ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako je $A=456+457+458+\ldots+554+555$ i $B=0.04^{3}\cdot\frac{1}{25^{2}}\cdot 125^{4}$, koliko je $\frac{A}{B}$?

Rješenje.

Primjenom Gaussove dosjetke računamo zbroj 100 uzastopnih brojeva od 456 do 555:

$$\begin{aligned}A&=456+457+458+\ldots+554+555\\&=(456+555)+(457+554)+\ldots+(505+506)=50\cdot 1011=50550\end{aligned}$$

2 boda

Svođenjem na potencije s bazom 5 računamo vrijednost izraza B.

$B=0.04^{3}\cdot\frac{1}{25^{2}}\cdot 125^{4}=(5^{-2})^{3}\cdot\frac{1}{(5^{2})^{2}}\cdot(5^{3})^{4}=5^{-6}\cdot 5^{-4}\cdot 5^{12}=5^{2}=25$ 3 boda

Konačno, tražena vrijednost iznosi: $\frac{A}{B}=\frac{50550}{25}=2022.$ 1 bod

Napomena: Vrijednost izraza A učenik može izračunati primjenjujući formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva i može dobiti sve bodove bez da tu formulu dokazuje:

$$\begin{aligned}A&=(1+2+\ldots+555)-(1+2+\ldots+455)\\&=\frac{555\cdot 556}{2}-\frac{455\cdot 456}{2}=154290-103740=50550.\end{aligned}$$

Zadatak B-1.2.

Dvije cijevi napune bazen za 4 sata. Samo jedna od tih cijevi napuni bazen za 5 sati i 15 minuta. Koliko vremena treba da se bazen napuni samo drugom cijevi?

Rješenje.

Ako dvije cijevi napune bazen za 4 sata, onda će one za 1 sat napuniti $\frac{1}{4}$ bazena. 1 bod

Ako jedna cijev napuni bazen za $5\frac{1}{4}$ sata, onda će ta cijev za 1 sat napuniti $\frac{1}{5\frac{1}{4}}=\frac{4}{21}$ bazena. 1 bod

Neka druga cijev napuni bazen za t sati. Tada će ona za 1 sat napuniti $\frac{1}{t}$ bazena. 1 bod

Slijedi $\frac{4}{21}+\frac{1}{t}=\frac{1}{4}$ 1 bod

$\frac{1}{t}=\frac{1}{4}-\frac{4}{21}=\frac{5}{84}$ 1 bod

$t=\frac{84}{5}=16\frac{4}{5}$ sati $=16$ sati i 48 minuta. 1 bod

Napomena:

Učenik može nakon određivanja koji dio bazena za 1 sat napune obje cijevi ili samo jedna (2 boda), zaključiti da druga cijev za 1 sat napuni $\frac{1}{4}-\frac{4}{21}=\frac{5}{84}$ bazena. Taj zaključak vrijedi 2 boda.

Nakon toga zaključak da je vrijeme potrebno da druga cijev sama napuni bazen recipročan broj dobivenom broju vrijedi 1 bod. Konačno rješenje, odnosno izračunato vrijeme potrebno drugoj cijevi da napuni bazen $\frac{84}{5}=16\frac{4}{5}$ sati $=16$ sati i 48 minuta vrijedi 1 bod.

Priznaje se vrijeme zapisano u satima ili satima i minutama.

Zadatak B-1.3.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\frac{35}{2n-5}$ cijeli broj.

Rješenje.

Razlomak će biti cijeli broj ako i samo ako je brojnik djeljiv s nazivnikom. 1 bod

To znači da nazivnik $2n-5$ može poprimiti vrijednosti:

$2n-5 \in \{-35,-7,-5,-1,1,5,7,35\}$. 2 boda

Tada je $2n \in \{-30,-2,0,4,6,10,12,40\}$, 1 bod

a $n \in \{-15,-1,0,2,3,5,6,20\}$. 1 bod

Budući je n prirodan broj, $n \in \{2,3,5,6,20\}$. 1 bod

Napomena:

Ukoliko učenik navede sve tražene brojeve bez ikakvoga obrazloženja, može dobiti najviše 2 boda. Ako je pri tome uključio 0 i/ili negativne brojeve, dobiva 1 bod, a za sve ostalo bez postupka 0 bodova. Ukoliko učenik ima sva rješenja i uvrštavanjem je za svako od njih pokazao da je traženi razlomak cijeli broj, dodijeliti 3 boda. Da bi učenik dobio svih 6 bodova, mora pokazati da su dobivena rješenja i jedina moguća rješenja, odnosno, nabrojiti sve djelitelje broja 35 (kao prethodno opisanim zaključivanjem). Ako je gledao samo pozitivne djelitelje pa je dobio rješenje $3, 5, 6, 20$, dodijeliti 4 boda.

Zadatak B-1.4.

S polazne tramvajske stanice u 5 sati ujutro kreću tri tramvaja. Prvome tramvaju treba 1 sat i 30 minuta da se vrati na polaznu stanicu, drugome 1 sat, a trećemu 40 minuta. U koliko će se sati sva tri tramvaja naći ponovo u isto vrijeme na polaznoj stanici? Koliko će se to puta dogoditi istoga dana ako tramvaji voze od 5 sati ujutro do 24 sata navečer (ne računajući prvi polazak u 5 sati ujutro)?

Prvo rješenje.

Vrijeme potrebno da se sva tri tramvaja od zajedničkog polaska vrate na polaznu stanicu u istom trenutku najmanji je zajednički višekratnik vremena koja su potrebna svakome tramvaju pojedinačno da se vrati na polaznu stanicu. 1 bod

Dakle, tražimo najmanji zajednički višekratnik od

1 sat i 30 minuta = 90 minuta, 1 sat = 60 minuta i 40 minuta, a to je broj:

$V(90, 60, 40) = 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 360.$ 2 boda

Tramvaji će se naći u isto vrijeme na polaznoj stanici svakih 360 minuta, odnosno, svakih 6 sati. 1 bod

Prvi će se put ponovo naći na polaznoj stanici u 11 sati. 1 bod

U istom će se trenutku naći na polaznoj stanici 3 puta u istom danu. 1 bod

Drugo rješenje.

Prvi će tramvaj na polaznoj stanici biti u 5:00, 6:30, 8:00, 9:30, 11:00, 12:30, 14:00, 15:30, 17:00, 18:30, 20:00, 21:30 i 23:00.

Drugi će tramvaj na polaznoj stanici biti u 5:00, 6:00, 7:00, 8:00, 9:00, 10:00, 11:00, 12:00, 13:00, 14:00, 15:00, 16:00, 17:00, 18:00, 19:00, 20:00, 21:00, 22:00, 23:00 i 24:00.

Treći će tramvaj na polaznoj stanici biti u 5:00, 5:40, 6:20, 7:00, 7:40, 8:20, 9:00, 9:40, 10:20, 11:00, 11:40, 12:20, 13:00, 13:40, 14:20, 15:00, 15:40, 16:20, 17:00, 17:40, 18:20, 19:00, 19:40, 20:20, 21:00, 21:40, 22:20, 23:00 i 23:40. 3 boda

Sva tri tramvaja istovremeno će se naći na polaznoj stanici svakih 6 sati. 1 bod

Prvi će se put ponovo naći na polaznoj stanici u 11 sati. 1 bod

To će se dogoditi 3 puta u istome danu (u 11:00, 17:00 i 23:00). 1 bod

Napomena:

Za prva 3 boda učenik mora raspisati dolaske najmanje do 11:00.

Zadatak B-1.5.

U novome postavu nekoga muzeja svaki je eksponat numeriran redom brojevima $1, 2, 3, 4, \ldots$ Ako su za numeriranje svih eksponata upotrijebljene ukupno 2022 znamenke, koliko eksponata ima novi postav muzeja?

Prvo rješenje.

