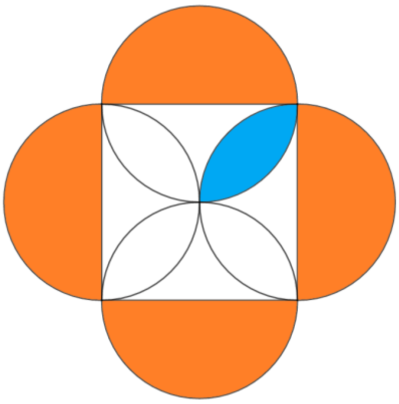
Vodič kroz dodatne natjecateljske teme za učitelje i nastavnike matematike – mentore i ispravljače

Matija Bašić
Državno povjerenstvo za provedbu natjecanja iz matematike



dp@math.hr

Impresum

Zagreb, listopad 2021.

Zahvala

Hvala kolegama koji su doprinijeli razvoju i kvaliteti ovog teksta: Sanji Stilinović i Mariji Juričić Devčić na odabiru primjera i pisanju manjih dijelova teksta, Mei Bombardelli i Ilku Brnetiću na stručnim savjetima i sugestijama, te Željki Milin Šipuš na metodičkim raspravama i idejama.

Sadržaj

Uvod

O ulozi mentora i očekivanjima na natjecanjima

Svaki natjecatelj pristupa natjecanjima kroz prizmu svojih rezultata i prirodno je njegov cilj biti bolji od drugih. No, jedino učenik koji voli matematiku i koji je intrinzično motiviran može godinama ustrajati u pripremi za natjecanje i ostvarivati dobre rezultate. S druge strane, mentor zna da glavni cilj sudjelovanja na natjecanju nije rezultat i svoju ulogu pronalazi u pružanju podrške učeniku za uspješno nošenje sa stresom te kontinuirani razvoj interesa za matematiku.

Prema načinu na koji se nose sa stresom, učenike možemo podijeliti u dva tipa. Neki učenici su izrazito kompetitivni i na natjecanjima ostvaruju svoj maksimum. Oni se natječu kako bi pobijedili druge natjecatelje i adrenalin ih potiče da riješe više zadataka nego kod kuće. Drugi tip učenika su oni koje stres blokira i koji nerijetko na natjecanjima imaju lošije rezultate od očekivanih. Takvi učenici prije natjecanja loše spavaju ili osjećaju mučninu, a za vrijeme natjecanja rade pogreške koje im inače nisu svojstvene. To su najčešće učenici koji vole matematiku, ali ne vole natjecanja. Oni se natječu zbog nedostatka drugih poticajnih i izazovnih aktivnosti u sustavu obrazovanja kroz koje bi razvijali svoje interese.

Mentor ne treba odlučivati umjesto učenika je li učenik spreman za natjecanje, ali mu treba pomoći u samoprocjeni i pružiti informacije što ga očekuje. U tome je važno potaknuti učenika da riješi zadatke zadane proteklih godina na istoj razini natjecanja za koju se učenik priprema, te nakon natjecanja pomoći učeniku da na pozitivan način sagleda ishod.

Mentor ima najveći utjecaj u poticanju pozitivnih stavova prema matematici i učenju, te svojim entuzijazmom može stvoriti ozračje koje omogućava uključivanje u dodatnu nastavu većem broju učenika. Natjecateljima je sudjelovanje na natjecanjima iznimno važno, te mnogi učenici osim vremena i truda ulažu i mnogo emocija. Istovremeno, sam sustav daje vrlo šturu povratnu informaciju (uglavnom isključivo u obliku bodovnog rezultata i pozicije na određenoj razini natjecanja), pa je za emocionalni razvoj natjecatelja izrazito važna dodatna podrška koju može pružiti mentor. Natjecatelji mogu biti nezadovoljni svojim rezultatom zbog raznih razloga. Neki učenici marljivo rješavaju zadatke i pripremaju se za natjecanja tijekom čitave godine, a na samom natjecanju ipak ne postignu željeni rezultat. Mogući razlozi za to su neadekvatna priprema ili nerealistična očekivanja. Uz pomoć u nošenju s vlastitim očekivanjima, mentor učeniku može pomoći da se nosi s vanjskim pritiscima (roditelja, vršnjaka), može ga i mora zaštititi od vršnjačkog ruganja, te može poticati suradništvo i međusobno uvažavanje svih učenika. Mentor može i treba pomoći učeniku razgovorom o svim tim psihološkim aspektima natjecanja.

Nastavniku će uloga mentora biti puno lakša ako je iskren prema sebi, a onda i prema svojim učenicima. Prije svega, tu podrazumijevamo iskrenost u pogledu vlastitog znanja i vještina, što se prirodno vezuje uz pitanje autoriteta. Stvaran autoritet ne proizlazi iz međusobnog odnosa (nadređeni-podređeni), već ga učenik prepoznaje u mentoru koji mu može pomoći svojim znanjem i iskustvom. Jedino ako je tako uspostavljen, autoritet omogućava partnerski odnos učenika i mentora.

U radu s talentiranom djecom vrlo je važno pristupiti s poštovanjem, te prihvaćati i poticati činjenicu da učenici trebaju jednog dana postati uspješniji od svojih mentora. No, mentor može pružiti učenicima potrebnu pomoć i svojim savjetima odigrati presudnu ulogu u njihovom razvoju. Čak i najbolji natjecatelji trebaju podršku u vidu zapisivanja rješenja, odabira materijala i pristupa učenju, a dobar mentor zna kako na balansiran način prepustiti odgovornost i autonomiju za učenje svom učeniku.

Regionalne razlike unutar Hrvatske

U raspravi nakon školskog natjecanja 2021. godine uočili smo dvije vrste komentara. Neki mentori su tvrdili da su zadaci primjereni, da postoje učenici koji zadatke mogu riješiti i koji su s njima zadovoljni. S druge strane, bilo je mnogo komentara da su zadaci učenicima preteški i da natjecanja demotiviraju učenike koji se odluče na natjecanja zbog svog odličnog uspjeha na redovnoj nastavi matematike. Je li moguće da obje strane zapravo govore o stvarnim perspektivama, samo u „paralelnim svemirima“?

Županija	Ukupno učenika u OŠ	Svi razredi OŠ		Žup./ Školsko	Školsko/ Ukupno	Žup./ Ukupno
		Školsko	Žup.			
Zagrebačka	25200	780	127	16,28	3,10	0,50
Krapinsko-zagorska	9400	248	44	17,74	2,64	0,47
Sisačko-moslavačka	10500	189	63	33,33	1,80	0,60
Karlovačka	8300	312	75	24,04	3,76	0,90
Varaždinska	13100	570	129	22,63	4,35	0,98
Koprivničko-križevačka	8400	277	40	14,44	3,30	0,48
Bjelovarsko-bilogorska	8400	379	50	13,19	4,51	0,60
Primorsko-goranska	19100	788	106	13,45	4,13	0,55
Ličko-senjska	3000	32	11	34,38	1,07	0,37
Virovitičko-podravska	5800	257	53	20,62	4,43	0,91
Požeško-slavonska	5300	237	62	26,16	4,47	1,17
Brodsko-posavska	10900	288	70	24,31	2,64	0,64
Zadarska	13500	538	94	17,47	3,99	0,70
Osječko-baranjska	20200	807	116	14,37	4,00	0,57
Šibensko-kninska	7100	226	29	12,83	3,18	0,41
Vukovarsko-srijemska	11800	489	81	16,56	4,14	0,69
Splitsko-dalmatinska	3600	1803	236	13,09	5,01	0,66
Istarska	15400	621	92	14,81	4,03	0,60
Dubrovačko-neretvanska	9800	320	43	13,44	3,27	0,44
Međimurska	9400	332	101	30,42	3,53	1,07
Grad Zagreb	63900	2863	245	8,56	4,48	0,38
RH	314500	12356	1867	15,11	3,93	0,59

Kako bismo odgovorili na to pitanje promotrimo rezultate po županijama. U tablici su prikazani po županijama:

- broj učenika koji ukupno pohađa osnovnu školu,
- brojevi sudionika na školskom i županijskom u svim razredima,
- udio učenika sa školske razine pozvano na županijsku,
- broj učenika na školskom na sto učenika u županiji,
- broj učenika na županijskom na sto učenika u županiji.

Uočimo prije svega da brojevi učenika, kako na školsko tako i na županijskoj razini, variraju od županije do županije. No, još važnije varira i interes učenika za natjecanja (broj sudionika na školskom natjecanju po ukupnom broju učenika). To objašnjava zašto neki mentori imaju osjećaj da trebaju na sve moguće načine motivirati učenike za natjecanja.

Sljedeći zanimljiv podatak su kvote koje županije propisuju za sudjelovanje na županijskom natjecanju (broj sudionika na županijskom natjecanju u odnosu na broj sudionika na školskom, odnosnom ukupnom broju učenika). Možemo vidjeti da su te kvote male u nekim županijama (Krapinsko-zagorskoj, Koprivničko-križevačkoj, Šibensko-kninskoj, Međimurskoj, Gradu Zagrebu) unatoč interesu učenika za školsku razinu natjecanja, dok u Ličko-senjskoj imamo male kvote uz mali interes.

Podaci za 7. razred: ukupan broj natjecatelja koji je pristupio školskom natjecanju, bodovni prag za županijsko natjecanje i broj pozvanih natjecatelja na županijsko natjecanje.

Županija	**Školsko**	**Prag**	**Županijsko**
Zagrebačka	117	22	25
Krapinsko-zagorska	37	22	8
Sisačko-moslavačka	33	14	15
Karlovačka	47	20	16
Varaždinska	53	19	20
Koprivničko-križevačka	41	21	10
Bjelovarsko-bilogorska	41	14	10
Primorsko-goranska	80	20	22
Ličko-senjska	5	23	1
Virovitičko-podravska	28	19	12
Požeško-slavonska	32	14	13
Brodsko-posavska	61	14	15
Zadarska	75	21	18
Osječko-baranjska	119	22	24
Šibensko-kninska	30	22	4
Vukovarsko-srijemska	58	15	16
Splitsko-dalmatinska	229	20	48
Istarska	89	16	17
Dubrovačko-neretvanska	28	19	9
Međimurska	50	15	25
Grad Zagreb	430	33	51
RH	1683	-	379

Promotrimo li pragove u 7. razredu vidimo također vrlo veliku raznolikost po županijama, pri čemu posebno odudara posebno visok prag u Gradu Zagrebu. Upravo taj podatak možemo uočiti kao jedan od glavnih razloga za različite komentare mentora o težini zadataka. Rješenje tog problema leži u strukturi ispita na školskom natjecanju na kojem se zadaje pet lakših zadataka za 6 bodova i dva zadatka za 10 bodova. Veliki broj komentara u raspravi nakon školskog natjecanja se odnosio na olakšavanje lakših zadataka, te provođenju selekcije na težim zadacima. To je zaista željena strategija i Državnog povjerenstva, ali predstavlja veliki izazov sastaviti ispit u kojem će velika većina učenika ostvariti barem 10 bodova, a samo pozvani na županijsko više od 30 bodova (u Gradu Zagrebu onda i više od 40 bodova uz istu kvotu). No, svakako je to važno nastojati i nadamo se da ćemo u tome svi zajedno biti uspješni.

Težina zadataka i bodovni pragovi na različitim razinama natjecanja

Sudjelovanje na državnom natjecanju velika je čast i izazov za svakog natjecatelja. Zato učenici često komentiraju da je županijsko natjecanje razina na kojoj većina osjeća najveći pritisak. Na županijskoj se razini po kategoriji odabire 20 od 350 (ili više) učenika koji će biti pozvani na državno natjecanje. Relativno mala prolaznost čini županijsko natjecanje ispitom visokog rizika.

