1. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Zagreb, 16. siječnja 2020.

Zadatak 1.

Neka je $a = 0.365$. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ zadan je formulama

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = a^{a_n} \quad \text{za} \quad n = 1, \ldots, 2019.$$

Poredaj brojeve a_1, a_2, $\ldots$, a_{2020} od najmanjeg prema najvećem.

Rješenje.

Budući da je $0 < a < 1$, za realne brojeve x i y vrijedi $x < y$ ako i samo ako $a^x > a^y$.

Primijenimo li ovo pravilo za $x = a$ i $y = 1$, zaključujemo $a^a > a$, tj. $a_2 > a_1$.

Nadalje, zbog $1 > a_2 > a_1$, slijedi $a_1 < a_3 < a_2$.

Nastavimo li zaključivati na isti način, slijedi da je

$$a_1 < a_3 < \cdots < a_{2k-1} < a_{2k-2} < \cdots < a_2 < 1$$

i

$$a_1 < a_3 < \cdots < a_{2k-1} < a_{2k} < \cdots < a_2 < 1$$

za svaki $k = 2, 3, \ldots, 1010$. Za $k = 1010$ posljednji redak daje traženi poredak.

Zadatak 2.

Na svakom polju ploče $n \times n$ spava jedan zmaj. Zmajevi su susjedi ako se nalaze na poljima koja imaju zajedničku stranicu. Svakog sata Mini probudi jednog zmaja koji ima barem jednog živog susjeda, a Maks usmjeri tog zmaja prema nekom njegovom živom susjedu. Probuđeni zmaj riga vatru i uništi odabranog susjeda, te nastavlja spavati.

Mini želi smanjiti broj zmajeva, a Maks želi da ih ostane što više. Ako oboje biraju najbolje što mogu, koliko će zmajeva preostati na ploči za

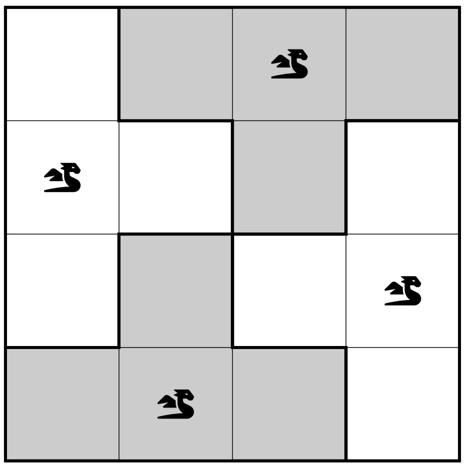
(a) $n = 4$?

(b) $n = 5$?

Rješenje.

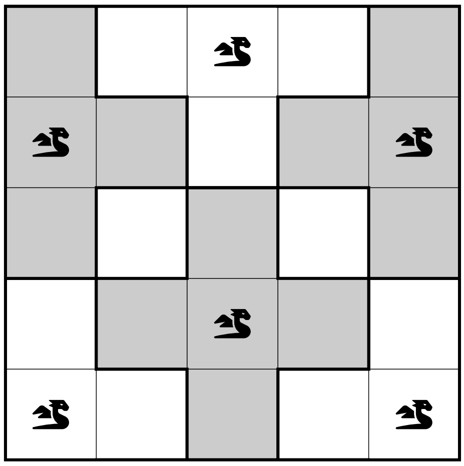
(a) Mini ne može birati kojeg susjeda će probuđeni zmaj uništiti, ali ako dovoljno puta odabere istog zmaja može postići da svi njegovi susjedi budu uništeni. Tvrdimo da će na ploči 4×4 ostati četiri zmaja.

Na slici su prikazane pozicije četiri zmaja koji nisu susjedni, a za koje vrijedi da je svaki drugi zmaj susjed jednom od njih. Odabirom svakog od tih zmajeva tri puta Mini može postići da ostanu samo četiri zmaja bez obzira na Maksov odabir.