Za numeriranje eksponata brojevima $1, 2, \ldots, 9$ upotrijebljeno je 9 znamenki. 1 bod

Za numeriranje eksponata brojevima $10, 11, \ldots, 99$ upotrijebljeno je $90 \cdot 2 = 180$ znamenki. 1 bod

To je ukupno 189 znamenki. Za numeriranje troznamenkastim brojevima upotrijebljeno je $2022 - 189 = 1833$ znamenki. 1 bod

Tada $1833 : 3 = 611$ eksponata ima troznamenkasti redni broj. 1 bod

Novi postav muzeja ima ukupno $9 + 90 + 611 = 710$ eksponata. 2 boda

Drugo rješenje.

Eksponati numerirani brojevima od 1 do 9 označeni su s ukupno 9 znamenki. 1 bod

Eksponati numerirani brojevima od 10 do 99 označeni su s ukupno $90 \cdot 2 = 180$ znamenki. 1 bod

Ako bi novi postav imao 999 eksponata ili više, eksponati numerirani brojevima od 100 do 999 bili bi numerirani s $3 \cdot 900 = 2700$ znamenki, a ukupan broj znamenki kojima je numerirano 999 eksponata bio bi $9+180+2700 = 2889$. Kako je ukupan broj znamenki $2022 < 2889$, slijedi da je broj eksponata troznamenkast. 1 bod

Ako je n broj eksponata i za prvih je 9 eksponata upotrijebljeno 9 znamenki, za idućih (dvoznamenkastih) 90 upotrijebljeno je 180 znamenki, onda je za preostalih $n - 99$ upotrijebljeno $3 \cdot (n - 99)$ znamenki. Kako je ukupan broj znamenki 2022, vrijedi da je

$9 + 180 + 3 \cdot (n - 99) = 2022,$ 2 boda

odnosno, $3 \cdot (n - 99) = 1833$

$n - 99 = 611.$

Konačno, ukupan broj eksponata je $n = 710$. 1 bod

Treće rješenje.

eksponati	broj znamenki	ukupno znamenki
$1 - 9$	9	9
$10 - 99$	$2 \cdot 90 = 180$	$180 + 9 = 189$

2 boda

Budući da brojevi eksponata od 100 do 999 imaju ukupno $3 \cdot 900 = 2700$ znamenki što je u ukupnom zbroju više od 2022, nadalje promatramo numeriranje po 100 eksponata.

1 bod

eksponati	broj znamenki	ukupno znamenki
$100-199$	$3 \cdot 100 = 300$	$300 + 189 = 489$
$200-299$	$3 \cdot 100 = 300$	$300 + 489 = 789$
$300-399$	$3 \cdot 100 = 300$	$300 + 789 = 1089$
$400-499$	$3 \cdot 100 = 300$	$300 + 1089 = 1389$
$500-599$	$3 \cdot 100 = 300$	$300 + 1389 = 1689$
$600-699$	$3 \cdot 100 = 300$	$300 + 1689 = 1989$

1 bod

Budući da brojevi eksponata od 700 do 799 imaju ukupno $3 \cdot 100 = 300$ znamenki što je u ukupnom zbroju više od 2022, nadalje promatramo numeriranje po 10 eksponata.

1 bod

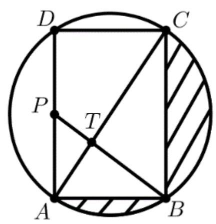
eksponati	broj znamenki	ukupno znamenki
$700-709$	$3 \cdot 10 = 30$	$1989 + 30 = 2019$

Budući da brojevi eksponata do 709 imaju ukupno 2019 znamenki, a do ukupnog broja 2022 nedostaju samo tri znamenke, posljednji je sljedeći eksponat numeriran brojem 710.

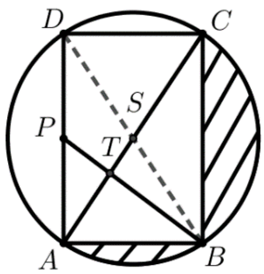
Novi postav muzeja ima ukupno 710 eksponata. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Pravokutniku $ABCD$ opisana je kružnica. Točka P polovište je stranice $\overline{AD}$. Dužina $\overline{BP}$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki T. Ako je $|BT| = 10\,\text{cm}$ i $|AP| = 9\,\text{cm}$, kolika je površina osjenčanoga dijela na slici?



Prvo rješenje.



Točka P polovište je dužine $\overline{AD}$ pa je $|AD| = |BC| = 2|AP| = 18\,\text{cm}$. 1 bod

Točka S sjecište je dijagonala $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$ pravokutnika $ABCD$. To znači da je točka S polovište dužine $\overline{BD}$ pa zaključujemo da su dužine $\overline{BP}$ i $\overline{AS}$ težišnice trokuta ABD. 1 bod

Tada je točka T težište trokuta ABD. 1 bod

Težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ gledajući od vrha trokuta. Stoga je:

$|BT| = \dfrac{2}{3}\ |BP|$, odnosno, $10 = \dfrac{2}{3}\ |BP|$ cm, pa je $|BP| = 15\,\text{cm}$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku u trokutu ABP vrijedi:

$|BP|^2 = |AB|^2 + |AP|^2$ pa je $|AB| = 12\,\text{cm}$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku u trokutu ABD (ili ABC) vrijedi

$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2$ pa je $|BD| = |AC| = \sqrt{468} = 6\sqrt{13}\,\text{cm}$. 1 bod

Središte pravokutniku opisane kružnice nalazi se u sjecištu dijagonala S i $2r = |BD|$ pa je $r = 3\sqrt{13}\,\text{cm}$. 1 bod

Površina kruga opisanoga pravokutniku je $P_K = r^2\pi = 117\pi\,\text{cm}^2$. 1 bod

Površina pravokutnika je $P_P = |AB| \cdot |AD| = 216\,\text{cm}^2$. 1 bod

Površina osjenčanoga dijela je $P = \dfrac{1}{2}(P_K - P_P) = \dfrac{1}{2}(117\pi - 216)\,\text{cm}^2$. 1 bod

Drugo rješenje.

Točka P polovište je dužine $\overline{AD}$ pa je $|AD| = |BC| = 2|AP| = 18\,\text{cm}$. 1 bod

Uočimo sličnost trokuta ATP i CTB. Kutovi oba trokuta s vrhom u točki T vršni su kutovi, a kutovi $\sphericalangle PAT$ i $\sphericalangle BCT$ kutovi su s paralelnim kracima. Navedeni su trokuti slični prema poučku KK. 1 bod

Iz sličnosti slijedi

$$\frac{|PT|}{10} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

1 bod

pa je $|PT| = 5\,\text{cm}$, a $|BP| = 5 + 10 = 15\,\text{cm}$. 1 bod

Dalje je postupak i bodovanje kao u prvome rješenju.

Zadatak B-1.7.

Dva Talijana i tri Engleza traže smještaj u hotelu kao vjerni gosti. U hotelu za smještaj svojih vjernih gostiju čuvaju 8 soba, od čega su u 3 sobe zidovi obojeni plavom bojom, u 3 sobe zelenom bojom, a u preostale 2 sobe žutom bojom. Talijani žele biti ili u plavoj ili u žutoj sobi, a Englezi ili u zelenoj ili u žutoj sobi. Na koliko se načina dvojici Talijana i trojici Engleza mogu dodijeliti sobe tako da svatko od njih bude sam u jednoj sobi?

Rješenje.

1\. slučaj:

Talijanima se dodijele dvije plave sobe.

To se može napraviti na $3 \cdot 2 = 6$ načina. 1 bod

Od 3 zelene i 2 žute sobe Englezima možemo 3 sobe dodijeliti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. 1 bod

To je ukupno $6 \cdot 60 = 360$ načina. 1 bod

2\. slučaj:

Talijanima se dodijele dvije žute sobe.