Glavna mjera koja osigurava pravedan odabir pozvanih učenika je dovoljno nizak bodovni prag. Visok bodovni prag bi doveo do situacija u kojima velik broj učenika ima isti ili približni broj bodova, a razlike se temelje na malim, nerijetko računskim, pogreškama. Kroz godine se pokazuje da je idealni bodovni prag između 30 i 35 od 50 bodova. Zbog toga moramo očekivati da će više od 330 učenika po kategoriji ostvariti između 0 i 30 bodova.

U ovome se očituje nepomirljivost popularizacijskog karaktera natjecanja i stremljenja ka pravednom odabiru najboljih natjecatelja. Sve veća pripremljenost naših najboljih natjecatelja diktiraju standard najviših razina natjecanja, a stroga selekcija doprinosi percepciji velikih razlika u rezultatima učenika na nižim razinama. Za neke učenike ta činjenica je razočaravajuća. No, bitno je naglasiti da spuštanje kriterija ni na kojem ispitu ne donosi dugoročni napredak niti zadovoljstvo pojedinaca. U nastojanjima da pružimo emocionalnu podršku učenicima moramo naglasiti važnost rada i ustrajati na stavu da veću vrijednost imaju ostvarenja koja postižemo uz više truda i uz osobni razvoj.

U situaciji u kojoj nije moguće financijski osigurati veći broj razina, poželjno je da škole samostalno organiziraju predrazine natjecanja lokalnog karaktera na kojima bi zainteresirani učenici mogli ostvariti motivirajuće rezultate, usporediti se s učenicima iz drugih razreda ili škola, te samostalno procijeniti svoje sposobnosti. Također, svakako bismo preporučili da bodovni pragovi za plasman sa školske na županijsku razinu ne bude previsok, tj. da broj učenika koje županije pozivaju na županijsko natjecanje ne bude premali. Uključivanje što većeg broja učenika i poticanje izvrsnosti dva su osnovna načela koja u budućnosti treba i dalje nastojati provoditi na način da se međusobno ne isključuju. Pritom najvažnija uloga mentora je da pomognu učenicima kako da se u tim situacijama uspješno nose s potencijalnim razlikama u očekivanjima i rezultatima u odnosu na druge učenike.

Ovdje je još posebno bitno naglasiti da usporedbe natjecanja iz matematike i drugih predmeta nemaju smisla jer u matematici ne ispitujemo činjenice u obliku kratkih odgovora već kreativno rješavanje problema. Možda će neke učenike motivirati lakše postizanje uspjeha iz nekog drugog predmeta, ali s druge strane velik broj učenika prepoznaje važnost STEM-a u svom obrazovanju i trebamo ustrajati u tome da je STEM važan upravo zato što potiče logičko rasuđivanje i rješavanje problema, te je temelj za razvoj društva jer upravo kroz znanost rješavamo teške izazove s kojima se kao društvo nosimo.

Osim povećanja broja razina, kao mjere za poboljšanje sustava natjecanja vidimo povećanjem sinergijskog djelovanja svih sudionika natjecanja što je moguće ostvariti kroz povećanje komunikacije između državnog povjerenstva i mentora, organizaciju skupova na kojima se olakšava razmjena iskustava mentora, te pružanju podrške mentorima kroz radionice i dodatne materijale.

Olimpijade za osnovce

U proteklih nekoliko godina ponajbolji hrvatski osnovci su dobili nekoliko novih izazovnijih natjecanja na kojima mogu sudjelovati.

Od 2017. najuspješniji učenici na državnom natjecanju za 7. i 8. razred se pozivaju na Hrvatsku juniorsku matematičku olimpijadu (HJMO). To natjecanja od 2018. služi kao izbor za ekipu Republike Hrvatske za Juniorsku balkansku matematičku olimpijadu (JBMO).

Još mlađi učenici, od 4. do 6. razreda osnovne škole u pravilu ne sudjeluju na međunarodnim matematičkim natjecanjima, ali od 2020. godine za njih postoji Hrvatska matematička olimpijada za kadete (HMOK).

Juniorska balkanska matematička olimpijada

JBMO je prestižno i izrazito teško natjecanje na kojem pravo sudjelovanja imaju učenici do 15,5 godina starosti. Prvi put je održana 1997. godine, a Republika Hrvatska sudjeluje od 2018. godine u statusu gosta. U ekipi Republike Hrvatske sudjeluju samo učenici osnovne škole. Test se sastoji od četiri zadatka, uglavnom iz četiri različita područja: algebra, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva. Prije svega, treba naglasiti da je razina znanja i matematičkih sposobnosti koja se od učenika traži na tom natjecanju izrazito visoka i daleko viša od državne razine za 8. razred u Hrvatskoj. Učenici moraju vješto koristiti kvadratnu jednadžbu, nejednakosti među sredinama, invarijante, prebrojavanje, tetivne četverokute, karakteristične točke trokuta, kongruencije i razne tipove diofantskih jednadžbi. Broj članova hrvatske ekipe varira ovisno o rezultatima, načinu sudjelovanja i izvorima financiranja. Naši učenici su dva puta osvojili četiri medalje: 2021. dvije srebrne i dvije brončane, a 2018. tri srebrne i jednu brončanu.

Hrvatska juniorska matematička olimpijada

Pravila HJMO propisuju da se na to natjecanja poziva, ovisno o rezultatu na državnom natjecanju, od 3 do 5 učenika sedmih razreda i od 5 do 8 učenika osmih razreda. Natjecanje traje 4 sata i test se sastoji od četiri zadatka iz četiri područja, kao na JBMO.

Gradivo koje se može pojaviti na testu uključuje sljedeće teme.

Algebra	potencije i algebarski izrazi, jednadžbe i sustavi, nejednakosti među sredinama
Kombinatorika	prebrojavanje, Dirichletov princip, bojanja, invarijante, konstrukcije primjera
Geometrija	klasična geometrija trokuta (sukladnost i sličnost, karakteristične točke), Pitagorin poučak, kružnica (obodni i središnji kut)
Teorija brojeva	djeljivost, diofantske jednadžbe

Gradivo koje **neće** biti uključeno: matematička indukcija, kompleksni brojevi, polinomi, funkcijske jednadžbe, stereometrija (geometrija prostora), analitička geometrija (jednadžba pravca), vektori, trigonometrija, mali Fermatov teorem, Eulerova funkcija itd.

Detaljnija prezentacija i arhiva sa zadacima iz prethodnih godina se nalazi na stranici:
https://natjecanja.math.hr/hjmo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HMOK se održava u dva kola, a na prvo kolo se poziva oko 50 učenika iz svakog od 4., 5. i 6. razreda. Prvo kolo se održava online putem posebnog sustava i učenici rješavaju 10 zadataka u 3 sata. Svaki zadatak nosi 1 bod i odgovor je troznamenkasti broj. Boduje se isključivo točan odgovor bez postupka, te se bodovanje odvija automatski i učenici rezultate dobivaju putem sustava po isteku vremena za rješavanje.

Na temelju rezultata prvog kola, u drugo kolo se poziva oko 30 učenika iz svakog razreda. U drugom kolu se test sastoji od 5 zadataka, a svaki nosi 10 bodova. Boduje se postupak kao na županijskom ili državnom natjecanju. Učenici testove rješavaju u lokalnim ili regionalnim centrima uz nadzor dežurnog nastavnika. Dežurni nastavnici skeniraju učenička rješenja i skenove šalju povjerenstvu za provedbu HMOK-a koje ih boduje.

Zadaci koji se postavljaju na HMOK-u za učenike predstavljaju najveći izazov koji se pred njih stavlja na nekom natjecanju u toj dobi. To su zadaci koji zahtijevaju visoku razinu logičkog zaključivanja, a izbor zadataka pokriva sadržaje iz djeljivosti i geometrije, te logičko-kombinatornih zadataka i problemskih zadataka koji se mogu riješiti jednadžbama.

Više informacija i testovi s prošlih natjecanja se mogu naći na stranici:
https://natjecanja.math.hr/hmok/

Vrednovanje na natjecanjima i princip „Slijedi grešku“

Vrednovanje učeničkih rješenja je vrlo izazovan posao zbog nekoliko razloga. Prije svega može biti vrlo kompleksno predvidjeti sve moguće pristupe rješavanje i matematičku analizu kojom se ti pristupi mogu usporediti kako bi se različiti pristupi pravedno vrednovali. Glavni postupak kreiranju bodovne sheme je stoga određivanje **ključnih koraka** bez kojih rješenje ne može funkcionirati. Nakon toga slijedi donošenje niza odluka o detaljima bodovne sheme – koliko bodova će nositi pojedini tehnički dijelovi, hoće li pogađanje točnog rezultata nositi bodove, hoće li se bodovi oduzimati i koliko bodova za pojedinu vrstu pogreške (nerazmatranje pojedinih slučajeva, nedostatak provjere rješenja) itd. Formulacija ključnih koraka može se smatrati alatom koji olakšava vrednovanje, posebno ako je jasno formulirana od strane ispravljača ili komunicirana od strane povjerenstva ispravljačima. No, čak i uz sheme u koje je utrošeno mnogo vremena i truda, postoje situacije u kojima ispravljači moraju donijeti odluke koje nadilaze shemu. U tome im svakako može i treba pomoć osoba koje su sheme sastavljale i koje poznaju strukturu ključnih koraka.

Na natjecanjima iz matematike se posebno cijeni učenička kreativnost i nije rijetkost da učenici pronađu alternativne načine rješavanja koji nisu predviđeni službenim rješenjima. Također, učenici rade greške u zaključivanju i računanju i može biti izazovno vrednovati radove u kojima se pojavljuju takve greške. Kao dodatna smjernica ili alat u vrednovanju takvih situacija formuliran je **princip „Slijedi grešku“**. Ovo načelo ima polazište u već opisanoj interpretaciji da se vrednuju ključni koraci. Ti ključni koraci se mogu opisati koristeći procesne ishode (primjena teorema, otkrivanje i zapisivanje pravilnosti, smisleno uvođenje novog objekta ili promatrane veličine itd.). Primjenom principa slijedi grešku učeničko rješenje s greškom vrednuje se ovisno o razini greške, pri čemu se bodovi dodjeljuju i za dijelove rješenja koji slijede nakon greške ako u tim dijelovima učenik pokazuje postizanje predviđenih ishoda. Princip „Slijedi grešku“ suprotstavljen je načinu vrednovanja u kojem se nakon greške ne mogu dodijeliti dodatni bodovi. Naglašavamo da se princip jednako koristi na svim razinama!

Primjena principa može biti vrlo suptilna jer je potrebno procijeniti u kojoj mjeri greška utječe na daljnje zaključivanje i strukturu rješenja. Vrlo često računske greške ne čine rješenje ni jednostavnijim ni kompliciranijim, već utječu samo na međurezultate i konačni rezultat. Iako je u matematici važno inzistirati na preciznosti, ovakve greške treba minimalno penalizirati. Na primjer, oduzimamo samo 1 bod za pogrešan konačni rezultat, a dodjeljujemo bodove za sve ostale dijelove rješenja.

Konceptualne greške mogu bitno promijeniti složenost rješenja. Na primjer, u geometriji ponekad učenici pogrešno zaključuju da pretpostavke iz zadatka povlače neka dodatna svojstva (recimo, da je trokut koji promatramo jednakokračan) te nakon toga dokazuju tvrdnju zadatka samo u pojednostavljenom posebnom slučaju. Takva rješenja obično nose vrlo mali broj bodova. S druge strane, neke greške čine problem gotovo nemogućim za riješiti. Tipičan primjer je postavljanje pogrešne jednadžbe za koju nisu dostupne metode rješavanja u tom trenutku. U takvim situacijama posebno je važno poznavati ideju za vrednovanja zadatka kako bi se moglo učeničko rješenje usporediti s postignućima ostalih učenika.