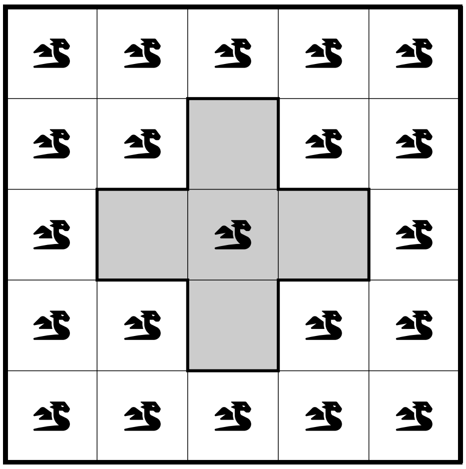


Na istoj slici su označena četiri područja, od kojih svako sadrži četiri polja sa zmajem na središnjem polju (označeni zmaj). Maks može sljedećom strategijom postići da u svakom od tih područja ostane barem jedan zmaj. Naime, ako je moguće odabire smjer zmajeva tako da označeni zmajevi ne budu uništeni. Ako to nije moguće, onda je unutar nekog područja Mini odabrala zmaja čiji jedini susjed na ploči je označeni zmaj u tom području. Dakle, označeni zmaj će biti uništen, ali odabrani zmaj više neće imati susjeda i neće biti uništen.

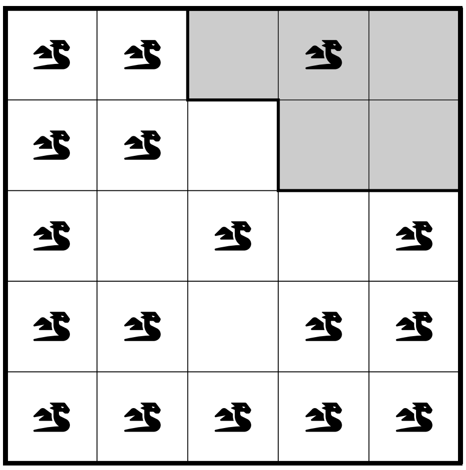
(b) Tvrdimo da će na ploči 5×5 ostati šest zmajeva. Podijelimo ploču na šest područja prikazanih na slici. Svako područje sadrži zmaja na središnjem polju i njegove susjede, te su na ploči još dva slobodna polja koja ne pripadaju nijednom području. Maks analognom strategijom opisanoj za ploču 4×4 može postići da se na ploči na kraju nalazi barem šest zmajeva (po jedan u svakom od šest područja).



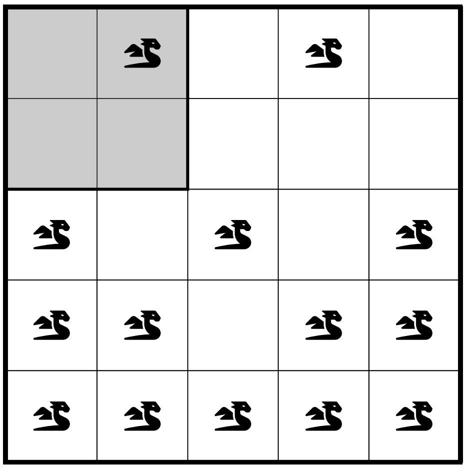
Sljedećim nizom odabira Mini može postići da neovisno o Maksovim odabirima na ploči ostane najviše šest zmajeva. Prvo, Mini bira zmaja na središnjem polju četiri puta.



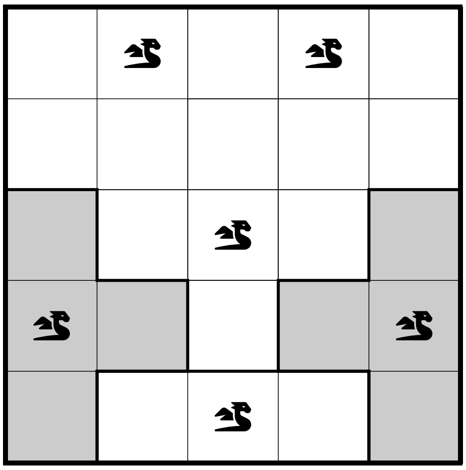
Nakon toga Mini odabire polje u kutu ploče, a Maks bira jednog od dva zmaja koja će uništiti. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Mini odabrala gornji desni kut ploče, a Maks uništio zmaja ispod tog polja. Nakon toga Mini bira susjeda koji nije uništen (lijevo od polja u kutu) tri puta.



U sljedećem potezu Mini bira zmaja u lijevom gornjem kutu i uništava se jedan od njegova dva susjeda. Na slici je pretpostavljeno da je Maks odabrao susjeda ispod kutnog polja. Odabirom drugog susjeda dva puta Mini postiže da je u osjenčanom kvadratu točno jedan zmaj.



Konačno, preostali dio ploče Mini dijeli na tri područja od kojih dva imaju četiri polja i jedno ima tri polja, te bira središnjeg zmaja u svakom od tih područja sve dok na ploči ne ostane točno šest zmajeva.