To se može napraviti na $2 \cdot 1 = 2$ načina. 1 bod

Tri zelene sobe dodijele se Englezima na na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. 1 bod

To je ukupno $2 \cdot 6 = 12$ načina. 1 bod

3. slučaj:

Talijanima se dodijele jedna plava i jedna žuta soba.

Treba odabrati kojemu se od dva Talijana dodjeljuje plava soba (2 mogućnosti) i koju će od plavih soba dobiti (3 mogućnosti). Zatim se drugome Talijanu dodjeljuje jedna od 2 žute sobe (2 mogućnosti).

To se može napraviti na $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ načina. 1 bod

Od 3 zelene i 1 žute sobe Englezima možemo tri sobe dodijeliti na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina. 1 bod

To je ukupno $12 \cdot 24 = 288$ načina. 1 bod

Ukupan broj načina dodjele soba jest $360 + 12 + 288 = 660$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Izračunajte $\sqrt{1-A^{-1}}$ ako je $A=\dfrac{\sqrt{2022}+1}{\sqrt{2022}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{2022}+1}$.

Rješenje.

Svođenjem na zajednički nazivnik izračunat ćemo vrijednost izraza A.

$$A=\frac{\sqrt{2022}+1}{\sqrt{2022}-1}-\frac{2}{\sqrt{2022}+1}=\frac{(\sqrt{2022}+1)^2-2(\sqrt{2022}-1)}{(\sqrt{2022}-1)(\sqrt{2022}+1)}$$ 1 bod

$$=\frac{2022+2\sqrt{2022}+1-2\sqrt{2022}+2}{2022-1}$$ 2 boda

$$=\frac{2025}{2021}.$$ 1 bod

Tada je:

$$\sqrt{1-A^{-1}}=\sqrt{1-\frac{2021}{2025}}=\sqrt{\frac{4}{2025}}=\frac{2}{45}.$$ 2 boda

Zadatak B-2.2.

Filip je provjeravao rezultate množenja prirodnih brojeva svoje mlađe sestre Barbare. U jednom je zadatku primijetio da je Barbara u rezultatu napisala znamenku stotica za jedan veću nego što je točno. Prilikom provjere podijelio je Barbarin umnožak s većim faktorom i dobio količnik 24 i ostatak 12. Koja je dva broja množila Barbara ako im je razlika 2?

Rješenje.

Brojeve čiji umnožak Barbara treba izračunati označimo s a i b, gdje je a veći faktor. Tada je točan umnožak ab, a onaj koji je Barbara izračunala $ab+100$. 1 bod

Filip je djeljenjem Barbarinog umnoška brojem a dobio količnik 24 i ostatak 12, pa vrijedi $ab+100=24a+12$. 1 bod

Osim toga, vrijedi $a-b=2$, odnosno $b=a-2$ pa je 1 bod
$a(a-2)+100=24a+12$, a zatim $a^2-26a+88=0$. 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $a_1=22$, $a_2=4$, a tada je $b_1=20$, $b_2=2$. 1 bod

Ako Barbara umnošku brojeva 4 i 2 doda 100, Filip ne može pri dijeljenju sa 4 dobiti ostatak 12, pa je Barbara množila brojeve 20 i 22. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Grafovi dviju linearnih funkcija imaju nagibe 3 i $\frac{1}{3}$, a sijeku se u točki $(3, 3)$. Odredite površinu trokuta koji je omeđen tim grafovima i osi x.

Rješenje.

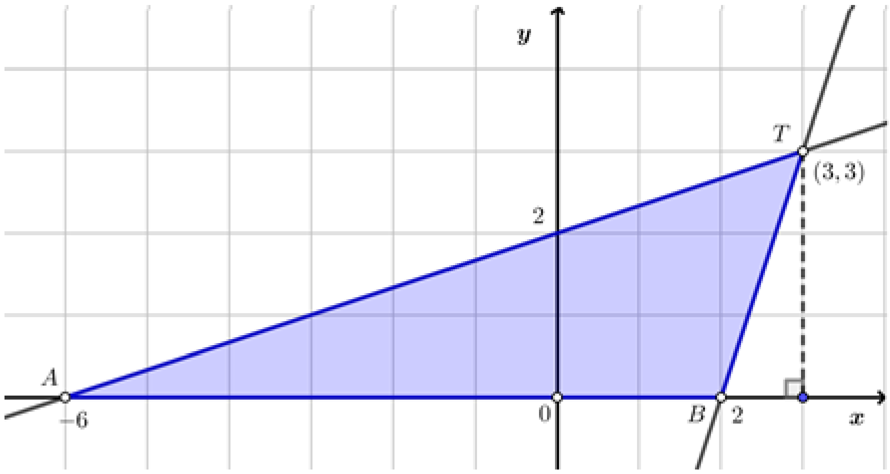
Grafovi danih linearnih funkcija su pravci s jednadžbom $y = kx + l$.
Nagib k je zadan za oba pravca kao i jedna točka koja pripada tim pravcima. Stoga možemo odrediti jednadžbe zadanih pravaca.

$p_1 \ldots y = 3x + l$, odnosno $3 = 9 + l$ pa je $l = -6$, a jednadžba prvog pravca $y = 3x - 6$.

1 bod

Analogno i za drugi pravac: $p_2 \ldots y = \frac{1}{3}x + l$, odnosno $3 = 1 + l$ pa je $l = 2$, a jednadžba drugog pravca $y = \frac{1}{3}x + 2$. 1 bod

Skica tražene površine jest:



Sjecište pravca p_1 s osi x je točka $B(2, 0)$, a pravca p_2 točka $A(-6, 0)$. 2 boda

Površina trokuta ABT dana je izrazom:

$$P = \frac{d(A, B) \cdot y_T}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12.$$ 2 boda

Napomena: Površina trokuta može se izračunati i korištenjem koordinatne metode.

Zadatak B-2.4.

Andro i Leo pogađaju četveroznamenkasti broj koji je onaj drugi zamislio. Pri tome moraju otkriti neke podatke o svom broju. Androv broj ima sve znamenke različite te su mu prva i zadnja znamenka neparni brojevi. Leov broj ne mora imati sve znamenke različite, ali sve su mu znamenke iste parnosti i različite od 0. Prema otkrivenim podacima, tko ima veće šanse pogoditi broj koji je onaj drugi zamislio?

Rješenje.

Androv broj se može zapisati kao $\overline{abcd}$. Pri tome znamenka a se može odabrati na 5 načina (jer to mora biti neparan broj), a znamenku d na 4 načina budući da je iste parnosti, a različita od a. 1 bod

Za znamenku b preostaje 8 mogućnosti odabira (sve znamenke osim dvije izabrane), a za znamenku c 7 mogućnosti. 1 bod

Stoga, Leo treba pogoditi jedan od $5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1120$ mogućih brojeva. 1 bod

Leov broj ima sve četiri znamenke iste parnosti i mogu se ponavljati. Među 10 znamenaka ima 5 neparnih znamenka i četiri parne znamenke (bez nule). 1 bod

Zato Andro treba pogoditi jedan od $5^4 + 4^4 = 881$ brojeva. 1 bod

Budući da Andro bira između manje brojeva on ima više šansi od Lea pogoditi protivnikov broj. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Od žice duljine 4.5 metra treba napraviti šest ukrasa, tri u obliku pravilnog šesterokuta i tri u obliku jednakostraničnog trokuta. Svi šesterokuti, odnosno trokuti su međusobno sukladni. Odredite duljine stranica šesterokuta i trokuta tako da zbroj površina svih likova bude minimalan, a cijela žica upotrebljena.

Rješenje.

Neka je duljina stranice šesterokuta a, a duljina stranice trokuta b.