Princip „Slijedi grešku“ ilustriramo kroz nekoliko primjera. U prvom primjeru analiziramo pogreške učenika u rješavanju zadatka sa školskog natjecanja 2015. za 5. razred.

Primjer 1. Izračunaj $149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291$.

Prvo prikazujemo službene prijedloge bodovanja. Zadatak nosi ukupno 6 bodova.

Prvi način:

$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291$	
$= 149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291$	1 BOD
$= 149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291$	1 BOD
$= 76 \cdot (149 - 40 + 291)$	1 BOD
$= 76 \cdot (109 + 291)$	1 BOD
$= 76 \cdot 400$	1 BOD
$= 30\,400$	1 BOD

Drugi način:

$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291$	
$= 149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291$	1 BOD
$= 149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291$	1 BOD
$= 11\,324 - 3\,040 + 22\,116$	2 BODA
$= 8\,284 + 22\,116$	1 BOD
$= 30\,400$	1 BOD

Pažljivim promatranjem postupka možemo uočiti ključne korake koji se boduju. U oba načina rješenje započinje računanjem s malim brojevima, ali uz **poštivanje redoslijeda izvođenja računskih operacija i zagrada**, te nosi 2 boda.

U prvom načinu **uočavanje i izlučivanje zajedničkog faktora (distributivnost)** je ključna ideja koja pojednostavljuje računanje, te nosi 3 boda. Zadnji bod se dodjeljuje za konačni rezultat (množenja broja 76 s 4). U drugom načinu se računske operacije provode redom, ali s većim brojevima. Točno **množenje dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva** nosi 2 boda, a **zbrajanje i oduzimanje višeznamenkastih brojeva** nosi još 2 boda.

Promotrimo rješenja dva učenika koja oba griješe u računanju umnoška $6 \cdot 4$ i kao rezultat dobivaju 21.

Rješenje učenika A:

$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - \underline{6 \cdot 4}) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - \mathbf{21}) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - 40 \cdot 79 + 76 \cdot 291$
$= 11\,324 - 3\,160 + 22\,116$
$= 8\,164 + 22\,116$
$= 30\,280$

Rješenje učenika B:

$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 29$
$= 149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291$
$= 76 \cdot (149 - 40 + 291)$
$= 76 \cdot (109 + 291)$
$= \underline{76 \cdot 400}$
$= \mathbf{30\,100}$

Ukoliko se prijedlog bodovanja slijedi doslovno učenik *A* će u tom zadatku dobiti 1 bod (od 2 boda) za točno izračunavanje plavo označenih rezultata, a učenik *B* dobiva 5 bodova (sve osim posljednjeg boda sheme). Učenici *A* i *B* imaju istu računsku grešku $6 \cdot 4 = 21$. Nije bitno u kojem dijelu rješenja su pogriješili, stoga bi trebali imati i jednaki broj bodova. Primjereno je za ovakvu računsku pogrešku ukupno oduzeti 1 bod.

U situacijama u kojima učenik napravi konceptualnu pogrešku potrebno je procijeniti kolika je značajna ta pogreška i koliko bodova učenik treba izgubiti zbog te greške.

Rješenje učenika C:

$149 \cdot 76 - (\underline{55 - 5 \cdot 3}) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - (\mathbf{50 \cdot 3}) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - 150 \cdot 76 + 76 \cdot 291$
$= 11\,324 - 11\,400 + 22\,116$
$= 33\,440 - 11\,400$
$= 22\,040$

Rješenje učenika D:

$149 \cdot 76 - (\underline{55 - 5 \cdot 3}) \cdot (\underline{100 - 6 \cdot 4}) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - (\mathbf{50 \cdot 3}) \cdot (\mathbf{94 \cdot 4}) + 76 \cdot 291$
$= 149 \cdot 76 - 150 \cdot 376 + 76 \cdot 291$
$= 11\,324 - 56\,400 + 22\,116$
$= 33\,440 - 56\,400$
$= 22\,960$

U ovim rješenjima učenici rade konceptualnu pogrešku jer ne poštuju redoslijed izvođenja računskih operacija i dobivaju pogrešan konačni rezultat. Kod učenika C treba uzeti u obzir da je pogreška napravljena samo jednom, a učenik D tu grešku ponavlja. Stoga bi bilo primjereno takvu pogrešku kod učenika C penalizirati s 2 boda, a kod učenika D s 3 boda, ali vrednovati ostale korake.

Dodatno, uočimo da učenici svojom pogreškom dobivaju izraz 11 324 – 11 400 + 22 116, odnosno 11 324 – 56 400 + 22 116, za koji postoji mogućnost da će ih zbuniti jer učenici 5. razreda ovakve brojevne izraze računaju redom, a još ne koriste negativne cijele brojeve. Takva situacije je prilika za uočavanje pogreške, a ako ju učenik ne uoči oduzimanje bodova je dodatno opravdano.

Sljedeći primjer je bio zadan na županijskom natjecanju 2015. za 7. razred.

Primjer 2. Broj stranica jednog mnogokuta je za 40 % veći od broja stranica drugog mnogokuta. Zbroj veličina svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta je za 1080° manji od zbroja veličina svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta. Koliko vrhova ima svaki od tih mnogokuta?

Promotrimo i u ovom slučaju prvo službeno rješenje. Zadatak nosi 10 bodova.

Ako drugi mnogokut ima x stranica, onda prvi ima $x + 0.4 = 1.4x$ stranica.	2 BODA
Budući da je zbroj veličina svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta za 1080° manji od zbroja veličina svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta, može se pisati	
$(1.4x - 2) \cdot 180° = (x - 2) \cdot 180° + 1080°$ / :180°	3 BODA
$1.4x - 2 = x - 2 + 6$	1 BOD
$0.4x = 6$	1 BOD
$x = 15$	1 BOD
$1.4x = 21$	1 BOD
Riječ je o mnogokutima s 21 i 15 vrhova.	1 BOD

Analizirajući prijedlog bodovanja, zaključujemo da je ključni dio rješenja **modeliranje linearnom jednadžbom** što nosi 5 od 10 bodova. **Rješavanje jednadžbe i pisanje odgovora** nose preostalih 5 bodova.

Učeničko rješenje s pogrešnom formulom. Koristeći pogrešnu formulu za zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta učenik zapisuje jednadžbu $(1.4x - 3) \cdot 180° = (x - 3) \cdot 180° + 1080°$, te nakon toga analognim računom dobiva ispravna rješenja.

U ovom primjeru učenik je napravio jednu pogrešku (koju sustavno ponavlja). Očito je da je ishod *Kontekstualni zadatak modelira linearnom jednadžbom* ostvaren stoga bi učenik bi za ovakvo rješenje trebao dobiti 9 bodova. Naime, učenika ne treba dva puta kažnjavati za istu pogrešku i dovoljno je oduzeti 1 bod zbog pogrešne formule obzirom da osnovna namjena zadatka nije poznavanje formule za zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta već kontekstualni zadatak modelirati matematičkim modelom.

Učeničko rješenje s pogreškom u prepisivanju. U drugom primjeru promatramo rješenje u kojem učenik pogrešno prepisao broj iz prvog u drugi red, pa napisao $1.4x - 2 = x - 4 + 6$. Nakon toga učenik rješava jednadžbu ispravnim postupkom i zaključuje da je riječ je o mnogokutima s 10 i 14 vrhova.

U ovom primjeru je također ishod o modeliranju jednadžbom ispunjen stoga bi učenik bi za ovakvo rješenje trebao dobiti 9 bodova bez obzira na pogrešna rješenja. Bod se oduzima u dijelu pogrešnog prepisivanja, a dalje se boduje principom „Slijedi grešku“. Također, moguća je interpretacija da učenik ima mogućnost provjeriti svoje rješenje uvrštavanjem u početnu jednadžbu, ali nema razloga to činiti jer nema potrebu sumnjati u dobiveni rezultat.

Učeničko rješenje s nemogućim rezultatom. U trećem primjeru imamo rješenje koje ima istu vrstu greške, ali ta greška bitno mijenja smislenost rješenja. U ovom rješenju učenik u drugom redu zapisuje $1.4x - 2 = x - 3 + 6$, što vodi do rješenja $x = 12.5$.

U ovom primjeru se princip „Slijedi grešku“ ne bi smio primijeniti na isti način kao u prethodnom slučaju jer dobivena rješenja ne odgovaraju kontekstu. Učenik ne može zaključiti da je rješenje mnogokut s 12.5 vrhova, te bi trebao ustanoviti pogrešku u računu. Može se promatrati da je učenik ispravno modelirao jednadžbom i ispravno provodio računske operacije u rješavanju jednadžbe, ali bodovi se ne bi trebali dodijeliti za dijelove u kojima interpretacija rezultata nema smisla. Na takav način bismo ovo rješenje bodovali sa 6 bodova jer se oduzima bod zbog greške u prepisivanju i zadnja tri boda službenog rješenja.

Na školskom natjecanju 2021. za 7. razred postavljen je sljedeći zadatak za 6 bodova.

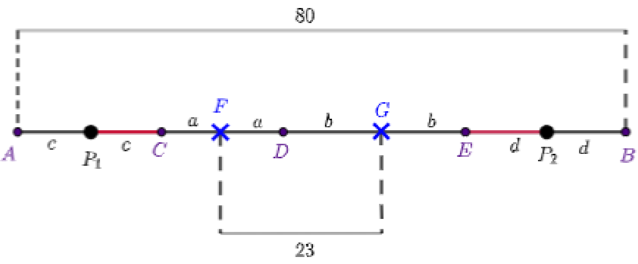
Primjer 3. Koja je 2021. znamenka iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{20}{21}$?

Rješenje ovog zadatka se sastoji u dijeljenu broja 20 sa 21, što nosi 2 boda, zapisu rezultata u obliku periodičnog decimalnog broja $0.\dot{9}5238\dot{0}$, što nosi još 1 bod, dijeljenja broja 2021 sa 6 (jer je to duljina perioda) s ostatkom, što nosi 1 bod, te zaključka da je 2021. znamenka traženog broja upravo 8, što nosi još 2 boda. Princip „Slijedi grešku“ ilustriramo na primjeru učeničkog rješenja u kojem učenik zbog greške u dijeljenju zaključuje da decimalni zapis broja $\frac{20}{21}$ glasi $0.\dot{9}523\dot{8}$ i ima period duljine 5. Ako nakon te greške dijeli 2021 sa 5 i dobiva ostatak 1, te zaključuje da je tražena znamenka 9, treba dobiti ukupno 4 boda (sve osim početna 2 boda za dijeljenje).

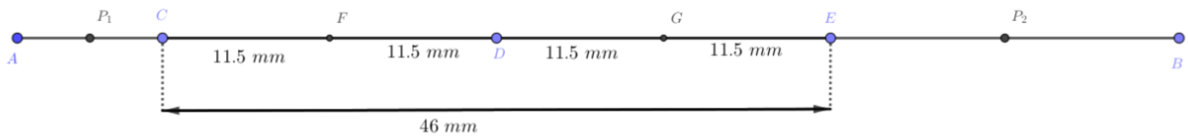
U nastavku diskutiramo zadatak zadan na županijskom natjecanju 2021. za 5. razred.

Primjer 4. Na dužini $\overline{AB}$ duljine 80 mm istaknute su redom točke C, D i E tako da je točka C najbliža točki A. Udaljenost između polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$ iznosi 23 mm. Koliko su centimetara udaljena polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$?

