele boje. Kolika je vjerojatnost da je i šesta strana te kockice bijela?

Rješenje.

Nakon bojenja vanjskih strana velike kocke u crno, 8 kockica ima 3 bijele strane, 12 kockica ima 4 bijele strane, 6 kockica ima 5 bijelih strana te 1 kockica ima 6 bijelih strana. 1 bod

Svaka od 27 kockica može biti postavljena na 6 različitih načina na stol (ovisno o tome koja joj je strana na stolu), pa je ukupan broj događaja jednak $27 \cdot 6$.

Samo kockice sa 5 ili 6 bijelih strana mogu biti stavljene na stol tako da je svih 5 vidljivih strana bijelo. Kockica s 6 bijelih strana (samo je jedna takva) može biti postavljena na 6 načina, dok bilo koja od 6 kockica s 5 bijelih strana može biti postavljena na točno jedan način na stol. 1 bod

Zato je vjerojatnost da svih pet vidljivih strana kockice bude bijele boje jednaka

$$\frac{6 \cdot 1 + 1 \cdot 6}{27 \cdot 6} = \frac{2}{27}.$$ 1 bod

Označimo sa S događaj kada odabrana kockica ima 6 bijelih strana, te sa H označimo događaj kada je odabrana kockica postavljena na stol tako da je svih 5 vidljivih strana bijelo. Računamo uvjetnu vjerojatnost događaja S pod uvjetom da se dogodio događaj H, odnosno

$$P(S|H) = \frac{P(S \cap H)}{P(H)}.$$ 1 bod

Primijetimo da je vjerojatnost $P(H)$ izračunata u (a) dijelu zadatka.

Vjerojatnost događaja $S \cap H$ jednaka je vjerojatnosti događaja S, jer ako se dogodio događaj S, onda se sigurno dogodio i događaj H. Ona iznosi $\frac{1}{27}$ (na stolu se nalazi jedina potpuno bijela kockica). 1 bod

Konačno, imamo

$$P(S|H) = \frac{P(S \cap H)}{P(H)} = \frac{P(S)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{2}{27}} = \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Zadatak A-4.6.

Izračunaj

$$\sum_{k=1}^{1011} \binom{2022}{2k-1} 2^{2k-1}.$$

Prvo rješenje.

Primjenom binomnog teorema na izraze $(2+1)^{2022}$ i $(-2+1)^{2022}$ dobivamo

$$3^{2022} = (2+1)^{2022} = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} 2^k \cdot 1^{2022-k} = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} 2^k,$$ 3 boda

te

$$1 = (-1)^{2022} = (-2+1)^{2022} = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} (-2)^k \cdot 1^{2022-k} = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} (-2)^k.$$ 3 boda

Oduzimanjem gornjih dviju jednakosti dobivamo

$$3^{2022} - 1 = \sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} \left(2^k - (-2)^k\right) = \sum_{k=1}^{1011} \binom{2022}{2k-1} 2 \cdot 2^{2k-1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{1011} \binom{2022}{2k-1} 2^{2k-1}.$$ 3 boda

Dijeljenjem gornje jednakosti s 2 dobivamo traženi rezultat:

$$\sum_{k=1}^{1011} \binom{2022}{2k-1} 2^{2k-1} = \frac{3^{2022} - 1}{2}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

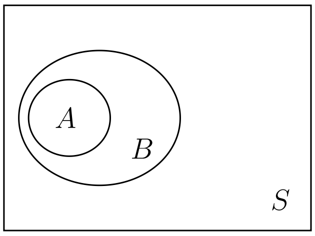
Zadatak rješavamo koristeći kombinatornu interpretaciju.

Binomni koeficijent $\binom{2022}{2k-1}$ je broj načina da od skupa s 2022 elemenata odaberemo podskup s $2k-1$ elemenata. 1 bod

Broj 2^{2k-1} možemo interpretirati kao broj podskupova skupa s $2k-1$ elemenata. 1 bod

Stoga je zadani zbroj jednak broju načina da odaberemo: broj k između 1 i 1011, podskup B skupa $S = \{1, 2, ..., 2022\}$ s $2k-1$ elemenata i podskup A skupa B.

