Nejednakosti

Mislav Brnetić

10. prosinac 2021.

Uvod

U ovom predavanju bavit ćemo se različitim nejednakostima.

Jedan od čestih pristupa pri rješavanju zadataka je svođenje nejednakosti na neke poznate, kao što su nejednakosti među kvadratnom, aritmetičkom, geometrijskom i harmonijskom sredinom (KAGH) te CSB nejednakost, zato ćemo se posebno baviti tim nejednakostima.

KAGH nejednakost

Za početak, definirajmo kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu (za n brojeva označenih $x_1, x_2, ..., x_n$):

- harmonijska sredina
$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- geometrijska sredina
$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- aritmetička sredina
$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- kvadratna sredina
$$K_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Između ovih sredina vrijedi nejednakost **za pozitivne realne brojeve**:

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$$

Dodatno, KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Jednakost (za sve KAGH nejednakosti) vrijedi (samo) za:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Dokažimo AG nejednakost za dva pozitivna realna broja x_1 i x_2.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$
$$\iff (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$

$$\iff x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 \geq 4x_1 \cdot x_2$$
$$\iff x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \geq 0$$
$$\iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

a ta nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Sada se lako dokaže kako jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Dokaz općenite AG nejednakosti svakako preporučam da pokušate izvesti samostalno (hint: razmislite kako biste dokazali da vrijedi nejednakost prvo za $n = 4$, a zatim za $n = 3$).

KAGH nejednakost se može poopćiti i na težinsku KAGH nejednakost te na nejednakost među potencijskim sredinama.

CSB nejednakost

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su nizovi x_i te y_i proporcionalni (odnosno postoji $k > 0$ takav da je $y_i = kx_i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$).

Sada dokažimo CSB nejednakost.

Promotrimo kvadratnu funkciju:

$$f(t) = (x_1t + y_1)^2 + (x_2t + y_2)^2 + \ldots (x_nt + y_n)^2$$
$$= (x_1^2 + \ldots + x_n^2)t^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)t + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Budući da je nenegativna, ima najviše jednu realnu nultočku pa je njena diskriminanta manja ili jednaka od nule, odnosno

$$4(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leq 0$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. Slučaj jednakosti se postiže samo ako $f(t)$ postiže vrijednost 0.

Uvodni zadaci

1. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Dokažite da za nenegativne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

3. Neka je $a \geq 0$. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z za koje je $x+y+z = 0$ vrijedi nejednakost:

$$(1+a^x)(1+a^y)(1+a^z) \geq 8$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Dokažite da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

Kada vrijedi jednakost?

5. *(CSB - Engel forma)* Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi, a $b_1, b_2, ..., b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Zadaci

6. Dokažite KA i GH nejednakost.

7. Za pozitivne realne brojeve a, b, c dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$$

8. Neka je x pozitivan realan broj. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$x + \frac{1}{x}$$

9. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

10. Neka su $a, b, c, d > 0$ takvi da je $a+b+c+d = 1$. Odredi minimalnu vrijednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

11. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve vrijedi

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$$

12. Ako za realne brojeve x, y, z vrijedi $x^2+y^2+z^2 = 1$, odredi maksimalnu vrijednost izraza $x+2y+3z$.

13. Dokaži da za sve $a, b, c, d > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a+b+c+d$.

14. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b i prirodan broj n vrijedi nejednakost:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$$

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=1$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}+\frac{1+9b^2}{1+2a^2+2b+2c^2}+\frac{1+9c^2}{1+2a^2+2b^2+2c}<4$$

16. Dokaži da za sve $x, y, z \geq 0$ vrijedi

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)}+\sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geq 2(x+y+z)$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokažite nejednakost:

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2a-1}+\frac{b^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2b-1}+\frac{c^2+6}{2a^2+2^2+2c^2+2c-1} \leq 3$$

18. Dokaži da za sve $a, b, c \geq 1$ vrijedi $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$.

19. Dani su realni brojevi $x_0, x_1, ..., x_n$ takvi da vrijedi $x_0 > x_1 > ... > x_n$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$x_0-x_n+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+...+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geq 2n$$

20. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2+b^2+c^2=3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^4+3ab^3}{a^3+2b^3}+\frac{b^4+3bc^3}{b^3+2c^3}+\frac{c^4+3ca^3}{c^3+2a^3} \leq 4$$

21. Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a} \leq 1$.

22. Pri vrhovima komada kartona u obliku kvadrata duljine stranice a odsijecimo jednake kvadrate duljine stranice x i od ostatka složimo kutiju bez poklopca. Odredi x tako da kutija bude maksimalnog volumena.

Rješenja

1. *1. način*

   Zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

   $$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

   Oduzimanjem $2ab+2bc+2ca$ s obje strane i zapisivanjem u obliku kvadrata binoma dobivamo:

   $$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

   Kako je kvadrat nenegativan broj, onda je lijeva strana suma nenegativnih brojeva pa zbrajanjem nejednakosti dobivamo da je i ona nenegativna.