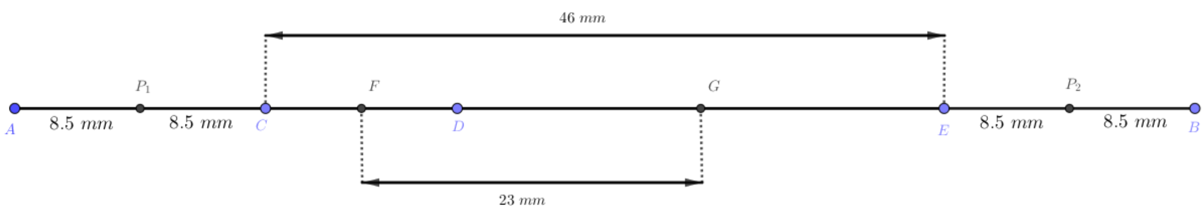
Analizom rješenja zadatka možemo utvrditi da su ključni koraci utvrditi da je $|CE| = 46\ \mathrm{mm}$ i nakon toga uočiti da je zaista moguće izračunati udaljenost polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ jer je moguće odrediti koliki je **zbroj njihovih duljina**, a onda i koliko je polovina tog zbroja. Prvi korak je jednostavniji, a drugi je suptilan i na njemu počiva težina zadatka. Argumentacija je mnogo jednostavnija ako **uvedemo oznake** za polovišta dužina i označimo koje dužine imaju jednake duljine. Uvedimo oznake F i G za polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, redom. Tada se zadani podaci mogu ilustrirati kao na slici.



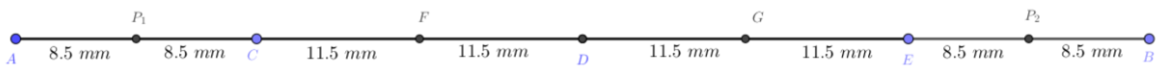
U zadatku nije navedeno da su duljine dužina $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$ jednake i stoga je to dodatna pretpostavka i njeno korištenje bitno olakšava rješavanje zadatka. Ako tako pretpostavimo, onda promatramo samo posebnu situaciju i ne rješavamo zadatak u punoj njegovoj općenitosti. Uz takvu pretpostavku bismo zaključili da vrijedi $|FD| = |DG| = 23 : 2 = 11.5\ \mathrm{mm}$, pa nakon toga da je $|CF| = |FD| = 11.5\ \mathrm{mm}$ i $|GE| = |DG| = 11.5\ \mathrm{mm}$. Konačno do ispravnog zaključka da je $|CE| = 4 \cdot 11.5 = 46\ \mathrm{mm}$ dolazimo uz **nedovoljno općenitu argumentaciju**.



Na isti način bismo komentirali pretpostavku da su duljine dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ jednake, a takva rješenja bismo prepoznali i po skicama koje su označene na sljedeći način.



Ako bismo koristili obje pretpostavke dobili bismo sljedeću sliku.



Tada zadanu situaciju interpretiramo kao posebni slučaj, pa bismo koristeći konkretne brojeve izbjegli bilo kakvu potrebu za uvođenjem oznaka i općom argumentacijom.

Prokomentirajmo sad vrednovanje ovih grešaka. Prije svega treba reći da bodovanje nekog rješenja matematičkog zadatka nije jednoznačno određeno dok neko povjerenstvo ili osoba ne odredi kriterij, te se svakako uvijek može diskutirati kako rasporediti parcijalne bodove. Kod natjecanja je prvenstveno važno da svi natjecatelji budu vrednovani po istom kriteriju i stoga državno povjerenstvo na školskoj i županijskoj razini ističe bodovanje na službenim rješenjima. Kao pomoć u usklađivanju kriterija za vrijeme ispravljanja na raspolaganju su dežurni članovi državnog povjerenstva, a prije objavljivanja poziva za državno natjecanje državno povjerenstvo provodi reviziju u kojoj pregledava radove svih učenika za koje smatra da bi kroz usklađivanje kriterija mogli konkurirati za jedno od 20 mjesta na državnom natjecanju. U praksi se pokazuje da je to oko 40 radova.

U sklopu revizije županijskog natjecanja na ovom zadatku je bilo najviše izmjena bodova. Glavni nedostatak u učeničkim rješenjima su bile dodatne pretpostavke koje olakšavaju rješavanje. Budući da u službenim rješenjima za ovaj zadatak nije navedeno kako ocijeniti učenička rješenja s dodatnim pretpostavaka, nije neobično što su se odluke županijskih povjerenstava razlikovale.

Promotrimo li službeno bodovanje zajedno s našom početnom analizom, možemo reći da je

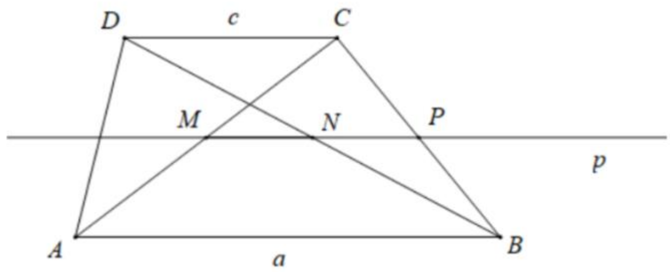
- skiciranje i označavanje uvjeta zadatka nosilo 2 boda
  - 1 bod za oznake duljina dužina koje su 80 mm i 23 mm, te
  - 1 bod za skicu,
- uvođenje polovišta i isticanje oznaka za dužine jednakih duljina nosi 2 boda
  - 1 bod za dužine $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$
  - 1 bod za dužine $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$,
- nakon toga, 1 bod nosi zaključak da je $|CE| = 46\ \mathrm{mm}$, dok
- preostalih 5 bodova nosi argumentacija i račun koji se pokazuje da tražena udaljenost između polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ iznosi $63\ \mathrm{mm}$:
  - 1 bod za ideju da će se ta udaljenost izračunati kao $c + 2a + 2b + d$ ili $80 - c - d$,
  - 1 bod za računanje zbroja duljina dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$,
  - 2 boda za povezivanje tog zbroja s oznaka *c* i *d* i zaključivanjem da je $c + d = 17\ \mathrm{mm}$,
  - 1 bod za konačni rezultat.

Svaki od ovih koraka mogli bismo interpretirati određenim ishodom, iako je to nekad dosta zahtjevno jer u istom trenutku učenik pokazuje više različitih ishoda. Na primjer, crtanjem skice učenik pokazuje svijest o važnosti korištenja grafičkog prikaza, urednost i preciznost, razumijevanje problema koji je postavljen, ispravno korištenje oznaka itd. Izvođenjem zaključka da je $|CE| = 46\ \mathrm{mm}$ učenik pokazuje da razumije definiciju polovišta, uočava sukladnost dužina, odnose među njihovim duljinama i računa dvostruku vrijednost zadanog mjernog broja. Ključni dio rješenja je upravo izricanje strategije (prvi od 5 bodova) i ovdje je najsloženije formulirati sve ishode koje učenik pokazuju jer su to uglavnom procesi povezivanja i uočavanja određenih uzoraka ili odnosa temeljeni na prethodnom razumijevanju problemske situacije i efikasno uvedenih oznaka.

Zbog složenosti ishoda, izazovno je prepoznati kako na ispravan način primijeniti princip „Slijedi grešku“. U takvim situacijama je zapravo najbolje usporediti međusobne razlike između učenika i donijeti kriterij koji će situaciju razriješiti tako da učenici koji ostvare višu razinu ishoda, odnosno rješavaju općenitiji problem dobivaju veći broj bodova. To je posebno moguće u situacijama kad jedno povjerenstvo vrednuje sve radove, kao što je bio slučaj tijekom revizije. Članovi povjerenstva koje je provodilo reviziju odlučili su oduzeti 2 boda ako je učenik koristio jednu dodatnu pretpostavku, a 3 boda ako je koristio obje. Možemo diskutirati da bismo prateći bodovnu shemu mogli oduzeti veći broj bodova, ali pri donošenju odluke su uzeti u obzir blaži kriteriji županijskih povjerenstava, osjetljivost situacije i dob učenika.

Na kraju diskutiramo primjer koji je bio zadan na županijskom natjecanju 2021. za 8. razred.

Primjer 5. Neka je $ABCD$ trapez kojemu je jedna osnovica dvostruko dulja od druge. Ako su M i N polovišta njegovih dijagonala, dokaži da je duljina dužine $\overline{MN}$ jednaka polovini duljine kraće osnovice.



U službenom rješenju korištena je ideja uočavanja srednjica. Označimo li s P polovište kraka $\overline{BC}$, slijedi da je dužina $\overline{NP}$ srednjica u trokutu BCD, te da je dužina $\overline{MP}$ srednjica u trokutu ABC. Prema poučku o srednjici znamo da je $|NP| = \frac{|CD|}{2}$ i da je $|MP| = \frac{|AB|}{2}$. Također znamo da su obje te dužine paralelne i prolaze točkom P, tj. zaključujemo da su točke M, N i P na istom pravcu. Sada slijedi

$$|MN| = |MP| - |NP| = \frac{|AB|}{2} - \frac{|CD|}{2} = |CD| - \frac{|CD|}{2} = \frac{|CD|}{2}.$$

Uvođenje točke P je nosilo 2 boda, uočavanje da se radi o srednjicama 1 bod, računanje njihovih duljina 1 bod, dokaz kolinearnosti točaka M, N i P 4 boda, te konačni račun 2 boda.

Zadatak se može riješiti i na razne druge načine, na primjer dokazujući i koristeći sličnost trokuta ABS, MNS i CDS, pri čemu je S sjecište dijagonala zadanog trapeza. Za trokute ABS i CDS to slijedi direktno korištenjem K-K poučka (i uočavanjem sukladnih kutova uz transverzalu), ali za dokaz da je i trokut MNS sličan njima nije moguće koristiti da je pravac MN paralelan osnovicama trapeza (to je tek posljedica sličnosti!) već moramo pokazati da vrijedi $|SM|:|SN| = |SC|:|SD|$ koristeći da su M i N polovišta dijagonala. Jednostavnije je direktno računati omjere koji pokazuju sličnost i daju koeficijent sličnosti, npr. ovako

$$|SM| = |CM| - |CS| = \frac{2|CS|+|CS|}{2} - |CS| = \frac{|CS|}{2} \text{ i analogno } |SN| = \frac{|DS|}{2},$$

pri čemu smo koristili sličnost trokuta ABS i CDS s koeficijentom sličnosti 2. Iz ovih jednakosti zaključujemo da su trokuti CDS i MNS slični s koeficijentom 2, iz čega slijedi tvrdnja zadatka.

U ovom primjeru pretpostavka da je pravac MN paralelan jednoj od osnovica velika je konceptualna pogreška. Zbog te pogreške nećemo dobiti pogrešno rješenje jer se radi o dokazu, ali će nedostajati važan dio argumentacije tog dokaza, što nosi 4 boda.

Rješavanje problemskih situacija linearnim jednadžbama

Linearne jednadžbe prvi su algebarski alat za rješavanje problema s kojim se učenici sreću u osnovnoj školi. Njihovoj formalnoj upotrebi prethode godine izgradnje tog pojma i primjena raznih drugih metoda koje u svojoj pozadini imaju algebarski način razmišljanja koristeći ne-simboličke reprezentacije (riječi, slike, fizički objekti itd.).

Ovisno o dobi, istu problemsku situaciju učenici rješavanju na razne načine. Ovim tekstom želimo prikazati razvoj (pred)algebarskog razmišljanja i razne metode uz diskusiju o njihovoj primjerenosti. Iste zadatke možemo zadati na različitim razinama, ali onda težinu zadatka procjenjujemo ovisno o očekivanim sposobnostima učenika na toj razini.

