



### 3. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Zagreb, 12. veljače 2022.

1. Neka su  $a, b, c$  i  $d$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $a + b + c + d = 4$ . Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a^3 + 5} + \frac{b}{b^3 + 5} + \frac{c}{c^3 + 5} + \frac{d}{d^3 + 5} \leq \frac{2}{3}.$$

2. Žaba se nalazi u ishodištu  $O$  brojevnog pravca i treba izvesti 2022 skoka, po jedan skok svake od duljina  $1, 2, \dots, 2022$ . Skokove mora izvoditi takvim redoslijedom da se poštuju sljedeća pravila:

- ako se trenutno nalazi u točki  $O$  ili lijevo od nje, onda mora skočiti udesno,
- ako se nalazi desno od točke  $O$ , onda mora skočiti ulijevo.

Odredi najveći prirodan broj  $k$  za koji žaba može skakati tako da nikad ne skoči ni na jedan od brojeva  $1, 2, \dots, k$ .

3. Dan je trokut  $ABC$  s tupim kutom u vrhu  $C$ . Točke  $E$  i  $F$  nalaze se na stranici  $\overline{AB}$  i pritom vrijedi  $|AE| = |EF| = |FB|$ . Na pravcu  $BC$  nalazi se točka  $D$  takva da je  $BC$  okomito na  $ED$ , a  $AD$  okomito na  $CF$ .

Ako je kut  $\sphericalangle CFA$  triput veći od kuta  $\sphericalangle BDF$ , odredi  $|DB| : |DC|$ .

4. Odredi sve parove  $(a, b)$  prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$b \mid a^2 + 1, \quad a \mid b - 2.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.