3. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Zagreb, 12. veljače 2022.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c+d=4$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a^3+5}+\frac{b}{b^3+5}+\frac{c}{c^3+5}+\frac{d}{d^3+5}\leqslant\frac{2}{3}.$$

Rješenje.

Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi

$$a^3+2=a^3+1+1\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}=3a,$$

tj. $a^3+5\geqslant 3a+3$. Analogno je $b^3+5\geqslant 3b+3$, $c^3+5\geqslant 3c+3$ i $d^3+5\geqslant 3d+3$.
Stoga je dovoljno pokazati

$$\frac{a}{3a+3}+\frac{b}{3b+3}+\frac{c}{3c+3}+\frac{d}{3d+3}\leqslant\frac{2}{3},$$

odnosno

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}\geqslant 2.$$

To slijedi iz nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine i uvjeta $a+b+c+d=4$:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}\right)\geqslant\frac{4}{(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Zadatak 2.

Žaba se nalazi u ishodištu O brojevnog pravca i treba izvesti 2022 skoka, po jedan skok svake od duljina $1, 2, \ldots, 2022$. Skokove mora izvoditi takvim redoslijedom da se poštuju sljedeća pravila:

- ako se trenutno nalazi u točki O ili lijevo od nje, onda mora skočiti udesno,
- ako se nalazi desno od točke O, onda mora skočiti ulijevo.

Odredi najveći prirodan broj k za koji žaba može skakati tako da nikad ne skoči ni na jedan od brojeva $1, 2, \ldots, k$.

Rješenje.

Označimo $n = 2022$. Pretpostavimo da postoji niz od n skokova duljine $1, 2, \ldots, n$ u nekom poretku tako da žaba nikad ne stane ni na koji od brojeva $1, 2, \ldots, k$ za $k \geqslant 1$. Uočimo da je $k < n$ jer prvi skok žabe mora biti udesno, a nije dulji od n. Žaba se ne može nalaziti na broju većem od n jer može skakati udesno samo s broja $a \leqslant 0$, a najdulji mogući skok je duljine n.

Ako je žaba u nekom trenutku na broju $a > 0$, tada je zapravo na broju $a \geqslant k+1$ jer ne smije biti na nekom od brojeva $1, 2, \ldots, k$. To znači da žaba skače ulijevo samo ako je na broju $a \geqslant k+1$ pa ne može doći u broj manji od $k+1-n$. Zato žaba može samo stati na brojeve i koji zadovoljavaju

$$k+1-n \leqslant i \leqslant 0 \qquad \text{ili} \qquad k+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Promotrimo što se dešava u trenutku kad žaba radi skok duljine točno k. Ona nakon njega mora ostati s iste strane brojeva $1, 2, \ldots, k$ jer je za preskakanje svih tih brojeva potreban skok duljine bar $k+1$.

Ako taj skok radi s pozicije $a > 0$, tada će završiti u broju $a-k$ pa mora vrijediti $a-k \geqslant k+1$ tj. $2k+1 \leqslant a \leqslant n$. Dakle, imamo $2k+1 \leqslant n$ u ovom slučaju.

Ako taj skok radi s pozicije $a \leqslant 0$, onda vrijedi $k+1-n \leqslant a \leqslant 0$. Tada će završiti u broju $a+k$, pa mora vrijediti $a+k \leqslant 0$ i $2k+1-n \leqslant a+k \leqslant 0$. Opet zaključujemo $2k+1 \leqslant n$.

Dakle, dokazali smo da je $k \leqslant \frac{n-1}{2} = 1010.5$. Kako je k cijeli, vrijedi $k \leqslant 1010$.

Sada pokažimo da je moguće napraviti niz skokova tako da žaba nikad ne dođe ni na koji od brojeva $1, 2, \ldots, k$ za $k = 1010$. Prvo napravi skok duljine $k+1$.

