



## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe

Zagreb, 31. svibnja 2021.

1. (a) Odredi sve uređene trojke  $(a, b, c)$  realnih brojeva za koje je

$$a + b + c = 2021 \quad \text{i} \quad a^2b + b^2c + c^2a = a^2c + b^2a + c^2b.$$

- (b) Odredi sve uređene trojke  $(a, b, c)$  realnih brojeva za koje je

$$a + b + c = 2021 \quad \text{i} \quad a^3b + b^3c + c^3a = a^3c + b^3a + c^3b.$$

2. Na turniru svaka dva igrača igraju međusobno po dvije partije nove zanimljive igre. Prije početka svake partije nasumce se bira tko igra prvi. Partija ne može završiti remijem; pobjednik dobiva 1 bod, a gubitnik 0 bodova.

Na kraju turnira, svi su sudionici imali **različit** broj bodova. No, organizatori su zaključili da su pravila nepravedna. Zato su dodali po 1 bod za svaku pobjedu koju je ostvario igrač koji nije igrao prvi.

Mogu li prema novom bodovanju svi sudionici imati **isti** broj bodova?

3. Neka je  $ABC$  šiljastokutni trokut,  $H$  njegov ortocentar, a  $M$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Točka  $N$  je nožište okomice iz  $H$  na  $AM$ .

Dokaži da točke  $B$ ,  $C$ ,  $N$  i  $H$  pripadaju istoj kružnici.

4. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi  $a$  i  $b$  takvi da je

$$a^3 - 64a - 1 = 4b(b + 1).$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.