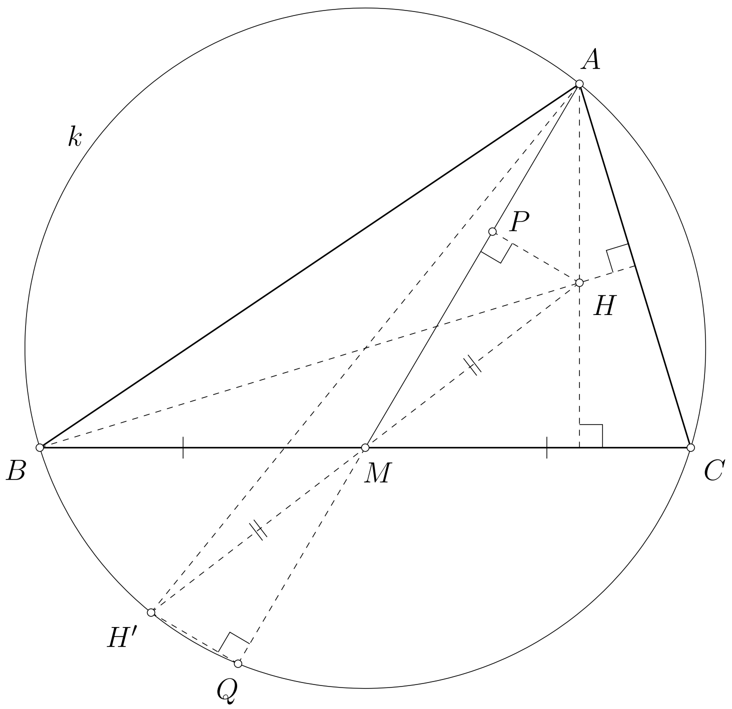
Zadatak 3.

Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC, a M polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je P nožište okomice iz H na pravac AM. Dokaži da vrijedi

$$|AM| \cdot |PM| = |BM|^2.$$

Prvo rješenje.

Neka AM siječe opisanu kružnicu k trokuta ABC u točki Q.



Poznato je da točka H' centralnosimetrična ortocentru H s obzirom na M leži na k i pritom je $\overline{AH'}$ promjer. Zato je $\sphericalangle AQH'$ pravi kut.

Budući da je $|MH| = |MH'|$, $\sphericalangle QMH' = \sphericalangle PMH$ i $\sphericalangle MQH' = 90° = \sphericalangle MPH$, trokuti MPH i MQH' su sukladni. Slijedi da je $|QM| = |PM|$.

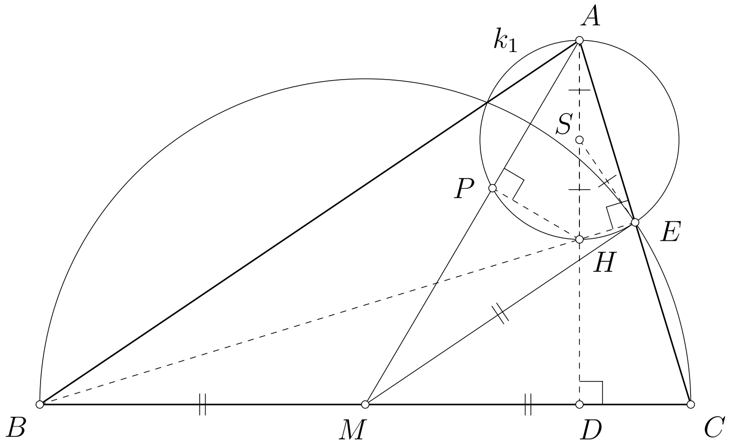
Sada slijedi

$$|AM| \cdot |PM| = |AM| \cdot |QM| = |BM| \cdot |CM| = |BM|^2,$$

pri čemu druga jednakost vrijedi zbog potencije točke M obzirom na k, a treća jer je M polovište dužine $\overline{BC}$.

Drugo rješenje.

Neka je D nožište visine iz A, a E nožište visine iz B u trokutu ABC, te neka je k_1 kružnica s promjerom $\overline{AH}$ i središtem S.