   2. način - ovo je dokaz samo za pozitivne realne brojeve

   Kao u prvom rješenju, zadanu nejednakost množimo sa 2 i dobivamo ekvivalentnu nejednakost

   $$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

   Primijenimo AG nejednakost na $\frac{a^2+b^2}{2}$ i dobivamo:

   $$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

   Analogno dobivamo i

   $$b^2 + c^2 \geq 2bc$$
   $$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

   Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

   Napomena.

   Primijetite da je sljedeća nejedakost ekvivalentna AG nejednakosti:

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

2. Primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

   $$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$$

   što je i trebalo dokazati.

3. Kao i u prethodnom zadatku, primjenom AG nejednakosti na svaki faktor s lijeve strane dobivamo

   $$(1+a^x)(1+a^y)(1+a^z) \geq 2\sqrt{1 \cdot a^x} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a^y} \cdot 2\sqrt{1 \cdot a^z} = 8\sqrt{a^x a^y a^z} = 8\sqrt{a^{x+y+z}} = 8\sqrt{a^0} = 8$$

   AG nejednakost smijemo primijeniti s obzirom da su članovi na koje primijenjujemo pozitivni brojevi.

   Preostaje odrediti kada vrijedi jednakost.

Dokazali smo da jednakost vrijedi (samo) kada su svi članovi na koje primijenjujemo KAGH nejednakosti jednaki. Dakle u ovom slučaju jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$1 + a^x = 1 + a^y = 1 + a^z$$

Odnosno

$$a^x = a^y = a^z$$

$$x = y = z$$

4. Pomnožimo nejednakost sa $\sqrt{x^2+1}$ (kako je taj broj pozitivan, nejednakost i dalje vrijedi i ekvivalentna je prethodnoj). Dobivamo

$$x^2 + 2 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

$$\iff (x^2+1) + 1 \geq 2\sqrt{x^2+1}$$

Primjenom AG nejednakosti na $(x^2+1)+1$ dobivamo traženu nejednakost.

Analogno, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x^2 + 1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

5. Množenjem nejednakosti sa $b_1 + ... + b_n$ dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

$$\iff \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$$

Pritom zadnja nejednakost trivijalno slijedi iz CSB nejednakosti uvrštavanjem odgovarajućih nizova ($x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$, $y_i = \sqrt{b_i}$).

6. *KA nejednakost*

Želimo dokazati:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Prvo dokažimo nejednakost za sve nenegativne realne brojeve.

Lako se dokaže da je nejednakost ekvivalentna sljedećoj nejednakosti:

$$\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{n^2}$$

$$\iff n \cdot (x_1^2 + ... + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$$

Sada raspisivanjem izraza s desne strane, prebacivanjem na lijevu stranu nejednakosti i zapisivanjem izraza u obliku sume kvadrata binoma dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\sum_{i,j:i\neq j}(x_i - x_j)^2 \geq 0$$

Ta nejednakost vrijedi s obzirom na činjenicu da je svaki kvadrat nenegativan.

Sada dokažimo da KA nejednakost vrijedi za sve realne brojeve.

Po prethodnom dokazu imamo

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

za nenegativne realne brojeve.

Uzmimo $x_i' = |x_i|$, dakle vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x_1'^2 + ... + x_n'^2}{n}} \geq \frac{x_1' + x_2' + ... + x_n'}{n}$$

No, također imamo:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1'^2 + ... + x_n'^2}{n}} \geq \frac{x_1' + x_2' + ... + x_n'}{n} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

čime je dokaz završen.

GH nejednakost

Želimo dokazati

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

što je ekvivalentno sa:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

Po AG nejednakosti imamo:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$$

$\blacksquare$

7. Zadana nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\iff \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

pri čemu ova zadnja nejednakost vrijedi po KA nejednakosti.

8. Za minimalnu vrijednost izraza (označimo ju sa t) mora vrijediti sljedeće:

   - izraz je uvijek veći ili jedak od te vrijednosti ($x + \frac{1}{x} \geq t$)
   - moguće je postići tu vrijednost

   Ako primijenimo AG nejednakost na zadani izraz, dobivamo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

   Sada dokažimo da je moguće postići da izraz poprima vrijednost 2.

   Jednakost se poprima ako i samo ako je

$$x = \frac{1}{x}$$

$$\iff x^2 = 1$$

$$\iff x = 1$$

   (s obzirom da je zadano da je x pozitivan). Kako zadana jednadžba ima rješenja (ima jedinstveno rješenje), vrijednost 2 se postiže, a lako je i uvrstiti $x = 1$ te se vidi da se vrijednost 2 stvarno postiže.

9. *Za Nesbittovu nejednakost postoji više dokaza, ovdje ću prikazati jedan od njih.*

   Krenimo od lijeve strane nejednakosti;

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 = \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \end{aligned}$$

   Uvedimo nove oznake:

$$x := a+b$$

$$y := b+c$$

$$z := c+a$$

   Vrijedi $(a+b+c) = \frac{x+y+z}{2}$

   Sada imamo:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3=\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3$$

i trebamo dokazati;

$$\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\geq\frac{3}{2}$$
$$\Longleftrightarrow\ (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6\geq 3$$

Množenjem izraza na lijevoj strani dobivamo:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-6=$$
$$=3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-6$$

Po zadatku 7. vrijedi da je

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$
$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$$
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$$

Pa je

$$3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-6\geq 3+22+2-6=3$$

što je i trebalo dokazati.