Predalgebra – razvoj pojma jednakosti

Već u nižim razredima osnovne škole učenici usvajaju pojam jednakosti. Neki učenici znak jednakosti doživljavaju prvo kao oznaku da nakon tog znaka treba doći rezultat računa. Kroz razne modele, poput vage, s učenicima razvijamo značenje da izrazi s lijeve i desne strane znaka prikazuju različite zapise istog broja (iznosa, količine). Takvom shvaćanju pridonose zadaci u kojima se traženi/nepoznati brojevi (označeni praznom kućicom za upis ili nekim posebnim simbolom) nalaze s obje strane znaka jednakosti. Tipičan primjer možemo pronaći na školskom natjecanju 2021. za 4. razred.

Primjer 1. Svaki od simbola Δ, $\varnothing$ i $\otimes$ predstavlja po jedan broj. Odredi vrijednost simbola tako da vrijedi:

$$7 \cdot \Delta + \otimes = 117$$
$$8 \cdot \varnothing = 56$$
$$6 \cdot \varnothing - \otimes = 30.$$

Ovdje se zapravo radi o rješavanju sustava tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice, ali taj sustav je dovoljno jednostavan da učenici mogu prepoznati slijednost u rješavanju (krećemo od druge, pa uvrštavamo u treću i konačno u prvu jednakost) i izračunati redom vrijednosti simbola koristeći osnovne računske operacije (bez potrebe za dodatnim algebarskim manipulacijama poput zbrajanja jednadžbi ili supstitucije). Način na koji označavamo nepoznanice je sporedna stvar.

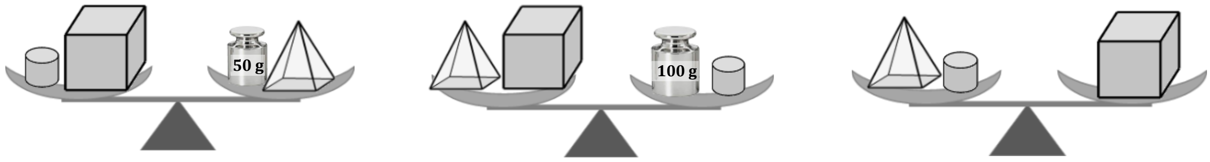
Na istom natjecanju pojavljuje se i zadatak u kontekstu koji se može modelirati jednadžbom, ali se to može ponovno izbjeći ako učenici paze na slijed korištenja uvjeta i osnovnih računskih operacija.

Primjer 2. Masa spremnika napunjenog pšenicom je 148 kg. Nakon što je iz spremnika potrošena trećina pšenice, masa spremnika s preostalom pšenicom iznosi 110 kg. Odredi masu praznog spremnika.

Pisanje jednadžbi možemo izbjeći korištenjem riječi i kratkog računa: prvo odredimo trećinu mase pšenice (148 – 110 = 38 kg), pa ukupnu masu pšenice (38 · 3 = 114 kg) i konačno masu spremnika (148 – 114 = 34 kg).

U prvom kolu Hrvatske matematičke olimpijadi za kadete 2021. za 4. razred postavljena su još dva zadatka u kojima vidimo na koji način smatramo da je primjereno da učenici te dobi razmišljaju na algebarski način, ali bez direktnog korištenja nepoznanica i zapisa jednadžbi.

Primjer 3. Marta se igra modelima kocke, valjka i piramide te utezima stavljajući ih na vagu. Na utezima je vidljiva njihova masa. Ako su vage na slikama u ravnoteži, odredi ukupnu masu kocke, valjka i piramide u gramima.



U rješenju ovog zadatka je predviđeno da učenici koristeći model vage zaključuju na sličan način kao da rješavamo tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Najkraći način je izjednačiti masu svih objekata koji se nalaze na lijevim stranama sa masom svih objekata na desnim stranama vaga i nakon toga ukloniti s obje strane po jednu kocku, valjak i piramidu. Time dobivamo da sva tri tijela zajedno imaju 150 g. No, postoje i drugačiji načini rješavanja.

Primjer 4. U parku je grupa učenika. Ako na svakoj klupi u parku sjedi po 7 učenika, bez mjesta će ostati 8 učenika. Ako bi učenici sjedili po 9 na klupi, četiri bi klupe ostale prazne. Koliko je učenika u parku?

U pozadini rješenja ovog zadatka je linearna jednadžba $7 \cdot x + 8 = 9 \cdot (x - 4)$, ali učenici mogu do rješenja doći i koristeći prirodnu logiku i riječi.

Ako 8 učenika koji su ostali bez mjesta rasporedimo po dvoje na klupe na kojima već sjedi po 7 učenika imat ćemo četiri klupe na kojima sjedi 9 učenika, a na svim ostalim klupama je po 7 učenika. Ispraznimo sada četiri klupe s po 7 učenika. Tih 28 učenika možemo rasporediti po dvoje na 14 klupa na kojima već sjedi po 7 učenika. Sada su četiri klupe prazne pa više nema klupa sa 7 učenika. Dakle, u parku je 4+14 = 18 klupa i 18·9=162 učenika.

Metoda rješavanja unatrag

U sljedećem primjeru sa školskog natjecanja 2021. za 4. razred uočite da je simboličko rješenje vrlo jednostavno prikazati grafički i riječima, a metoda rješavanjem unatrag se nameće zbog prirode problema (opis procesa u kojem je poznato završno stanje, a nepoznato početno).

Primjer 5. Maja, Ana i Ivan imaju zajedno 150 kn. Ivan je dao Maji 13 kn, Maja je dala Ani 22 kn, a Ana je dala Ivanu 33 kn. Nakon toga svatko od njih imao je jednaki iznos. Koliko je kuna na početku imala Maja, koliko Ana, a koliko Ivan?

Algebarski rješenje možemo postaviti kao sustav linearnih jednadžbi s tri nepoznanice M, A i I koje redom prikazuju iznos novca koje na početku imaju Maja, Ana i Ivan.

Vrijedi M+A+I=150. Također vrijedi M+13-22 = A+22-33 = I+33-13, tj. M-9 = A-11 = I+20. Vidimo da možemo prikazati Anin i Ivanov iznos novca preko Majinog: A = M+2, I = M-29. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo M+(M+2)+(M-29) = 150, iz čega slijedi 3M = 177, tj. M = 177:3 = 59. Dakle, Maja je imala 59 kn, Ana 61 kn, a Ivan 30 kn.

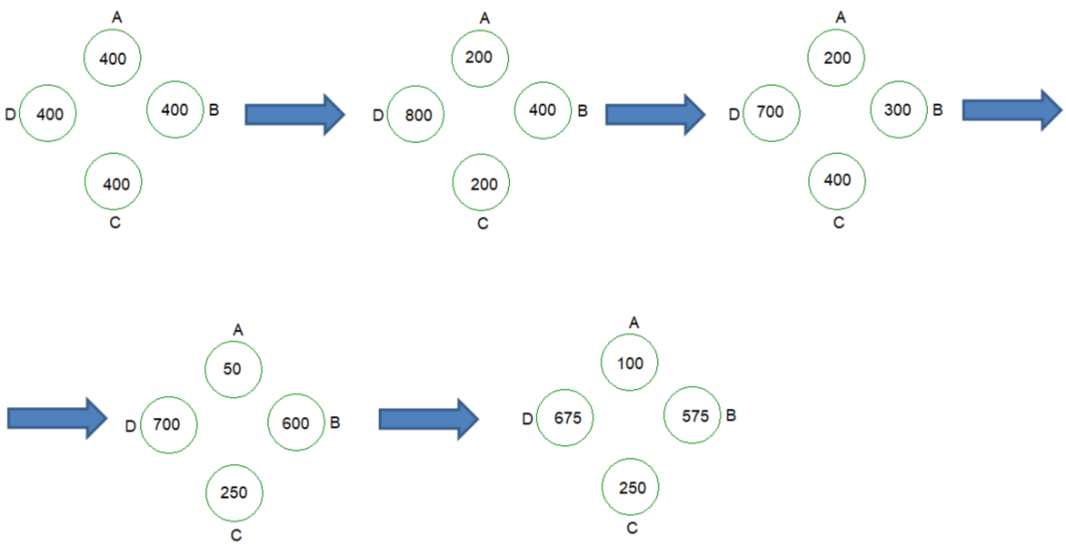
Sva ponuđena službena rješenja svode se na rješavanje unatrag pri čemu je ključno uočiti da će na kraju svako dijete imati 50 kn. Taj zaključak pojednostavljuje i algebarsko rješenje jer iz M-9 = A-11 = I+20 = 50, slijedi odmah M=59, A=61, I=30. Rješavanje unatrag možemo opisati *riječima* ili elegantno prikazati *tablicom*:

	Maja	**Ana**	**Ivan**
Na kraju	50	50	50
Prije nego je Ana Ivanu dala 33 kn	50	83	17
Prije nego je Maja dala Ani 22 kn	72	61	17
Prije nego je Ivan dao Maji 13 kn	59	61	30

U nižim razredima obično smatramo da korištenje jednadžbi nije primjereno uzrastu i inzistiramo na njihovom izbjegavanju na pomalo umjetan način. Stoga je vrlo poučno razmotriti primjere u kojima su algebarske metode manje efikasne. Sljedeći primjer je zadan na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi za kadete 2020. za 4. razred.

Primjer 6. Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svojem lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

Grafički prikazujemo proces kojim vidimo da je Branimir na početku imao 575 zlatnika.



Uočite koliko bi zahtjevan bio sustav s četiri nepoznanice kojim bismo modelirali ovaj problem. Naime, nakon prve podjele Ante ima $\frac{A}{2}$, Branko ima $B+\frac{A}{4}$, dok Dubravko ima $D+\frac{A}{4}$ zlatnika. Nakon druge podjele Branko ima $\frac{B}{2}+\frac{A}{8}$, Ante ima $\frac{A}{2}+\frac{B}{4}+\frac{A}{16}$, dok Celestin ima $C+\frac{B}{4}+\frac{A}{16}$. Nakon treće podjele Celestin ima $\frac{C}{2}+\frac{B}{8}+\frac{A}{32}$, Branko ima $\frac{B}{2}+\frac{A}{8}+\frac{C}{4}+\frac{B}{16}+\frac{A}{64}$, a Dubravko $D+\frac{A}{4}+\frac{C}{4}+\frac{B}{16}+\frac{A}{64}$. Konačno, nakon zadnje podjele zaključujemo da vrijedi

$$\frac{D}{2}+\frac{A}{8}+\frac{C}{8}+\frac{B}{32}+\frac{A}{128}=\frac{A}{2}+\frac{B}{4}+\frac{A}{16}+\frac{D}{4}+\frac{A}{16}+\frac{C}{16}+\frac{B}{64}+\frac{A}{256}=$$
$$=\frac{B}{2}+\frac{A}{8}+\frac{C}{4}+\frac{B}{16}+\frac{A}{64}=\frac{C}{2}+\frac{B}{8}+\frac{A}{32}+\frac{D}{4}+\frac{A}{16}+\frac{C}{16}+\frac{B}{64}+\frac{A}{256}=400.$$

Promotrimo primjer s državnog natjecanja 2019. za 5. razred u kojem metoda rješavanja unatrag bitno olakšava rješavanje, a domišljato korištenje grafičkog prikaza daje dodatnu argumentaciju koja nije samo alternativni zapis za simbolički/algebarski pristup.

Primjer 7. Vlak je krenuo s početne stanice s određenim brojem putnika. Na sljedeće tri stanice se redom iskrcalo $\frac{1}{8}$ putnika, pa $\frac{1}{7}$ preostalih putnika, pa $\frac{1}{6}$ preostalih putnika. Nakon toga u vlaku je ostalo 105 putnika. Ako se na stanicama nije ukrcao nijedan putnik, koliko je putnika krenulo vlakom s početne stanice?

