



1. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Zagreb, 16. siječnja 2020.

1. Neka je $a = 0.365$. Niz $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ zadan je formulama

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a^{a^n} \quad \text{za } n = 1, \dots, 2019.$$

Poredaj brojeve $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ od najmanjeg prema najvećem.

2. Na svakom polju ploče $n \times n$ spava jedan zmaj. Zmajevi su susjedi ako se nalaze na poljima koja imaju zajedničku stranicu. Svakog sata Mini probudi jednog zmaja koji ima barem jednog živog susjeda, a Maks usmjeri tog zmaja prema nekom njegovom živom susjedu. Probudeni zmaj riga vatru i uništi odabranog susjeda, te nastavlja spavati.

Mini želi smanjiti broj zmajeva, a Maks želi da ih ostane što više. Ako oboje biraju najbolje što mogu, koliko će zmajeva preostati na ploči za

(a) $n = 4$?

(b) $n = 5$?

3. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC , a M polovište stranice \overline{BC} . Neka je P nožište okomice iz H na pravac AM . Dokaži da vrijedi

$$|AM| \cdot |PM| = |BM|^2.$$

4. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (m, n, p) pri čemu je p prost broj, te vrijedi

$$m^3 + 7p^2 = 2^n.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.