10. Vrijedi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\cdot(a+b+c+d)\geq(1+1+1+1)^2=16$$

po CSB nejednakosti.

Lako dokazujemo da se jednakost zaista postiže, npr. uvrštavanjem $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Dakle, minimum je upravo 16.

11. Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b$$

Analogno vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geq 2a$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2c$$

Zato vrijedi:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geq\frac{1}{2}(2a+2b+2c)=a+b+c$$

što je i trebalo dokazati.

12. Po CSB nejednakosti vrijedi sljedeće:

$$14=(x^2+y^2+z^2)(1+4+9)\geq(x+2y+3z)^2$$

Odnosno, $(x+2y+3z)^2\leq 14$, pa je i $x+2y+3z\leq\sqrt{14}$ i time smo dobili gornju granicu.

Uzmemo li $x=\frac{1}{\sqrt{14}}, y=\frac{2}{\sqrt{14}}$ i $z=\frac{3}{\sqrt{14}}$, vidimo da se gornja jednakost zaista postiže, odnosno $\sqrt{14}$ je tražena maksimalna vrijednost.

13. Pomnožimo li obje strane nejednakosti s $a+b+c+d$ dobivamo da je dovoljno dokazati

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}\right)(b+c+d+a)\geq(a+b+c+d)^2$$

Zadnja nejednakost direktno slijedi iz CSB nejednakosti.

Alternativno, tvrdnja zadatka jednostavno slijedi iz *CSB nejednakosti u Engel formi* (vidi 5. zadatak).

14. Vrijedi:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{abb\cdots b}\overset{AG}{\leq}\frac{a+b+b+..+b}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}$$

pri čemu srednja nejednakost vrijedi po AG nejednakosti na brojevima $a, b, ..., b$ (b se ponavlja n puta), a iz ovoga slijedi tvrdnja zadatka.

15. Državno natjecanje 2019., SŠ A-1.3.

16. Primijetimo:

$$(x^2+1)(y^2+1)=(x^2+1)(1+y^2)\overset{CSB}{\geq}(x+y)^2$$

Sada imamo:

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\geq x+y$$

i analogno za ostale članove:

$$\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)}\geq y+z$$
$$\sqrt{(z^2+1)(x^2+1)}\geq z+x$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo:

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + \sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} + \sqrt{(z^2+1)(x^2+1)} \geq 2(x+y+z)$$

što je i trebalo dokazati.

17. Državno natjecanje 2019., SŠ A-3.4.

18. Uvedimo supstituciju $a = x+1, b = y+1, c = z+1$. Vrijedi $x, y, z \geq 0$ te nejednakost postaje

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{(z+1)((x+1)(y+1)+1)}$$

Koristeći CSB nejednakost vidimo da vrijedi

$$(z+1)(1+(x+1)(1+y)) \overset{CSB}{\geq} (z+1)(1+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2) \overset{CSB}{\geq} (\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

što smo i htjeli pokazati.

19. Državno natjecanje 2009., SŠ A-4.2.

20. Državno natjecanje 2015. SŠ A-1.3.

21. Koristeći identitet $\frac{a}{2a+b} = \frac{1}{2} - \frac{b}{4a+2b}$, danu nejednakost možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{b}{4a+2b} + \frac{c}{4b+2c} + \frac{a}{4c+2a} \iff 1 \leq \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a}$$

Sada možemo svaki razlomak desne strane proširiti svojim brojnikom te primijeniti Engel formu CSB nejednakosti:

$$\frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ac+a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+b^2+2bc+c^2+2ac+a^2} = 1$$

22. Volumen kutije je $(a-2x)^2x$, vrijedi $a, x \in \mathbb{R}, 2x < a$ i $x, a > 0$.

Trebamo odrediti maksimalnu vrijednost tog izraza.

$$(a-2x)^2x = (a-2x)(a-2x)x = \frac{1}{4}(a-2x)(a-2x) \cdot 4x$$

Po AG nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a-2x+a-2x+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(a-2x)(a-2x) \cdot 4x}$$

$$\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 \geq (a-2x)(a-2x) \cdot 4x$$

$$(a-2x)(a-2x) \cdot 4x \leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3$$

Uvrštavanjem ove nejednakosti u gornju nejednakost dobivamo:

$$\frac{1}{4}(a-2x)(a-2x)\cdot 4x \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$$

Cilj je dokazati da je to maksimum i odrediti za koji x se postiže.

Jednakost u ovoj AG nejednakosti vrijedi ako i samo ako je

$$a-2x = a-2x = 4x$$
$$6x = a$$
$$x = \frac{a}{6}$$

Dakle, postoji rješenje ove jednadžbe za svaki a pa se postiže jednakost, odnosno dobivena vrijednost je maksimum. Tada vrijedi $x = \frac{a}{6}$ pa je to rješenje.