Metoda unatrag. Nakon treće stanice je broj putnika 105, što je $\frac{5}{6}$ putnika koji su bili u vlaku nakon druge stanice. Dakle, nakon druge stanice je broj putnika 105:5·6=126. Na sličan način zaključujemo da je nakon prve stanice bilo 126:6·7=147 putnika, a na početku putovanja 147:7·8=168 putnika u vlaku.

Grafički prikaz. Vrlo elegantno korištenje grafičkog prikaza u ovom primjeru je moguće jer su upravo birani razlomci s uzastopnim nazivnicima. To omogućuje zaključivanje u svakom koraku ako u prvom koraku ukupan broj putnika podijelimo na 8.

Uočavamo da je na početku putovanja ukupan broj putnika bio 8 puta veći od jedne petine broja putnika nakon treće stanice. Dakle, na početku putovanja je bilo 105:5·8=168 putnika.

Grafički prikaz

Grafička metoda se često izdvaja kao metoda kojom učenici rješavaju problemske zadatke prije nego što počnu koristiti nepoznanice i jednadžbe, ali možemo uočiti da se često u rješenjima grafičkom metodom geometrijski oblici koriste umjesto nepoznanica (slično, kao što smo u Primjeru 1. koristili posebne simbole). Stoga ovu metodu možemo smatrati prijelazom ka formalnom korištenju jednadžbi pri čemu je njena prednost u vizualnom/zornom prikazivanju situacije. Za početak promotrimo zadatak za 4. razred postavljen na školskom natjecanju 2020.

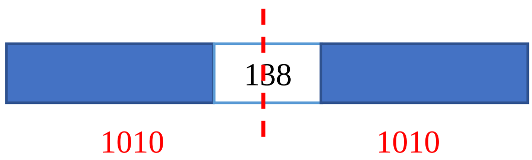
Primjer 8. Broj 2020 napiši kao zbroj dva pribrojnika od kojih je jedan za 138 veći od drugog.

U službenim rješenjima ponuđena su dva pristupa. Na prvi pogled može djelovati da se rješenja razlikuju samo u zapisu, ali detaljnijom analizom možemo vidjeti da se oba rješenja mogu prikazati grafički.

Prvi način. Grafički pribrojnike možemo prikazati kao pravokutnike.

Zaključujemo da dva plava pravokutnika zajedno prikazuju broj 2020-138=1882, a jedan pravokutnik 1882:2=941. Dakle, traženi brojevi su 941 i 1079. Uočimo da ovdje možemo izbjeći korištenje pravokutnika koristeći simbole ili riječi. Koristeći riječi učenici opisuju ono što smo prikazali: budući da je drugi pribrojnik za 138 veći od prvog, zaključujemo da prvi pribrojnik i još jednom ista vrijednost imati zbroj 2020-138=1882, pa je prvi pribrojnik 1882:2=941. Pravokutnici ili varijable imaju ključnu ulogu u konkretizaciji i smanjenju kognitivnog opterećenja.

Drugi način. Zbroj dva pribrojnika je 2020, a razlika 138. Pribrojnike dobivamo tako da od 1010 (=2020:2) oduzimamo, odnosno zbrajamo 69 (=138:2). Dakle, pribrojnici su 1010-69=941 i 1010+69=1079. Argumentacija za drugu rečenicu može biti nejasna i možemo ju dodatno ilustrirati grafički kao na slici.



Oba načina možemo prikazati i kao sustav jednadžbi x+y=2020, y-x=138 koji možemo rješavati na razne načine. Prvo rješenje se zapravo svodi na korištenje supstitucije y=x+138 i rješavanje jednadžbe x+x+138=2020. Drugo rješenje odgovara oduzimanju jednadžbi: x + x = 2020 – 138.

Na temelju ovog primjera možemo zaključiti da ni algebarski ni grafički prikaz nije nužan, ali korištenje nekog od tih prikaza olakšava rješavanje. Učenicima će ovisno o njihovom iskustvu neki od tih prikaza biti prirodniji ili dostupniji, a njihovo korištenje se može uvježbati kroz dodatnu nastavu iako možemo očekivati i da će neki učenici do tih rješenja doći bez pripreme.

Na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi za kadete 2021. godine za 4. razred zadan je zadatak čije se rješenje zapravo svodi na sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice.

Primjer 9. U prvoj bačvi nalazi se 75 litara, u drugoj 34 litre, a u trećoj 21 litra vode, pri čemu niti jedna bačva nije puna. Ako bismo prvu bačvu napunili do vrha vodom iz druge bačve, tada bi preostala voda u drugoj bačvi zauzimala polovinu obujma druge bačve. No, ako bismo drugu bačvu napunili vodom iz treće bačve, tada bi preostala voda u trećoj bačvi zauzimala četvrtinu obujma treće bačve. Ako bismo pak treću bačvu napunili vodom iz prve bačve, tada bi preostala voda u prvoj bačvi zauzimala polovinu obujma prve bačve. Odredi obujam svake pojedine bačve.

Službeno rješenje (dostupno na stranici https://natjecanja.math.hr/hmok/) je zapisano koristeći grafički prikaz isključivo zbog uzrasta, ali možemo uočiti da je matematički metoda rješavanja potpuno ista kao da smo koristili simbolički prikaz. Učenici su zadatak rješavali isključivo pogađanjem, pri čemu su neki učenici vrlo smisleno odabrali interval u kojem će tražiti rješenje. Naime, iz druge bačve moramo preliti manje od 17 litara jer u bačvi preostaje točno polovina obujma. Dakle, obujam prve bačve mora biti manji od 92 litre.

Nadalje su učenici pretpostavili da obujam u litrama mora biti prirodan broj, koji je dodatno paran kako bi i polovina obujma bila prirodan broj. Provjerom su utvrdili da obujam prve bačve ne može biti 90 litara, a da bi mogao biti 88 litara. Naime, ako je obujam prve bačve 88 litara, onda je u nju potrebno preliti 13 litara iz druge, što znači da druga bačva ima obujam 42 litre. Nadalje, iz treće je potrebno preliti u drugu 8 litara, što znači da je četvrtina obujma treće bačve 21-8=13, pa je obujam te bačve 52 litre. Konačno, prelijevanjem 31 litre iz prve u treću bačvu, u prvoj ostaje 44 litre, što je pola od 88 litara.
Iako je ovo dosta smislen i zahtjevan način zaključivanja za učenike 4. razreda, uočimo da ovakvo rješenje ne čini dokaz da drugih rješenja (posebno izvan skupa parnih prirodnih brojeva) nema te ne smatramo rješenje potpunim. Naime, iz postupka nije jasno da je rješenje jedinstveno, tj. da postoji samo jedna trojka brojeva koja zadovoljava uvjete zadatka. Upravo to je naglasak ovog teksta, a posebno dijela o takozvanoj metodi uzastopnog približavanja.

Što znači riješiti problem i metoda uzastopnog približavanja

Promotrimo jedan od najklasičnijih primjera problemskih zadataka za učenike 4. razred osnovne škole postavljen na županijskom natjecanju 2021. godine.

Primjer 10. U ljetni matematički kamp zaputilo se 713 učenika u 25 autobusa, od kojih neki imaju 33 sjedala, a neki 26 sjedala. Ako je poznato da su učenici popunili sva mjesta u autobusima, koliko je bilo autobusa s 33 sjedala, a koliko autobusa s 26 sjedala?

Slično kao u Primjeru 4. u pozadini rješenja nalaze se linearne jednadžbe koje je moguće izbjeći koristeći argumentaciju riječima. Naime, broj autobusa s 33 sjedala možemo označiti sa x, a broj autobusa s 26 sjedala s y, te uvjete zadatka tada zapisujemo kao sustav $x + y = 25$, $33x + 26y = 713$. Sustav možemo riješiti nekom od standardnih metoda (npr. supstitucijom ili suprotnim koeficijentima).

Bez korištenja simbola možemo reći da bi u slučaju kad bi svih 25 autobusa imalo 33 sjedala, onda bi ukupan broj sjedala bio 25 · 33 = 825. Budući da imamo 713 učenika, ostalo bi 825 – 713 = 112 sjedala prazno. Možemo zamisliti da ćemo iz nekih autobusa izvaditi 7 sjedala i tako dobiti autobuse sa 26 sjedala. To je potrebno učiniti u 112:7=16 autobusa. Dakle, 16 autobusa treba imati 26 sjedala, a 9 autobusa 33 sjedala. Vrlo slično bismo zadatak riješili krenuvši od pretpostavke da svih 25 autobusa ima 26 sjedala.

Neki učenici bi tražene brojeve 16 i 9 mogli pogoditi uz veći ili manji broj pokušaja. Uočimo da zbog interpretacije zadatka mi znamo da brojevi x i y u postavljenom sustavu moraju biti prirodni jer prikazuju brojeve autobusa. Nema nikakvog smisla da broj autobusa nije prirodan broj! To nam omogućava da zapravo ispišemo sve mogućnosti.

Broj autobusa s 33 sjedala	Broj autobusa s 26 sjedala	Ukupan broj sjedala
0	25	650
1	24	657
2	23	664
3	22	671
4	21	678
5	20	685
6	19	692
7	18	699
8	17	706
9	**16**	**713**
10	15	720
…	…	…

Izrada gornje tablice vrlo je vrijedno postignuće za učenike 4. razreda. Prije svega, organizacija podataka u ovakvu tablicu pokazuje sustavnost i omogućava uočavanje raznih uzoraka. Treći stupac možemo jednostavnije popuniti uočimo li da se rezultat u svakom novom retku povećava za 7, tj. za razliku broja sjedala između dvije vrste autobusa.

U tablici smo prikazali samo neke mogućnosti i to smo naznačili s tri točkice. Naime, teoretski postoji mogućnost da imamo 12 autobusa 33 sjedala ili da imamo 15 takvih autobusa itd. Potpuno rješenje zadatka može se ostvariti na dva načina:

- Ispisivanjem svih 26 redaka (broj autobusa jedne vrste može biti od 0 do 25)
- Argumentacijom zašto nije potrebno ispisivati sve retke, tj. zašto samo u jednom retku možemo dobiti broj 713.

Ovo je posebno bitan zaključak i želimo ga dodatno naglasiti. Naime, suština matematike je argumentacija i u ovom problemu, kao i u svim drugim matematičkim problemima, potrebno je pronaći sva moguća rješenja i pokazati da ne postoje druga rješenja.

Ispisivanje svih mogućnosti sasvim je prihvatljiva metoda. No, ona je moguća samo u diskretnom slučaju, kad su mogućnosti opisane prirodnim brojevima, te je dovoljno efikasna (izvediva) ako je broj mogućnosti relativno malen. U svim drugim situacijama potrebna je dodatna argumentacija kojom objašnjavamo zašto možemo odbaciti mogućnosti koje nećemo provjeravati.

Prihvatljiva argumentacija može glasiti npr. „U slučaju kad imamo 9 autobusa s 33 sjedala i 16 autobusa s 26 sjedala, ukupan broj sjedala iznosi 713. Povećamo li broj autobusa s većim brojem sjedala, ukupan broj sjedala će se povećati i bit će veći od 713. Također, smanjimo li broj autobusa s većim brojem sjedala, ukupan broj sjedala će se smanjiti i bit će manji od 713.“

Bez ovakve argumentacije rješenje nije potpuno i možemo ga smatrati usmjerenim pogađanjem (eng. *educated guess*), ali to je i dalje pogađanje koje je teško razlikovati od metode pokušaja i pogrešaka te ne nosi sa sobom vrijednost dokaza.

U obrazovanju je vrlo važno poticati postavljanje hipoteza, posebno kao oblike aproksimacije i procjene jer su te vještine kod naših učenika nerijetko zapostavljene. Ipak, u rješenjima zadataka na natjecanjima potrebno je zapisati i dokaz, odnosno argumentaciju koja će potvrditi našu hipotezu.