Ukupan opseg svih šesterokuta je $3 \cdot 6a$. Ukupan opseg svih jednakostraničnih trokuta je $3 \cdot 3b$. Tada je $18a + 9b = 450$, $b = 50 - 2a$ ako metre pretvorimo u centimetre. (u protivnom $b = 0.5 - 2a$) 1 bod

Kako je $P_{šesterokuta} = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a $P_{trokuta} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ ukupna je površina jednaka

$$P = 3 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{(50-2a)^2\sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3(625 - 50a + a^2)\sqrt{3}$$ 1 bod

odnosno

$$P = \frac{15}{2}a^2\sqrt{3} - 150a\sqrt{3} + 1875\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{2}(a^2 - 20a + 250).$$ 1 bod

Prikazali smo ukupnu površinu kao kvadratnu funkciju po varijabli a.

Treba odrediti broj a za koji funkcija postiže svoju minimalnu vrijednost, a to je apscisa tjemena grafa te funkcije $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$, odnosno 1 bod

$$a_0 = \frac{20}{2} = 10.$$ 1 bod

Tada su tražene duljine jednake $a = 10\ cm$, $b = 30\ cm$ (ili $a = 0.1\ m$, $b = 0.3\ m$). 1 bod

Zadatak B-2.6.

Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{4y^2+3y}&=-\frac{2}{3},\\
\frac{3}{x^2+2x}+\frac{2}{4y^2+3y}&=3.
\end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Da bi sustav imao rješenje mora vrijediti: $x^2+2x\neq 0,\ 4y^2+3y\neq 0$, odnosno 1 bod

$x(x+2)\neq 0,\ y(4y+3)\neq 0$, pa je $x\neq 0,\ x\neq -2,\ y\neq 0,\ y\neq -\frac{3}{4}$. 1 bod

Uvođenjem supsticije $u=\dfrac{1}{x^2+2x}$, $v=\dfrac{1}{4y^2+3y}$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned}
u-v&=-\frac{2}{3}\\
3u+2v&=3
\end{aligned}$$

čije rješenje je $u=\frac{1}{3}$, $v=1$. 2 boda

Iz $\dfrac{1}{x^2+2x}=\dfrac{1}{3}$ slijedi jednadžba $x^2+2x-3=0$ kojoj su rješenja $x=-3$ i $x=1$. 2 boda

Iz $\dfrac{1}{4y^2+3y}=1$ slijedi jednadžba $4y^2+3y-1=0$ kojoj su rješenja $y=-1$ i $y=\frac{1}{4}$. 2 boda

Rješenja sustava su uređeni parovi $(-3,-1)$, $\left(-3,\dfrac{1}{4}\right)$, $(1,-1)$, $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$. 2 boda

Napomena: Ako učenik ne napiše početne uvjete, treba imati vidljivu provjeru rješenja da bi dobio prva dva boda.

Drugo rješenje.

Da bi sustav imao rješenje mora vrijediti: $x^2+2x\neq 0,\ 4y^2+3y\neq 0$, odnosno 1 bod

$x(x+2)\neq 0,\ y(4y+3)\neq 0$, pa je $x\neq 0,\ x\neq -2,\ y\neq 0,\ y\neq -\frac{3}{4}$. 1 bod

Pomnožimo prvu jednadžbu s 2 i zbrojimo jednadžbe. Slijedi: $\dfrac{5}{x^2+2x}=\dfrac{5}{3}$. 2 boda

Iz ovog izraza slijedi jednadžba $x^2+2x-3=0$ kojoj su rješenja $x=-3$ i $x=1$. 2 boda

Uvršatavnjem $x=-3$ ili $x=1$ u bilo koju od polaznih jednadžbi dobiva se $\dfrac{1}{4y^2+3y}=1$. Iz ovog izraza slijedi jednadžba $4y^2+3y-1=0$ kojoj su rješenja $y=-1$ i $y=\frac{1}{4}$. 2 boda

Rješenja sustava su uređeni parovi $(-3,-1)$, $\left(-3,\dfrac{1}{4}\right)$, $(1,-1)$, $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$. 2 boda

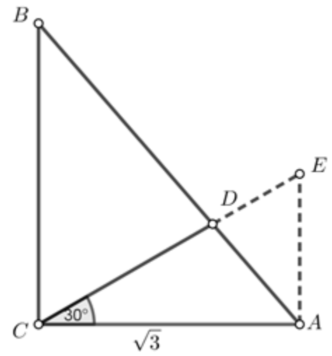
Napomena: Ako učenik ne napiše početne uvjete, treba imati vidljivu provjeru rješenja da bi dobio prva dva boda.

Zadatak B-2.7.

Pravac koji prolazi vrhom C pravog kuta trokuta ABC s kraćom katetom zatvara kut od 30° i dijeli hipotenuzu u omjeru $1:2$. Ako je duljina kraće katete $\sqrt{3}$, odredite duljinu hipotenuze.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da je $|AC|$ kraća kateta pravokutnog trokuta. Vrhom A položimo pravac koji pravac CD siječe u točki E tako da je kut $\sphericalangle CAE$ pravi kut.



2 boda

Trokut CAE je pravokutan pa redom slijedi:

$\cos 30^\circ = \dfrac{|CA|}{|CE|}$, odnosno $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{|CE|}$ pa je $|CE| = 2$, 2 boda

pa prema Pitagorinu poučku slijedi $|AE| = 1$. 1 bod

(isto se može izračunati i ako se trokut CAE gleda kao pola jednakostraničnog trokuta)

Trokuti ADE i CDB su slični jer imaju dva ista kuta: $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ADE$ jer su to vršni kutovi, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBD$ jer su to kutovi s paralelnim kracima. 2 boda

Tada je:

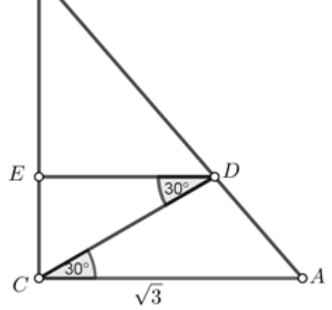
$$|AE| : |BC| = |AD| : |DB| = 1 : 2 \Rightarrow |BC| = 2.$$ 2 boda

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC dobivamo da je duljina hipotenuze

$$|AB| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Povucimo paralelu s kraćom katetom kroz točku D (tj. okomicu na BC):



2 boda

Trokuti ABC i DBE su slični prema poučku KK jer je $\sphericalangle DEB = \sphericalangle ACB = 90°$, a kut u vrhu B im je zajednički kut. 2 boda

Tada je $|ED| : |CA| = |BD| : |BA| = 2 : 3$ pa je $|ED| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 1 bod

Trokut DEC je pravokutan, $\sphericalangle DCE = 60°$, $\sphericalangle CDE = 30°$ pa redom slijedi: 1 bod

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{|CE|}{|ED|},$$

$$|CE| = \operatorname{tg} 30° \cdot |ED| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}.$$ 1 bod

Budući da je $|BE| : |EC| = 2 : 1$ (iz sličnosti trokuta ABC i DBE), slijedi

$$|BE| = \frac{4}{3}, \qquad |BC| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$ 2 boda

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC dobivamo da je duljina hipotenuze

$$|AB| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}.$$ 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

15. veljače 2022.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Izračunajte: $\dfrac{1}{\left(337^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{337}-\sqrt{6}}{337^{\frac{3}{2}}-6^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}$.

Rješenje.

Zapišimo dani izraz bez negativnih eksponenata, a potencije s racionalnim eksponentima zapišimo pomoću korijena (ili obratno). Nakon toga ćemo primijeniti formule za kvadrat binoma i razliku kubova. Tada redom dobivamo:

$$\frac{1}{\left(337^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{337}-\sqrt{6}}{337^{\frac{3}{2}}-6^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}=\left(\sqrt{337}+\sqrt{6}\right)^{2}-\frac{(\sqrt{337})^{3}-(\sqrt{6})^{3}}{\sqrt{337}-\sqrt{6}}=$$ 2 boda

$$337+2\sqrt{337}\cdot\sqrt{6}+6-\frac{(\cancel{\sqrt{337}-\sqrt{6}})(337+\sqrt{337}\cdot\sqrt{6}+6)}{\cancel{\sqrt{337}-\sqrt{6}}}=$$ 2 boda

$$343+2\sqrt{2022}-(343+\sqrt{2022})=\sqrt{2022}.$$ 2 boda

Zadatak B-3.2.