Zatim skokove radimo u parovima. Prvo napravimo par skokova duljine $k+2$ i 1, pa nakon toga napravimo par skokova duljine $k+3$ i 2. Nastavljamo nakon toga raditi parove skokova: najprije duljine $k+i+1$, a zatim i, za $i = 4, \ldots, k$. Na kraju napravimo skok duljine $n = 2k+2 = 2022$. Uočimo da smo napravili skokove svih mogućih duljina $1, 2, \ldots, n$ točno jednom.

Pokažimo da taj niz skokova nikad ne stane ni na koji od brojeva $1, 2, \ldots, k$ za $k = 1010$. Nakon prvog skoka, žaba stane u broj $k+1 > k$. Pretpostavimo da je žaba u broju 0 ili $k+1$ i da će upravo napraviti par skokova duljine najprije $k+i+1$, a zatim i. Ako je u broju 0, prvi skok ju vodi u broj $k+i+1 > k$, a zatim drugi u broj $k+i+1-i = k+1 > k$. Ako je u broju $k+1$, prvi skok ju vodi u broj $k+1-(k+i+1) = -i < 1$, a zatim drugi u broj $-i+i = 0$.

Iz broja $k+1$ žaba je stigla u broj 0 nakon para skokova i obratno, pritom ne stajući ni u koji od brojeva $1, 2, \ldots, k$. Nakon što žaba odradi opisane parove skokova, radi skok duljine $n = 2k+2$ pa završava u broju $0+(2k+2) = 2k+2 > k$ ili u broju $k+1-(2k+2) = -k-1 < 1$. Dakle, nijednom nije stala ni u koji od brojeva $1, 2, \ldots, k$ te je zato $k = 1010$ traženi odgovor.

Zadatak 3.

Dan je trokut ABC s tupim kutom u vrhu C. Točke E i F nalaze se na stranici $\overline{AB}$ i pritom vrijedi $|AE| = |EF| = |FB|$. Na pravcu BC nalazi se točka D takva da je BC okomito na ED, a AD okomito na CF.

Ako je kut $\sphericalangle CFA$ triput veći od kuta $\sphericalangle BDF$, odredi $|DB| : |DC|$.

Prvo rješenje.

Označimo $\alpha = \sphericalangle BDF$ te $I = CF \cap AD$. Tada je $\sphericalangle EFC = 3\alpha$.

Budući da je trokut BDE pravokutan te da je točka F polovište hipotenuze $\overline{BE}$, vrijedi da je $\sphericalangle FBD = \alpha$. Kut $\sphericalangle EFD$ je vanjski kut trokuta BDF pa je $\sphericalangle EFD = 2\alpha$.

Sada je $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CFE - \sphericalangle DFE = \alpha$. Zaključujemo da je trokut DFC jednakokračan.

Zbog pravog kuta pri vrhovima I i D u trokutima FID i FIA te BDE, zaključujemo da je $\sphericalangle BAD = 90^\circ - 3\alpha$, $\sphericalangle FDI = \sphericalangle BED = 90^\circ - \alpha$.

Sada vidimo da su trokuti ADE i AFD te CDF i FDB slični.

Računamo:

$$\frac{|BF|}{|ED|} = \frac{|DF|}{|ED|} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AE|},$$

iz čega slijedi

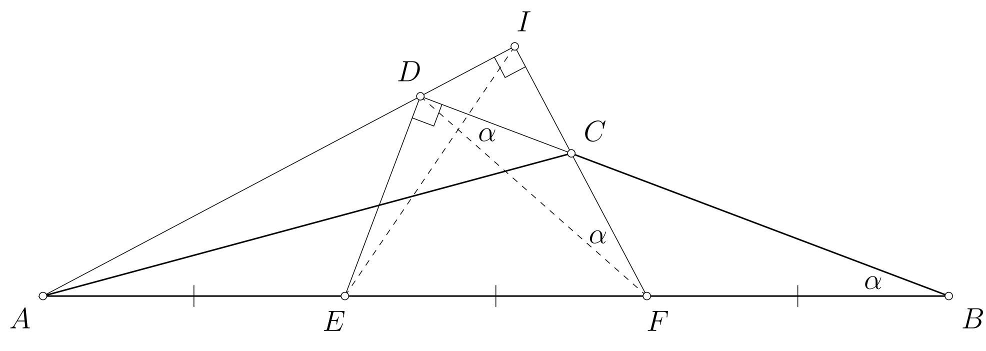
$$|AD| = |AE|\sqrt{2}, \quad |ED| = |AE|\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut BED dobivamo

$$|DB| = \sqrt{|BE|^2 - |ED|^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}|AE|.$$