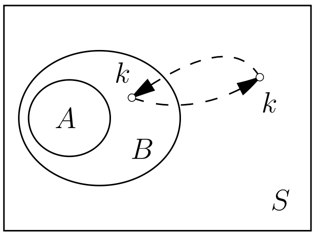
Dakle, biramo parove (A, B) pri čemu je $A \subseteq B \subseteq S$ i B ima neparno mnogo elemenata. 1 bod



Broj parova (A, B) pri čemu je $A \subseteq B \subseteq S$ (bez uvjeta da B ima neparno mnogo elemenata) je jednak 3^{2022} jer je svaki takav par jednoznačno određen razmještanjem svakog elementa skupa S u jedan od disjunktnih skupova A, $B \setminus A$ i $S \setminus B$. 2 boda

Pokažimo da sve parove osim $(A, B) = (S, S)$ možemo povezati tako da su parovi (A, B') i (A, B'') povezani ako i samo ako postoji točan jedan element koji se pojavljuje u jednom od skupova B' i B'', a ne pojavljuje se u drugom. Na taj način će biti povezani jedan par koji ima neparno elemenata u skupu B s jednim parom u kojem B ima parno elemenata. Dakle, traženih parova ima $\frac{1}{2} \cdot (3^{2022} - 1)$. 2 boda

Zaista, za svaki par (A, B) neka je k najveći element skupa S koji se ne nalazi u A. Ako je $k \in B$, onda povežemo (A, B) i $(A, B \setminus \{k\})$, a ako vrijedi $k \notin B$, onda povežemo (A, B) i $(A, B \cup \{k\})$. Drugim riječima, između skupova $B \setminus A$ i $S \setminus B$ prebacujemo najveći element k koji se u njima nalazi. Na taj način možemo upariti sve parove, osim $(A, B) = (S, S)$ jer jedino u tom slučaju nema elemenata u S koji se ne nalaze u A. 3 boda



Zadatak A-4.7.

U ovisnosti o prostom broju p odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$m^2 = n^2 - 4np + 3p^2.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo početnu jednakost na sljedeći način

$$p^2 = (n^2 - 4np + 4p^2) - m^2 = (n - 2p - m)(n - 2p + m).$$ 2 boda

Jedini djelitelji broja p^2 su $-p^2, -p, -1, 1, p$ i p^2. Budući da je $n-2p-m < n-2p+m$ dobivamo dva moguća slučaja: $n - 2p - m = 1$ i $n - 2p + m = p^2$, te $n - 2p - m = -p^2$ i $n - 2p + m = -1$. 2 boda

Analizom slučaja $n - 2p - m = 1$, $n - 2p + m = p^2$ (tj. rješavanjem sustava po m i n) dobivamo

$$m = \frac{p^2 - 1}{2}, \quad n = \frac{p^2 + 1}{2} + 2p.$$ 1 bod

Primijetimo da je u ovom slučaju p nužno neparan. 1 bod

Slično, analizom slučaja $n - 2p - m = -p^2$, $n - 2p + m = -1$ dobivamo

$$m = \frac{p^2 - 1}{2}, \quad n = \frac{4p - 1 - p^2}{2}.$$ 1 bod

Primijetimo da je u ovom slučaju p nužno manji od 5. 1 bod

Doista, ako bi vrijedilo $p \geqslant 5$, onda bismo imali $p^2 \geqslant 5p > 4p - 1$, pa broj $n = \dfrac{4p - 1 - p^2}{2} < 0$ ne bi bio prirodan. 1 bod

Također, primijetimo da je i u ovom slučaju p nužno neparan, pa zaključujemo da za $p = 3$ imamo dodatno rješenje $m = 4, n = 1$. 1 bod

Iz svega zaključujemo da

- za $p = 2$ jednadžba nema rješenja
- za $p = 3$ jednadžba ima dva rješenja $(m, n) = (4, 1)$ i $(4, 11)$
- za $p \geqslant 5$ jednadžba ima jedno rješenje oblika $(m, n) = \left(\dfrac{p^2 - 1}{2}, \dfrac{p^2 + 4p + 1}{2}\right)$.

Drugo rješenje.