Ako je $\log_2\left[\log_3\left(\log_4 x\right)\right]=\log_3\left[\log_2\left(\log_4 y\right)\right]=\log_4\left[\log_3\left(\log_2 z\right)\right]=0$, izračunajte $\log_y\left(\log_z x\right)$.

Rješenje.

Iz $\log_2\left[\log_3\left(\log_4 x\right)\right]=0$ primjenom definicije logaritma dobivamo:

$$\log_3\left(\log_4 x\right)=1,$$

$$\log_4 x=3,$$

$$x=4^3.$$ 2 boda

Analogno iz $\log_3\left[\log_2\left(\log_4 y\right)\right]=0$ dobivamo:

$$\log_2\left(\log_4 y\right)=1,$$

$$\log_4 y=2,$$

$$y = 4^2.$$ 1 bod

Iz $\log_4 [\log_3 (\log_2 z)] = 0$ slijedi:

$$\log_3 (\log_2 z) = 1,$$

$$\log_2 z = 3,$$

$$z = 2^3.$$ 1 bod

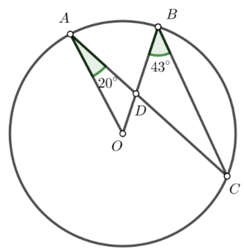
Sada je:

$$\log_y (\log_z x) = \log_{16} (\log_8 64) = \log_{16} 2 = \frac{1}{4}.$$ 2 boda

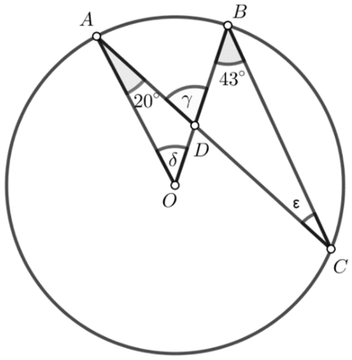
Napomena: Bilo koja točno izračunata vrijednost x, y, z boduje se s dva boda, a preostale dvije s po jednim bodom.

Zadatak B-3.3.

Točke A, B i C nalaze se na kružnici sa središtem u točki O, kao na slici. Tetiva $\overline{AC}$ siječe polumjer $\overline{OB}$ u točki D. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle BDA$ ako je $\sphericalangle OAC = 20°$, $\sphericalangle OBC = 43°$.



Prvo rješenje.



Prema poučku o obodnom i središnjem kutu je, uz oznake kao na slici, $\delta = 2\varepsilon$.
Također je 1 bod

$$\sphericalangle ADO = \sphericalangle CDB = \theta.$$ 1 bod

Iz zbroja kutova trokuta AOD i BDC dobivamo:

$$20° + \delta + \theta = 43° + \frac{\delta}{2} + \theta,$$

$$\frac{\delta}{2} = 43° - 20° = 23°,$$

$$\delta = 46^\circ. \qquad \text{2 boda}$$

Dakle,

$$\theta = 180^\circ - \delta - 20^\circ = 180^\circ - 46^\circ - 20^\circ = 114^\circ, \qquad \text{1 bod}$$

te je

$$\gamma = 180^\circ - \theta = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ. \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu je, uz oznake kao na slici, $\delta = 2\varepsilon$. 1 bod

Kut γ je istovremeno vanjski kut trokuta AOD i trokuta BDC. 1 bod

Stoga je jednak zbroju preostalih unutarnjih kutova u oba trokuta, pa je

$$20^\circ + \delta = 43^\circ + \varepsilon, \qquad \text{1 bod}$$

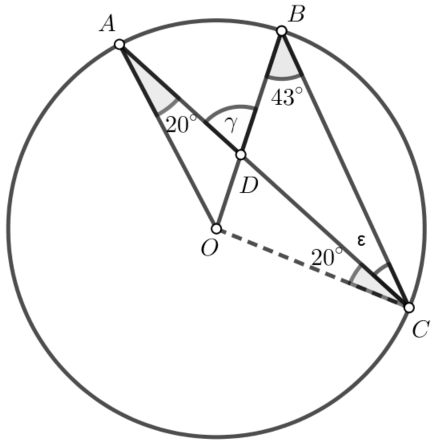
odnosno

$$20^\circ + 2\varepsilon = 43^\circ + \varepsilon. \qquad \text{1 bod}$$

Odatle je $\varepsilon = 23^\circ$, a traženi kut 1 bod

$$\gamma = 43^\circ + 23^\circ = 66^\circ. \qquad \text{1 bod}$$

Treće rješenje.



Trokut OAC je jednakokračan trokut pa je $\sphericalangle ACO = \sphericalangle OAC = 20^\circ$. 2 boda

Analogno, kut $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OBC = 43^\circ$. Tada je

$$\varepsilon = 43^\circ - 20^\circ = 23^\circ, \qquad \text{2 boda}$$

a traženi kut γ je vanjski kut trokuta DCB pa je

$$\gamma = 23^\circ + 43^\circ = 66^\circ. \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-3.4.

Matko je pripremajući se za natjecanje otkrio knjižaru s dobrom matematičkom literaturom. Knjižara nudi 7 različitih knjiga sa zadacima samo iz geometrije, 4 samo iz teorije brojeva, 5 samo iz kombinatorike. Nadalje, u ponudi su i knjige sa zadacima iz točno dva područja. Tako je 6 različitih knjiga sa zadacima iz teorije brojeva i kombinatorike te 7 sa zadacima iz geometrije i kombinatorike. Na koliko načina Matko može odabrati literaturu iz dva od svih navedenih područja ako može kupiti najviše dvije knjige?

Rješenje.

Matko može kupiti ili jednu ili dvije knjige. 1 bod

Odluči li se za kupnju jedne knjige nju može izabrati na $6 + 7 = 13$ načina. 1 bod

Odluči li se kupiti dvije knjige, broj načina računamo ovisno o tome koja je dva područja odabrao.

Može odabrati svaku knjigu iz samo jednog područja ili jednu knjigu koja sadrži samo jedno područje, a drugu knjigu koja sadrži dva područja, od kojih je jedno isto kao u prvoj knjizi. 1 bod

Knjigu iz geometrije i knjigu iz teorije brojeva može izabrati na $7 \cdot 4 = 28$ načina.

Knjigu iz geometrije i knjigu iz kombinatorike može izabrati na $7 \cdot 5 = 35$ načina.

Knjigu iz teorije brojeva i knjigu iz kombinatorike može izabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. 1 bod

Knjigu iz samo geometrije i knjigu iz geometrije i kombinatorike može izabrati na $7 \cdot 7 = 49$ načina.

Knjigu iz samo teorije brojeva i knjigu iz teorije brojeva i kombinatorike može izabrati na $4 \cdot 6 = 24$ načina.

Knjigu iz samo kombinatorike i knjigu iz teorije brojeva i kombinatorike može izabrati na $5 \cdot 6 = 30$ načina.

Knjigu iz samo kombinatorike i knjigu iz geometrije i kombinatorike može izabrati na $5 \cdot 7 = 35$ načina. 1 bod

Učenik može odabrati i dvije knjige od 6 različitih iz kombinatorike i teorije brojeva na $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ načina i dvije knjige od 7 različitih iz geometrije i kombinatorike na $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ način.

Konačno, ukupno se Matko može opskrbiti literaturom iz dvaju područja na $13 + 28 + 35 + 20 + 49 + 24 + 30 + 35 + 15 + 21 = 270$ načina. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Ako je $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$, $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, koliko je $(\sin x - \cos x)^{10}$?