U literaturi se ovakav način razmišljanja, koji smo nazvali usmjerenim pogađanjem, naziva i *metodom uzastopnog približavanja*. U ovom primjeru učenik bi mogao argumentirati ovako: „Uzmemo li 10 autobusa s 33 sjedala, morat ćemo uzeti 15 autobusa s 26 sjedala i imat ćemo ukupno 720 sjedala. Uzmemo li 9 autobusa s 33 sjedala, imat ćemo 713 sjedala i to je taman koliko tražimo“. Ovakav argument ne otkriva je li učenik svjestan da u problemu postoji samo jedno rješenje i može li se do njega doći postupnim približavanjem.

Dodatni problem koji čini izrazito teškim za ispravljanje rješenja koja koriste metodu uzastopnog približavanja je varirajući broj pokušaja koje bi učenici mogli imati. Naime, neki učenici bi mogli ispisati 10 mogućnosti, sustavno se približavajući prema rješenju. Neki učenici bi mogli ispisati 7 ili 4 ili neki drugi broj mogućnosti, ovisno o početnim brojevima koje odaberu, ali i brzini kojom se odluče približivati rješenju. Je li vrijednije rješenje s 10 ili 4 mogućnosti? Što je s rješenjima koja imaju samo 3 ili 2 mogućnosti? A što s onima u kojima učenici započnu odmah s traženim rješenjem? Vidimo da u vrednovanju tih rješenja ne možemo kao kriterij razmatrati broj pokušaja, već je ključno promotriti jesu li učenici zapisali argumentaciju zašto je rješenje jedinstveno!

Postavljanje jednadžbi i rješavanje sustava još je jedan od prihvatljivih načina argumentacije. Naime, postavljanjem jednadžbi zapisujemo uvjete koji moraju vrijediti, a rješavanjem te uvjete zapisujemo u ekvivalentnim oblicima ili iz njih zaključujemo što i dalje mora vrijediti. Krenemo li od sustava $x + y = 25$, $33x + 26y = 713$, te dobijemo (npr. metodom supstitucije) da je $x=9$, onda smo sigurni da x može biti samo 9 i da nema drugih rješenja zadanog problema.

Kriterij koji možemo općenito iskazati kad rješenje možemo prihvatiti kao potpuno je mogućnost primjene analognog postupka s bilo kojim drugim brojevima. To u nekim problemima znači da možemo imati proizvoljno velike brojeve ili čak kontinuirane vrijednosti (realne brojeve) kao rješenja. Promotrimo primjer koji je zadan na županijskom natjecanju 2021. za 7. razred.

Primjer 11. Maja ide u školu za slastičare. Dobila je zadatak izraditi 400 ml soka u kojem je 75% čistog jabučnog soka. Na raspolaganju ima sok sa 85% udjelom i 60% udjelom čistog jabučnog soka. Kako će to napraviti?

U ovom primjeru treba prije svega uočiti da nijedan od zadanih brojeva (400, 75, 85, 60) ne mora biti prirodan kako bi problem bio smislen. Prvi broj mora biti pozitivan realan broj, a preostali brojevi moraju biti realni brojevi iz intervala [0, 100] takvi da je prvi od njih između druga dva. Stoga svako potpuno rješenje ovog zadatka mora sadržavati metodu i argumentaciju kojom se može riješiti opći problem: Ako moramo izraditi K ml soka u kojem je c % čistog jabučnog soka, koliko treba pomiješati soka s udjelom a % i soka s udjelom b %?

Ovaj komentar posebno je važan jer je nedostatak postavljene varijante u tome što je rješenje jednostavno pogoditi i zbog toga učenici ne osjećaju potrebu za dodatnom argumentacijom ili im se čini da se ta argumentacija podrazumijeva, da je intuitivna ili ju ne znaju izraziti.

Na prvi pogled može se činiti da postoji samo jedan valjani način argumentacije i da u tom načinu koristimo modeliranje linearnim jednadžbama, ali u nastavku donosimo nekoliko različitih rješenja. Naglasak u tim rješenjima je na argumentaciji jedinstvenosti rješenja.

Prvo rješenje (sustav ima jedinstveno rješenje).
Neka je x količina (u ml) otopine od 85%, a y količina (u ml) otopine od 60% koje pomiješane daju otopinu od 75%. Tada vrijedi $0,85x + 0,6y = 0,75 \cdot 400 = 300$ i $x+y = 400$.
Ovo je linearni sustav dvije jednadžbe dvije nepoznanice i poznato je da takvi sustavi imaju <u>jedinstveno rješenje</u>. Rješenje tog sustava je $x=240$ i $y=160$, što provjeravamo uvrštavanjem.

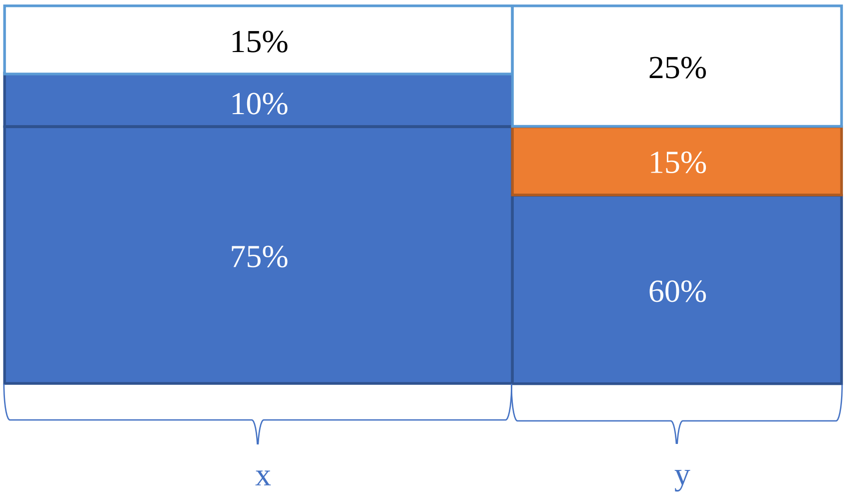
Drugo rješenje (jedna jednadžba).
Neka je x količina (u ml) otopine od 85%. Tada je 400-x količina (u ml) otopine od 60% koje pomiješane daju otopinu od 75%. Tada vrijedi $0,85x + 0,6 \cdot (400-x) = 0,75 \cdot 400 = 300$.
Sređivanjem dobivamo $0,25x+240 = 300$.
Jednadžba je redom ekvivalentna sa $0,25x = 60$ i $x = 240$, pa je <u>jedino rješenje</u> $x=240$.

Treće rješenje (sustav riječima).
Trebamo dobiti otopinu koja ima $400 \cdot 0,75 = 300$ ml čistog soka.
Ako uzmemo 400 ml otopine od 60%, onda ćemo imati $400 \cdot 0,6 = 240$ ml čistog soka.
<u>Razliku</u> 300 – 240 = 60 ml čistog soka trebamo dobiti <u>tako da dio otopine</u> od 60% <u>zamijenimo</u> otopinom od 85%. To znači da je 60 ml zapravo 85% - 60% = 25% količine koju treba zamijeniti. Trebamo zamijeniti 60 ml / 0,25 = 240 ml i to je količina otopine od 85%.
Otopine od 60% trebamo uzeti 160 ml.

Napomena: možemo i krenuti od 400 ml otopine od 80%.

Četvrto rješenje (obrnuta proporcionalnost).
U otopini od 85% bi 10% otopine čistog soka trebalo zamijeniti vodom, a u otopini od 60% bi 15% otopine vode trebalo zamijeniti čistim sokom.
Zato se količine otopina od 85% i 60% moraju odnositi kao 15:10 = 3:2.
Dijelimo 400 ml na 3+2=5 dijelova, što daje 80 ml.
Otopine od 85% trebamo uzeti $3 \cdot 80=240$ ml, a otopine od 60% trebamo uzeti $2 \cdot 80=160$ ml.

Peto rješenje (model površine).
Neka je x količina (u ml) otopine od 85%, a y količina (u ml) otopine od 60% koje pomiješane daju otopinu od 75%. Na slici imamo pravokutnike širina x i y, plavo je 85% lijevog pravokutnika i 60% desnog pravokutnika.



Nakon miješanja, 10% lijevog pravokutnika mora postati 15% desnog. Zato vrijedi 10x=15y, tj. x:y =3:2. Također vrijedi x+y=400. Dijelimo 400 ml na 3+2=5 dijelova, što daje 80 ml i slijedi x=3·80=240 i y=2·80=160.

Šesto rješenje (jedinstvenost zbog rasta).
Ukupna količina mješavine je stalna (400 ml). Povećamo li udio otopine od 85% (i smanjimo udio otopine od 60% za istu količinu) u mješavini, povećat će se udio čistog soka (koncentracija) mješavine. Zato je rješenje jedinstveno.
Tvrdimo da treba uzeti 240 ml otopine od 85% i 160 ml otopine od 60%.
Zaista, tako ćemo dobiti 400 ml mješavine koja ima 240·0,85+160·0,6=300 ml čistog soka. Budući da 300 ml iznosi 75% od 400 ml, to je traženo rješenje.

Sedmo rješenje (jedinstvenost zbog grafa linearne funkcije).
Neka je x količina (u ml) otopine od 85%. U mješavini treba biti 0,75·400 = 300 ml čistog soka.
Količina čistog soka u mješavini iznosi k=0,85x+0,6· (400 - x)=0,25x+240.
To je linearna funkcija i poznato je da je njen graf pravac.
Taj pravac će točno jednom presjeći pravac k=300.
Ako uzmemo x=240, onda je 0,25·240+240=300, pa je to traženo rješenje.
Otopine od 60% trebamo uzeti 400-240=160 ml.

Uočite da smo u nekim od ovih rješenja do konačnog rezultata došli računom koji ujedno opravdava jedinstvenost rezultata, dok smo u drugima rezultat pogodili i nakon toga opravdali jedinstvenost. Rješenje problema s općim brojevima glasi: potrebno je uzeti $\frac{c-b}{a-b} \cdot K$ mililitara otopine s udjelom $a\%$ i $\frac{a-c}{a-b} \cdot K$ mililitara otopine s udjelom $b\%$ kako bismo dobili K mililitara otopine s udjelom $c\%$.

Primjer učeničkog rješenja:

3\. ZADATAK → 400 ml s 75% (300 ml ČISTOG SOKA)

TREBA x ml s 85% + y ml s 60% ✓

$x+y=400$ ml

210 : 100 = 2,1

200 : 100 = 2

200 ml 85% + 200 ml 60%

↓ ↓

170 ml ČISTOG + 120 ml ČISTOG = ~~290~~ ml ← PREMALO

210 ml 85% + 190 ml 60%

↓ ↓

178.5 ml ČISTOG + 114 ČISTOG = ~~292.5~~ ml ← PREMALO

240 ml 85% + 160 ml 60%

↓ ↓

204 ml ČISTOG + 96 ml ČISTOG = 300 ml ČISTOG

$85 \cdot 2.1$ = 85 + 1700 = 178.5

$1.9 \cdot 60$ = 114.0

178.5 + 114 = 292.5

$2.4 \cdot 85$ = 120 + 1920 = 204.0

$1.6 \cdot 60$ = 96.0

TREBA STAVITI 240 ml SOKA S 85% ČISTOG SOKA I 160 ml SOKA S 60% ČISTOG SOKA.

x = 240 ml

y = 160 ml ✓

Koliko bodova biste Vi dodijelili? Može li učenik istom metodom riješiti opći problem?