Budući da je M polovište hipotenuze pravokutnog trokuta ACE, vrijedi

$$|BM| = |CM| = |ME|.$$

Po obratu Talesovog teorema, točke P i E leže na kružnici k_1. Vrijedi

$$\sphericalangle SEM = \sphericalangle SEH + \sphericalangle BEM = \sphericalangle SHE + \sphericalangle EBM.$$

Trokuti BEC i BDH su pravokutni, pa slijedi $\sphericalangle EBM = \sphericalangle EBC = 90^\circ - \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle SHE = \sphericalangle BHD = 90^\circ - \sphericalangle HBD = \sphericalangle ACB$. Zato je

$$\sphericalangle SEM = \sphericalangle SHE + \sphericalangle EBM = \sphericalangle ACB + (90^\circ - \sphericalangle ACB) = 90^\circ.$$

To pokazuje da je pravac ME okomit na polumjer $\overline{SE}$, pa zaključujemo da je ME tangenta na kružnicu k_1. Koristeći potenciju točke M s obzirom na tu kružnicu zaključujemo

$$|AM| \cdot |PM| = |EM|^2 = |BM|^2.$$

Zadatak 4.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (m, n, p) pri čemu je p prost broj, te vrijedi

$$m^3 + 7p^2 = 2^n.$$

Rješenje.

Ako je $p = 2$, onda je $2^n > 28$, pa je $n \geqslant 5$. Također, m mora biti prirodan broj, pa 8 dijeli $2^n - m^3 = 7p^2 = 28$, što je kontradikcija. Dakle, p mora biti neparan.

Kubovi prirodnih brojeva pri dijeljenju sa 7 daju ostatke 0, 1, 6, dok potencije broja dva daju periodično ostatke 1, 2, 4. Stoga m^3 i 2^n moraju dati ostatak 1 pri dijeljenju sa 7, pa n mora biti djeljiv s 3. Neka je $n = 3k$.

Tada je

$$7p^2 = 2^{3k} - m^3 = (2^k - m)(2^{2k} + 2^k m + m^2).$$

Budući da je $p > 2$ prost, te $2^k - m < 2^{2k} + 2^k m + m^2$, razlikujemo sljedeća tri slučaja: $2^k - m \in \{1, 7, p\}$.

Ako je $2^k - m = 1$, onda je

$$7p^2 = 2^{2k} + 2^k m + m^2 = 2^k(m+1) + 2^k m + (2^k - 1)m = 3 \cdot 2^k m + 2^k - m = 3 \cdot 2^k m + 1.$$

Budući da je p neparan broj, slijedi da p^2 pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1, tj. $7p^2$ daje ostatak 3. Zato mora biti $k = 1$, tj. $n = 3$, te iz $2^k - m = 1$ slijedi $m = 1$. Provjerom vidimo da $n = 3$ i $m = 1$ daju $p = 1$, što nije prost broj. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $2^k - m = 7$, onda je

$$p^2 = 2^{2k} + 2^k m + m^2 = 2^k(m+7) + 2^k m + (2^k - 7)m = 3 \cdot 2^k m + 7 \cdot 2^k - 7m = 3 \cdot 2^k m + 49.$$

Dakle, 7 dijeli $p^2 - 3 \cdot 2^k m = p^2 - 3(m+7)m$, tj. 7 dijeli $p^2 - 3m^2$. Budući da je $p^2 = 3 \cdot 2^k m + 49 > 49$, vrijedi $p > 7$. Ostaci pri dijeljenju p^2 sa 7 su 1, 4 ili 2, dok su pri dijeljenju $3m^2$ sa 7 mogući ostaci 0, 3, 5 i 6. Dakle, ni u ovom slučaju nemaju rješenja.

Ako je $2^k - m = p$, onda je

$$7p = 2^{2k} + 2^k m + m^2 = 2^k(m+p) + 2^k m + (2^k - p)m = 3 \cdot 2^k m + p \cdot 2^k - pm = 3 \cdot 2^k m + p^2.$$

Vidimo da je $7p = 3 \cdot 2^k m + p^2 > p^2$, pa je $p < 7$. Već smo eliminirali mogućnost $p = 2$. Ako je $p = 5$, onda je $3 \cdot 2^k m = 7p - p^2 = 10$, što je nemoguće.

Ako je $p = 3$, onda je $3 \cdot 2^k m = 7p - p^2 = 12$, tj. imamo dvije mogućnosti: $k = 1$, $m = 2$ ili $k = 2$, $m = 1$. Prvi par ne zadovoljava početnu jednadžbu ($2^3 + 7 \cdot 3^2 \neq 2^3$), dok drugi zadovoljava ($1^3 + 7 \cdot 3^2 = 64 = 2^6$). Dakle, pronašli smo jedino rješenje $(1, 6, 3)$.