Prvo rješenje.

Iz jednakosti $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$ slijedi

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -2, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = -2.$$

Budući da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, slijedi 1 bod

$$\cos x \sin x = -\frac{1}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Sada je:

$$(\sin x - \cos x)^{10} = ((\sin x - \cos x)^2)^5 = \qquad \text{1 bod}$$

$$(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x)^5 = (1 - 2\sin x \cos x)^5 = \qquad \text{1 bod}$$

$$\left(1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^5 = 32. \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Iz $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$ dobivamo $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = -2$, odnosno $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$ odakle slijedi da je $\operatorname{tg} x = -1$. 2 boda

Kako je $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ iz $\operatorname{tg} x = -1$ slijedi $\sin x = -\cos x$. 1 bod

Uvrstimo li $\sin x = -\cos x$ u $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dobivamo da je $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$ kao i $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$. 1 bod

Nadalje, iz $\sin x = -\cos x$ i $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ slijedi

$$(\sin x - \cos x)^{10} = (-2\cos x)^{10} = 2^{10}(\cos^2 x)^5 = 2^{10} \cdot \frac{1}{2^5} = 32. \qquad \text{2 boda}$$

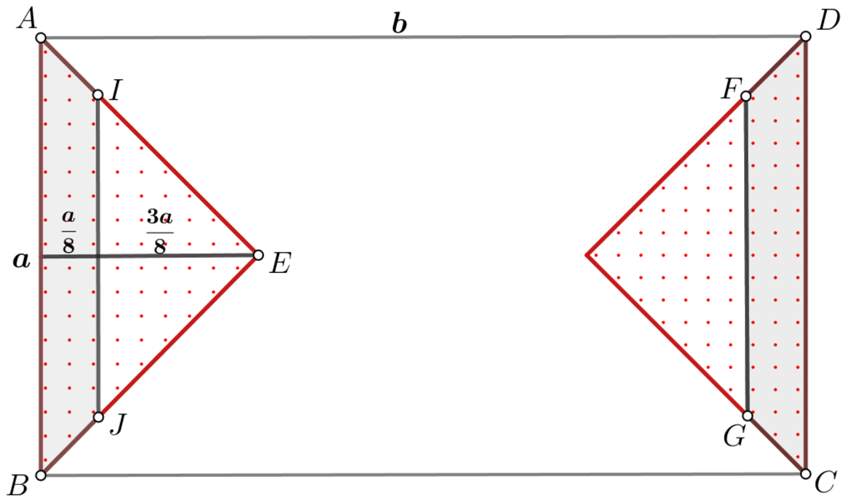
Napomena: Dovoljno je odrediti ili $\sin^2 x$ ili $\cos^2 x$.

Zadatak B-3.6.

Zadan je pravokutnik sa stranicama duljina a i b, $a = \dfrac{4}{7}b$. Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana točka zadanog pravokutnika bude bliža kraćoj stranici i da je od nje udaljena za manje od $\dfrac{a}{8}$.

Rješenje.

Pravci AI, BJ, CG i DF su redom simetrale kutova u vrhovima A, B, C i D. 2 boda



Kako je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od njegovih krakova, točke koje su bliže stranici a nalaze se u istočkanom dijelu kako je prikazano na skici pravokutnika. 2 boda

Točke koje su od stranice a udaljene za manje od $\frac{a}{8}$ su točke unutar sukladnih trapeza $ABJI$ i $CDFG$. 2 boda

Trokut ABE je jednakokračan pravokutni trokut pa je njegova visina jednaka $\frac{a}{2}$. 1 bod

Kako su trokuti ABE i IJE slični s koeficijentom sličnosti $k = \frac{\frac{3a}{8}}{\frac{a}{2}} = \frac{3}{4}$ zaključujemo da je duljina dužine $\overline{IJ}$ jednaka $\frac{3}{4}a$. 1 bod

Izračunajmo zbroj površina tih trapeza $ABJI$ i $CDFG$.

$$P_{ABJI} + P_{CDFG} = 2P_{ABJI} = 2 \cdot \frac{a + \frac{3}{4}a}{2} \cdot \frac{a}{8} = \frac{7}{32}a^2.$$ 1 bod

Vjerojatnost traženog događaja je :

$$p = \frac{\frac{7}{32}a^2}{ab} = \frac{7a}{32b} = \frac{7}{32} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{8}.$$ 1 bod

Napomena: Za prvih 6 bodova učenik umjesto navođenja, može na slici jasno označiti simetrale kutova i područje koje je povoljno za traženi događaj.

Ako učenik nije nacrtao simetrale kutova i krivo je označio područje, ali je vjerojatnost da točka pripada njegovom označenom području točno izračunata, učenik može dobiti najviše 2 boda.

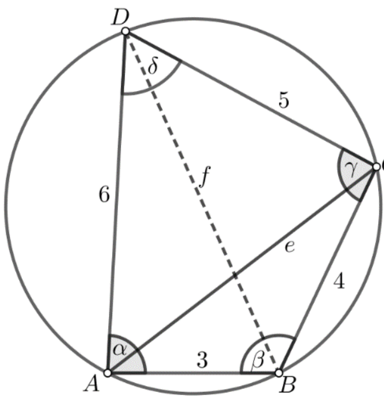
Zadatak B-3.7.

Duljine stranica tetivnog četverokuta $ABCD$ su $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|CD| = 5$ cm i $|DA| = 6$ cm. Odredite kosinuse šiljastih kutova i površinu četverokuta $ABCD$.

Rješenje.

Promotrimo skicu.

Neka je $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle DCB = \gamma$, $\sphericalangle ADC = \delta$.



U tetivnom je četverokutu zbroj nasuprotnih kutova jednak $180°$, pa vrijedi $\beta = 180° - \delta$ i $\gamma = 180° - \alpha$. 1 bod

Za njihove kosinuse vrijedi

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \cos(180° - \delta) = -\cos\delta, \\ \cos\gamma &= \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (*)$$ 1 bod

Dakle, tražimo dva susjedna kuta s pozitivnim kosinusom.

Iz trokuta ACD primjenom poučka o kosinusu dobivamo:

$$e^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD| \cdot |CD| \cdot \cos\delta,$$

$$e^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\delta,$$

$$e^2 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos\delta,$$

$$e^2 = 61 - 60 \cdot \cos\delta. \qquad (**)$$ 1 bod

Analogno, iz trokuta ABC primjenom poučka o kosinusu dobivamo:

$$e^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos\beta,$$

$$e^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\beta,$$

$$e^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \cos\beta,$$

$$e^2 = 25 - 24 \cdot \cos\beta,$$

a zbog (∗) slijedi

$$e^2 = 25 - 24 \cdot \cos\beta = 25 - 24 \cdot \cos(180^\circ - \delta) = 25 + 24\cos\delta. \qquad (***)$$ 1 bod

Iz jednakosti (∗∗) i (∗ ∗ ∗) dobivamo

$$61 - 60 \cdot \cos\delta = 25 + 24\cos\delta,$$

odakle slijedi da je $\cos\delta = \frac{3}{7}$. 1 bod

Analogno, se iz trokuta ABD i BCD primjenom poučka o kosinusu dobije

$$6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\cos\alpha = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5\cos(180^\circ - \alpha),$$

odnosno $\cos\alpha = \frac{1}{19}$.