Zbog sličnosti trokuta CDF i FDB slijedi

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BD|}{|DF|} \cdot \frac{|DF|}{|CD|} = \frac{|BD|^2}{|DF|^2} = \frac{|BD|^2}{|BF|^2} = \frac{|BD|^2}{|AE|^2} = \frac{7}{2}.$$



Drugo rješenje.

Označimo $\alpha = \sphericalangle BDF$ te $I = CF \cap AD$. Tada je $\sphericalangle EFC = 3\alpha$.

Budući da je trokut BDE pravokutan te da je točka F polovište hipotenuze $\overline{BE}$, vrijedi da je $\sphericalangle FBD = \alpha$. Kut $\sphericalangle EFD$ je vanjski kut trokuta BDF pa je $\sphericalangle EFD = 2\alpha$. Sada je $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CFE - \sphericalangle DFE = \alpha$. Zaključujemo da je trokut DFC jednakokračan.

Zbog pravog kuta pri vrhovima I i D u trokutima FID i FIA te BDE, zaključujemo da je $\sphericalangle BAD = 90^\circ - 3\alpha$, $\sphericalangle FDI = \sphericalangle BED = 90^\circ - \alpha$.

Budući da je $\sphericalangle FED$ vanjski kut trokuta AED, zaključujemo da je

$$\sphericalangle EDA = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 3\alpha) = 2\alpha.$$

Primjenom poučka o sinusima na trokute FED i DEA računamo:

$$1 = \frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AE|}{|ED|} \cdot \frac{|ED|}{|EF|} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 90^\circ - 3\alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 90^\circ - \alpha} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{4\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Slijedi

$$4\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 3,$$

odnosno

$$4(1-\cos^2\alpha) = 4\cos^2\alpha - 3 \implies \cos^2\alpha = \frac{7}{8} \implies \sin^2\alpha = \frac{1}{8}.$$

Budući da je trokut CDF jednakokračan imamo:

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin 180^\circ - 3\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin\alpha}{3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha} = \frac{1}{4\cos^2\alpha - 1} = \frac{1}{4\frac{7}{8} - 1} = \frac{2}{5}.$$

Sada je

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|DC| + |CB|}{|DC|} = 1 + \frac{|CB|}{|DC|} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$

Zadatak 4.

Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$b \mid a^2 + 1, \qquad a \mid b - 2.$$

Rješenje.

Za $b = 1$ nužno vrijedi $a = 1$. Za $b = 2$, a je bilo koji neparan broj.

Nadalje pretpostavimo da vrijedi $b \geqslant 2$.

Množenjem uvjeta dobivamo da vrijedi

$$ab \mid a^2 b - (2a^2 + 2 - b).$$

Dodatno, iz uvjeta zadatka imamo i $a^2 + 1 \geqslant b$ te $b - 2 \geqslant a$. Zato je

$$0 < a^2 + 1 \leqslant 2a^2 + 2 - b \leqslant 2a(b-2) + 2 - b = 2ab - 4a + 2 - b < 2ab,$$

pri čemu je zadnja nejednakost ekvivalentna s $4a + b > 2$, što očito vrijedi.

Kako bi izraz $2a^2 + 2 - b$ bio djeljiv s ab, nužno je $2a^2 + 2 - b = ab$.

Iz zadnje jednakosti imamo

$$b = \frac{2a^2 + 2}{a + 1} = 2a - 2 + \frac{4}{a + 1},$$

odakle dobivamo mogućnosti $a = 1, 2, 4$.

Provjerom početnih uvjeta zajedno s rješenjima s početka zaključujemo da su sva rješenja

$$(a, b) \in \{(1, 1), (3, 5)\} \cup \{(2k - 1, 2) : k \in \mathbb{N}\}.$$