Faktorizirajmo desnu stranu jednakosti:

$$m^2 = (n - 3p)(n - p).$$ 1 bod

Pretpostavimo prvo da $p \mid n$. Tada $p \mid n - p \mid m^2$ odnosno $p \mid m$. Neka su m' i n' prirodni brojevi takvi da je $m = p \cdot m'$ i $n = m \cdot n'$. Uvrštavanjem dobivenog u gornju jednadžbu i dijeljenjem s p^2 dobivamo

$$m'^2 = (n' - 3)(n' - 1) = ((n' - 2) - 1)((n' - 2) + 1) = (n' - 2)^2 - 1^2,$$

odnosno $1 = (n' - 2)^2 - m'^2 = (n' - 2 - m')(n' - 2 + m')$, što je moguće samo kada je $n' - 2 - m' = n' - 2 + m' = \pm 1$. To je nemoguće jer $m' \neq 0$. Dakle, početna pretpostavka je bila kriva, zato p ne dijeli n. 1 bod

Promotrimo sada najveći zajednički djelitelj brojeva $n - 3p$ i $n - p$:

$$M(n - 3p, n - p) = M((n - 3p) - (n - p), n - p) = M(2p, n - p) \in \{1, 2, p, 2p\}.$$

Kako p ne dijeli n, pa onda ni $n-p$, zaključujemo da je $M(n-3p, n-p) \in \{1, 2\}$. 1 bod

Promotrimo prvo slučaj kada je $M(n-3p, n-p) = 1$. Tada su $n-3p$ i $n-p$ kvadrati cijelih brojeva ili su njihove negativne vrijednosti kvadrati cijelih brojeva. Zato postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$n-3p = a^2, \quad n-p = b^2 \qquad \text{ili} \quad n-3p = -b^2, \quad n-p = -a^2.$$

U oba slučaja oduzimanjem dobivamo

$$2p = (n-p) - (n-3p) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Faktori $b-a$ i $b+a$ su iste parnosti jer im je zbroj $2b$ paran. Kako im je umnožak paran, zaključujemo da je svaki od njih paran, pa im je umnožak djeljiv s 4. To je moguće samo ako je $p = 2$. No, u tom slučaju (opet zbog parnosti faktora) nužno oba faktora $b-a$ i $b+a$ imaju vrijednost 2 ili -2, no to je nemoguće jer $a \neq 0$. 1 bod

Promotrimo sada slučaj kada je $M(n-3p, n-p) = 2$. Slično kao u prethodnom slučaju, postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$n-3p = 2a^2, \quad n-p = 2b^2 \qquad \text{ili} \quad n-3p = -2b^2, \quad n-p = -2a^2.$$

U oba slučaja oduzimanjem dobivamo

$$2p = (n-p) - (n-3p) = 2b^2 - 2a^2 = 2(b-a)(b+a),$$

odnosno $p = (b-a)(b+a)$. Kako je $b+a > 0$, te $b+a > b-a$, uzimajući u obzir faktorizacije broja p, jedina je mogućnost $b-a = 1$ i $b+a = p$ odnosno $b = \dfrac{1+p}{2}$ i $a = \dfrac{-1+p}{2}$. 1 bod

U svakom slučaju, za m znamo da je $m = ab = \dfrac{p^2-1}{2}$. Zaključujemo da je nužno p neparan. 1 bod

U slučaju $n-3p = 2a^2$ i $n-p = 2b^2$ računamo da je $n = \dfrac{p^2+4p+1}{2}$, a to je moguće za svaki neparan prost broj p. 1 bod

U slučaju $n-3p = -2b^2$ i $n-p = -2a^2$ računamo da je $n = \dfrac{4p-1-p^2}{2}$. 1 bod

Kao u prvom rješenju dokažemo da je to moguće samo za $p = 3$. 2 boda

Konačno, kao u prvom rješenju, zaključujemo

- za $p = 2$ jednadžba nema rješenja
- za $p = 3$ jednadžba ima dva rješenja $(m, n) = (4, 1)$ i $(4, 11)$
- za $p \geqslant 5$ jednadžba ima jedno rješenje oblika $(m, n) = \left(\dfrac{p^2-1}{2}, \dfrac{p^2+4p+1}{2}\right)$.