Dakle, traženi kosinusi su $\cos\alpha = \frac{1}{19}$ i $\cos\delta = \frac{3}{7}$. Preostala dva kuta imaju negativne kosinuse zbog (∗). 2 boda

Iz $\cos\delta = \frac{3}{7}$ slijedi da je

$$\sin\delta = \sqrt{1 - \cos^2\delta} = \sqrt{1 - \frac{9}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}.$$ 1 bod

Površina četverokuta $ABCD$ jednaka zbroju površina trokuta ACD i ABC, pa je

$$P_{ABCD} = P_{ACD} + P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \sin\delta + \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta.$$ 1 bod

Iz $\sin\beta = \sin(180^\circ - \delta) = \sin\delta$, slijedi

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} = \frac{30\sqrt{10}}{7} + \frac{12\sqrt{10}}{7} = 6\sqrt{10}\ cm^2.$$ 1 bod

Napomena: Površinu možemo na isti način izračunati i kao zbroj površina trokuta ABD i BCD:

$$\sin\gamma = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{19^2}}) = \frac{6\sqrt{10}}{19},$$

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \sin\gamma =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{6\sqrt{10}}{19} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{6\sqrt{10}}{19} = 6\sqrt{10}\ cm^2.$$

Također, učenik može primijeniti i Heronovu formulu za površinu tetivnog četverokuta:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{10}\ cm^2,$$

gdje je $s = 9$ poluopseg četverokuta $ABCD$.

Točno izračunata površina na bilo koji način vrijedi tri boda.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu $\binom{x+1}{x-2}+2\binom{x-1}{3}=7(x-1)$.

Prvo rješenje.

Zbog definicije binomnih koeficijenata mora vrijediti $x-1 \geqslant 3$, odnosno $x \geqslant 4$. 1 bod

Koristeći svojstvo binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ zapisat ćemo danu jednadžbu u obliku:

$\binom{x+1}{x+1-x+2}+2\binom{x-1}{3}=7(x-1)$, odnosno

$\binom{x+1}{3}+2\binom{x-1}{3}=7(x-1)$. 1 bod

Primjenom pravila za računanje binomnih koeficijenata dobivamo

$\frac{(x+1)x(x-1)}{6}+2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}=7(x-1)$, a nakon dijeljenja s $(x-1) \neq 0$ slijedi

$\frac{(x+1)\,x}{6}+2\frac{(x-2)\,(x-3)}{6}=7$ 1 bod

Ova se jednadžba svodi na kvadratnu $x^2-3x-10=0$, 1 bod

čija su rješenja $x_1=5, x_2=-2$. 1 bod

Zbog početnih uvjeta rješenje zadane jednadžbe je $x=5$. 1 bod

Drugo rješenje.

Zbog definicije binomnih koeficijenata mora vrijediti $x-1 \geqslant 3$, odnosno $x \geqslant 4$. 1 bod

Koristeći definiciju binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ zapisat ćemo danu jednadžbu u obliku:

$\frac{(x+1)!}{(x-2)!3!}+2\frac{(x-1)!}{3!\,(x-4)!}=7\,(x-1)$

$\frac{(x+1)\,x\,(x-1)\,\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}\;3!}+2\frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,\cancel{(x-4)!}}{3!\;\cancel{(x-4)!}}=7\,(x-1)$ 1 bod

Nakon dijeljenja s $(x-1) \neq 0$ slijedi

$\dfrac{(x+1)\,x}{6}+2\dfrac{(x-2)\,(x-3)}{6}=7$ 1 bod

Ova se jednadžba svodi na kvadratnu $x^2-3x-10=0$, 1 bod

čija su rješenja $x_1=5, x_2=-2$. 1 bod

Zbog početnih uvjeta rješenje zadane jednadžbe je $x=5$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Odredite najmanji prirodan broj m za koji je umnožak $3^{\frac{1}{55}}\cdot 3^{\frac{4}{55}}\cdot 3^{\frac{7}{55}}\cdot\ldots\cdot 3^{\frac{3m-2}{55}}$ veći od 729?

Rješenje.

Zadani izraz $3^{\frac{1}{55}}\cdot 3^{\frac{4}{55}}\cdot 3^{\frac{7}{55}}\cdot\ldots\cdot 3^{\frac{3m-2}{55}}$ možemo zapisati kao $3^{\frac{1}{55}+\frac{4}{55}+\frac{7}{55}+\ldots+\frac{3m-2}{55}}>729=3^6$. 1 bod

Kako je baza veća od 1 za eksponente vrijedi

$\dfrac{1}{55}+\dfrac{4}{55}+\dfrac{7}{55}+\ldots+\dfrac{3m-2}{55}>6$, odnosno 1 bod

$1+4+7+\ldots+3m-2>330$. 1 bod

Na lijevoj strani je zbroj m članova aritmetičkog niza i jednak je

$$S_m=\frac{m(1+3m-2)}{2}=\frac{m(3m-1)}{2}$$

pa gornja nejednadžba prelazi u

$\dfrac{m(3m-1)}{2}>330$ odnosno $3m^2-m-660>0$. 1 bod

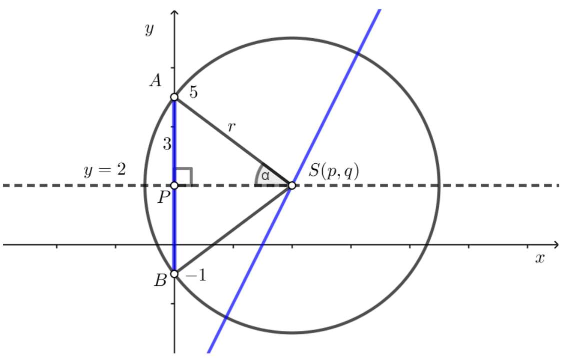
Rješenje ove nejednadžbe je skup $\left\langle-\infty,-\dfrac{44}{3}\right\rangle\cup\langle 15,\infty\rangle$. 1 bod

Najmanji prirodni broj iz tog skupa je broj 16. 1 bod

Zadatak B-4.3.

Središte kružnice koja prolazi točkama $A(0,5)$ i $B(0,-1)$ nalazi se na pravcu $y=2x-6$. Odredite tangens manjeg obodnog kuta nad tetivom $\overline{AB}$.

Prvo rješenje.



1 bod

Pravac $y = 2$ je okomit na tetivu $\overline{AB}$ i prolazi središtem zadane kružnice pa je ordinata središta $q = 2$. 2 boda

Koordinate središta (p, q) zadovoljavaju jednadžbu pravca $y = 2x - 6$, pa redom vrijedi $q = 2p - 6$,

$2 = 2p - 6$ te

$p = 4$. 1 bod

Manji obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$ jednak je polovini središnjeg kuta ASB nad tom tetivom, odnosno jednak je kutu $\alpha = \sphericalangle PSA$. 1 bod

Konačno, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Skica kao i u prvom rješenju, ali ne mora biti nacrtan pravac $y = 2$. 1 bod

Neka je središte kružnice $S(p, q)$, a polumjer r.

Ako koordinate zadanih točaka uvrstimo u jednadžbu kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ dobivamo

$p^2 + (-1-q)^2 = r^2$

$p^2 + (5-q)^2 = r^2$. 1 bod

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobiva se $(-1-q)^2 - (5-q)^2 = 0$, odnosno $q = 2$.

1 bod

Koordinate središta (p, q) zadovoljavaju jednadžbu pravca $y = 2x - 6$ pa je $q = 2p - 6$, odnosno $2 = 2p - 6$, a onda $p = 4$. 1 bod

Manji obodni kut nad tetivom $\overline{AB}$ jednak je polovini središnjeg kuta ASB nad tom tetivom, odnosno jednak je kutu $\alpha = \sphericalangle PSA$. 1 bod

Konačno, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Na ekipnom natjecanju iz matematike sudjeluje 5 timova. Svaki se tim sastoji od 3 učenika među kojima je i vođa tima. Svih 5 timova sjedi za istim okruglim stolom, tako da učenici iz istog tima sjede zajedno, jedan kraj drugoga, a vođa tima je uvijek između članova svojeg tima. Koliko je ukupno različitih razmještaja za okruglim stolom? (Razmještaje smatramo istima ako se jedan od drugog mogu dobiti rotacijom. Razmještaji su različiti ako postoji par osoba koje u jednom razmještaju sjede jedna lijevo od druge, a u drugom to nije istina.)

Rješenje.

Budući da vođe timova određuju gdje će sjediti ostatak članova tima, a takvih je 5 te je riječ o okruglom stolu, mogući broj razmještaja je $(5-1)! = 4! = 24$. 2 boda

Nakon što smo razmjestili vođe timova, ostali se oko njega mogu razmjestiti na 2 načina. Kako imamo 5 različitih timova, ukupan broj razmještaja je: $2^5 = 32$. 2 boda

Tako je ukupan broj razmještaja jednak: $4! \cdot 32 = 768$. 2 boda

Zadatak B-4.5.

Dekadski zapis broja N završava s 2022. Ako se obrišu zadnje 4 znamenke, broj koji ostaje je djelitelj broja N. Primjerice, ako se broju 22022 obrišu zadnje 4 znamenke, ostaje broj 2, a on je djelitelj broja 22022. Odredite zbroj znamenaka svih brojeva N s opisanim svojstvom.

Rješenje.

Zadani broj N možemo zapisati kao $N = m \cdot 10000 + 2022$. 1 bod

Budući da m mora biti djelitelj broja N, a iz prethodnog zapisa m je očito i djelitelj broja $m \cdot 10000$, zaključujemo da je m djelitelj broja 2022. 2 boda

Rastav broja 2022 na proste faktore je $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Njegovi su djelitelji $1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022$, a ujedno i svi mogući brojevi m. 1 bod

Tada su svi brojevi N:

$12022, 22022, 32022, 62022, 3372022, 6742022, 10112022, 20222022$. 1 bod

Traženi zbroj svih znamenaka možemo računati kao

$(2+0+2+2) \cdot 8+(1+2+3+6+3+3+7+6+7+4+1+0+1+1+2+0+2+2) = 6 \cdot 8+51 = 99$. 1 bod

Zadatak B-4.6.

Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2022 za koje je $\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2\cos\frac{\pi}{8}-2i\sin\frac{\pi}{8}}\right)^n$ realan broj?

Rješenje.

Neka je $z = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2\cos\frac{\pi}{8}-2i\sin\frac{\pi}{8}}$.

Trigonometrijski prikaz brojnika broja z je

$-\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, 1 bod

a nazivnika

$2\cos\frac{\pi}{8}-2i\sin\frac{\pi}{8} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$. 2 boda

Tada je

$$\begin{aligned} z &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{15\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{15\pi}{8}\right) = \cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

1 bod

Tada je $z^n = \cos\left(\frac{7\pi n}{8}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi n}{8}\right)$. 1 bod

Ovaj je broj realan ako je $\sin\left(\frac{7\pi n}{8}\right) = 0$, odnosno ako je $\frac{7\pi n}{8} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 2 boda

Slijedi $n = \frac{8k}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

Budući da je n prirodan broj k mora biti pozitivan višekratnik broja 7, a n višekratnik broja 8, tj. $n \in \{8, 16, 24, \ldots, 2016\}$. 2 boda

Konačno, traženih prirodnih brojeva n ima 252. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Neka su a, b i c uzastopni članovi geometrijskog niza. Ako je $a+b+c = \dfrac{7}{3}$ i $a^2+b^2+c^2 = \dfrac{91}{9}$, odredite a, b i c.

Prvo rješenje.

Ako su a, b, c uzastopni članovi geometrijskog niza, vrijedi $b^2 = ac$. $(*)$ 1 bod

Jednakost $a + b + c = \frac{7}{3}$ možemo pisati kao $a + c = \frac{7}{3} - b$ i kvadrirati. Tada je

$(a + c)^2 = \left(\dfrac{7}{3} - b\right)^2$, odnosno

$a^2 + c^2 + 2ac = \dfrac{49}{9} - \dfrac{14}{3}b + b^2$. 2 boda

Iz zadane jednakosti $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{91}{9}$ izrazimo $a^2 + c^2 = \dfrac{91}{9} - b^2$

i uvrstimo u posljednju jednakost. Također, primijenimo jednakost $(*)$.

Slijedi:

$\dfrac{91}{9} - b^2 + 2b^2 = \dfrac{49}{9} - \dfrac{14}{3}b + b^2$, odnosno 2 boda

$\dfrac{14}{3}b = \dfrac{49}{9} - \dfrac{91}{9} = -\dfrac{42}{9}$ pa je

$b = -1$. 1 bod

Preostaje riješiti sustav

$a + c = \dfrac{10}{3}$ 1 bod

$ac = 1$

Sustav se svodi na kvadratnu jednadžbu $3a^2 - 10a + 3 = 0$ (ili $3c^2 - 10c + 3 = 0$) 1 bod

kojoj su rješenja $a = 3$ i $a = \dfrac{1}{3}$, a tada su rješenja sustava $\left(3, \dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{1}{3}, 3\right)$. 1 bod

Konačno $a = 3, b = -1, c = \dfrac{1}{3}$ ili $a = \dfrac{1}{3}, b = -1, c = 3$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je q kvocijent geometrijskog niza a, b, c. Tada je $b = aq, c = aq^2$, a zadane jednakosti prelaze u:

$a + aq + aq^2 = \frac{7}{3}$ 1 bod

$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = \frac{91}{9}$. 1 bod

Izlučimo u prvoj jednakosti q, a u drugoj q^2. Slijedi

$a(1 + q + q^2) = \frac{7}{3}$

$a^2(1 + q^2 + q^4) = \frac{91}{9}$.

Ako iz prve jednadžbe izrazimo a i uvrstimo u drugu jednadžbu slijedi

$\frac{\frac{49}{9}}{(1+q+q^2)^2}\left(1 + q^2 + q^4\right) = \frac{91}{9}$ odnosno $\frac{1+q^2+q^4}{(1+q+q^2)^2} = \frac{13}{7}$. 2 boda

Brojnik možemo faktorizirati: $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)^2 - q^2 = (1 + q^2 - q)(1 + q^2 + q)$.

Tada gornja jednadžba nakon skraćivanja prelazi u

$\frac{1-q+q^2}{1+q+q^2} = \frac{13}{7}$, odnosno kvadratnu jednadžbu 2 boda

$3q^2 + 10q + 3 = 0$.

Njezina su rješenja $q = -3$ i $q = -\frac{1}{3}$. Tada je 2 boda

Za $q = -3$ slijedi $a = \frac{7}{3(1+q+q^2)} = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1, c = 3$. 1 bod

Za $q = -\frac{1}{3}$ slijedi $a = 3, b = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1, c = \frac{1}{3}$. 1 bod

Napomena.

Ako učenik faktorizacijom ne pojednostavi dobivenu jednadžbu za q, dobit će nakon sređivanja simetričnu jednadžbu $3q^4 + 13q^3 + 16q^2 + 13q + 3 = 0$.

Tada je postupak sljedeći:

$3q^4 + 3 + 13q^3 + 13q + 16q^2 = 0/ : q^2$

$3q^2 + \frac{3}{q^2} + 13q + \frac{13}{q} + 16 = 0$

$3\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 13\left(q + \frac{1}{q}\right) + 16 = 0$

Uvodimo supstituciju $q + \frac{1}{q} = t$, odnosno $q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Slijedi jednadžba

$3t^2 + 13t + 10 = 0$ čija su rješenja $t = -\frac{10}{3}$ i $t = -1$.

Za $t = -1$ jednadžba $q + \frac{1}{q} = t$ nema rješenja. Za $t = -\frac{10}{3}$ dobivamo rješenja $q = -3$ i $q = -\frac{1}{3}$.

Ako učenik ima točan postupak do uključujući simetričnu jednadžbu, a nema navedenog postupka rješavanja te jednadžbe može dobiti maksimalno 5 bodova.