Uz ovo poglavlje možete pogledati i **online predavanje**: https://youtu.be/0GZpNLa5TZo

Logičko-kombinatorni zadaci

U ovu skupinu zadataka ubrajamo uglavnom zadatke koji se mogu riješiti bez korištenja složenih matematičkih koncepata (bilo geometrijskih bilo algebarskih), odnosno samo logičkim zaključivanjem, eventualno uz primjenu nekoliko jednostavnih računskih operacija. Obično se takvi zadaci dijele u podskupine prema načinu rješavanja (rješavanje pomoću tablica ili grafova, primjenom Dirichletovog principa, prebrojavanjem i sl.).

Sljedeći zadatak sa županijskog natjecanja 2020. za 4. razred je tipičan primjer logičkog zadatka koji se može riješiti pomoću tablica ili takozvanih integrama.

Primjer 1. Trojica prijatelja Roč, Luka i Marko treniraju vaterpolo. Imaju zeleni, plavi i crveni ručnik te natikače broj 43, 44 i 45. Često nešto izgube na bazenu, a danas su u košari za izgubljene stvari bili zeleni ručnik i natikače broj 43. Tko je danas izgubio stvari ako se zna da:

- Luka nema plavi ručnik,
- onaj koji ima natikače broj 44 ima zeleni ručnik,
- Roč nema natikače broj 43,
- Luka nema natikače broj 44,
- onaj koji ima natikače broj 43 nema crveni ručnik?

Objasni svoj odgovor.

Rješenje pomoću tablica završava tablicom ispod, a da bi bilo vrednovano s maksimalnim brojem bodova **trebaju se naznačiti svi koraci** - bilo da se za svaki korak nacrta nova tablica ili da se riječima opiše tijek nastajanja konačne tablice.

	43	44	45	Z	P	C
Roč	-	+	-	+	-	-
Luka	-	-	+	-	-	+
Marko	+	-	-	-	+	-
Z	-	+	-			
P	+	-	-			
C	-	-	+			

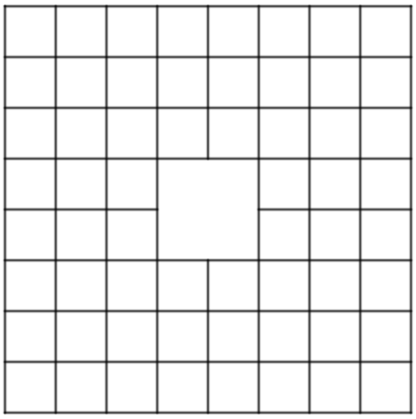
Jednako vrijedno je **rješenje bez upotrebe tablica** i zasniva se na čistom logičkom zaključivanju, ali onda takvo zaključivanje treba biti opisano riječima isključujući mogućnost postojanja drugih rješenja.

U ovom primjeru to rješenje bismo zapisali ovako:
Najprije sparimo ručnike i natikače istog vlasnika.
Poznato je da onaj koji ima natikače broj 44 ima zeleni ručnik.
Također je poznato da onaj koji ima natikače broj 43 nema crveni ručnik.
Prema tome, vlasnik natikača broj 43 nema ni zeleni ni crveni ručnik, nego plavi.
Zaključujemo da onda vlasnik natikača broj 45 ima crveni ručnik.
Sada se vidi da Luka, koji nema ni plavi ručnik, ni natikače broj 44, mora imati crveni ručnik i natikače broj 45.

Roč nema natikače broj 43, pa slijedi da on ima natikače broj 44 i zeleni ručnik, a Marko (preostale) natikače broj 43 i plavi ručnik.
Kako su danas izgubljeni zeleni ručnik i natikače broj 43, znači da su danas Roč i Marko izgubili stvari na bazenu.

Kombinatorni zadaci obično se odnose na prebrojavanje (princip uzastopnog prebrojavanja i podjele na slučajeve), a često dolaze u kombinaciji s primjenom djeljivosti ili računanja vjerojatnosti događaja. Sljedeći primjer s Hrvatske matematičke olimpijade za kadete 2021. za 5. razred se bavi prebrojavanjem pravokutnika.

Primjer 2. Koliko je pravokutnika na slici?



Rješenje ovog zadatka je prilično velik broj (297) i nije zamišljeno da se pravokutnici prebrajaju jedan po jedan, iako bi i takvo rješenje, ako je rezultat točan, bilo u potpunosti priznato. Smisao je zadatka da učenici prepoznaju da je takvo prebrojavanje nedovoljno efikasno i nađu sustav kojim će prebrojiti pravokutnike, a da ne imenuju svakog od njih posebno.

Posebno diskutiramo logičko-kombinatorne zadatke u kojima se traži najmanja ili najveća moguća vrijednost koja se može postići uz određene uvjete. Kod takvih zadataka važno je uočiti da rješenje **mora imati dva dijela**, tzv. *donju i gornju ogradu*. U jednom dijelu konstruiramo jedan primjer kojim se pokazuje da se optimalna vrijednost može postići, a u drugom dijelu dokazujemo da se ne može postići bolja vrijednost. Takav je sljedeći primjer zadan na državnom natjecanju 2020. za 7. razred.

Primjer 3. Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 razmješteni su nasumično ukrug. Za svaki takav razmještaj odredimo svih osam zbrojeva po četiri uzastopna broja te najveći od njih označimo s m. Koja je najmanja moguća vrijednost broja m?

Donja ograda. Ako se osam brojeva smjesti nekim redom u kružnom poretku, dobije se osam zbrojeva od po četiri uzastopno smještena broja. Kako je svaki od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 pribrojnik u točno četiri zbroja, onda je zbroj tih osam zbrojeva jednak

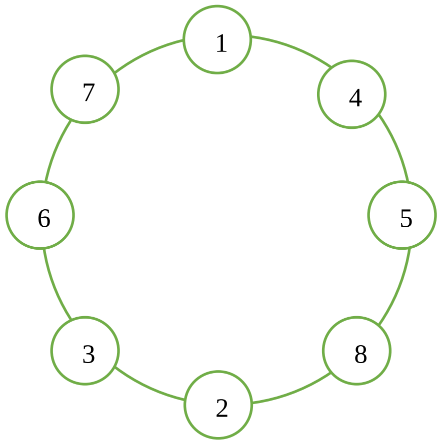
$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4 \cdot 36 = 144.$$

Budući da je 144 : 8 = 18, zaključujemo da bi svi zbrojevi morali biti 18 ili barem jedan od tih zbrojeva mora biti veći od 18. No, nije moguće da su svi zbrojevi jednaki. Naime, ako je a, b, c, d, e nekih pet uzastopno smještenih brojeva, onda je

$$a + b + c + d \neq b + c + d + e$$

jer je $a \neq e$. To znači da m ne može biti 18, odnosno vrijedi $m > 18$.

Gornja ograda. Odredimo jedan raspored tako da najveći zbroj neka četiri uzastopno smještena broja jednak 19. Smjestimo brojeve na način prikazan na slici.



Provjerimo da ovaj primjer zaista zadovoljava uvjete zadatka tako da izračunamo svih osam zbrojeva:

$$1 + 4 + 5 + 8 = 18,$$
$$4 + 5 + 8 + 2 = 19,$$
$$5 + 8 + 2 + 3 = 18,$$
$$8 + 2 + 3 + 6 = 19,$$
$$2 + 3 + 6 + 7 = 18,$$
$$3 + 6 + 7 + 1 = 17,$$
$$6 + 7 + 1 + 4 = 18,$$
$$7 + 1 + 4 + 5 = 17.$$

Zaista, među dobivenim zbrojevima najveći je 19.

Često u ovakvim zadacima jedan dio zadatka dokazujemo koristeći Dirichletov princip, poznat i kao 'princip zečeva i kaveza'. Takav je i primjer s državnog natjecanja 2021. za 7. razred.

Primjer 4. Nađi najmanji prirodan broj n takav da za svaki skup od n točaka s cjelobrojnim koordinatama, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu, postoji trokut s vrhovima iz tog skupa za kojeg vrijedi da polovišta njegovih stranica također imaju cjelobrojne koordinate.

Na državnom natjecanju 2017. za 8. razred postavljen je zadatak u kojem je eksplicitno navedeno da se mora naći i ograda i navesti primjer, ali kroz ovaj tekst želimo vrlo jasno naglasiti da su ta dva dijela rješenje nužno čak i ako u zadatku samo piše „Odredi najmanji mogući broj obostranih poruka."

Primjer 5. Dvadeset učenika koji sudjeluju na kampu iz matematike odlučili su međusobno poslati poruke i to svaki od njih točno desetorici preostalih učenika. Odredi najmanji mogući broj obostranih poruka, tj. nađi primjer rasporeda slanja poruka u kojem je broj obostranih poruka najmanji mogući i dokaži da manji broj obostranih poruka nije moguće postići.

(Kažemo da je poruka između učenika A i B obostrana ako vrijedi da je učenik A poslao poruku učeniku B i da je učenik B poslao poruku učeniku A.)

Promotrimo još jedan primjer, s državnog natjecanja 2014. za 8. razred, u kojem nije potrebno pronaći samo najveći ili najmanji mogući broj već sve brojeve koji se mogu postići. U tom slučaju također moramo dati primjer koji pokazuje da se traženi brojevi mogu postići i dokaz da se drugi brojevi ne mogu postići.

Primjer 6. Na šahovskom turniru sudjelovala su dva igrača iz grada A i nekoliko igrača iz grada B. Svaka dva igrača (bez obzira jesu li iz istog grada ili nisu) međusobno su odigrala točno jednu partiju. Igrači iz grada A zajedno su osvojili 8 bodova, a svaki je igrač iz grada B osvojio jednak broj bodova (U partiji šaha pobjednik dobiva 1 bod, gubitnik 0 bodova, a ako partija završi neriješeno, onda svaki igrač dobiva po pola boda). Koliko je igrača iz grada B moglo sudjelovati na turniru?

Neka je *n* broj igrača iz grada B, a *k* broj bodova svakog igrača iz grada B. Prebrojavanjem broja partija i broja bodova, te izjednačavanjem dobivamo diofantsku jednadžbu

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = nk + 8.$$

Svođenjem na ekvivalentan oblik $n(n+3-2k) = 14$ i faktoriziranjem, možemo dobiti sva cjelobrojna rješenja od kojih su pozitivna $(n,k) = (7,4)$ i $(n,k) = (14,8)$.

Time smo riješili dobivenu diofantsku jednadžbu, ali ne i početni problem! Naime, u ovom trenutku možemo samo zaključiti da ne postoje druge mogućnosti, ali bez konstrukcije ne možemo tvrditi da za određeni par brojeva (n,k) postoji takav turnir.

Za n=7 konstrukcija je jednostavnija. Jedan primjer turnira koji zadovoljava sve uvjete dobivamo tako da sve partije završe neriješeno i svi igrači imaju po 4 boda.
Za n=14 je konstrukcija teža jer nije potpuno simetrična. Jedna mogućnost konstrukcije traženog turnira je opisana na sljedeći način. Neka su neriješeno završile partije:

- između igrača A_1 i A_2,
- između igrača A_1 i svakog od igrača $B_1,\dots,B_7$,
- između igrača A_2 i svakog od igrača $B_8,\dots,B_{14}$,
- između svaka dva igrača iz grada B.

Neka su sve ostale partije završile pobjedom igrača iz grada B. Tada će svaki igrač iz grada A imati ukupno 4 boda, a svaki igrač iz grada B ukupno 8 bodova i uvjeti zadatka su ispunjeni.

Djeljivost i diofantske jednadžbe

Pojam dijeljenja, a samim time i djeljivosti prožima teme u svim natjecateljskim razredima osnovne škole. Kod tipičnih primjera važno je da učenici uspješno koriste postupke za određivanje prostih faktora, te traženja najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika. Prvi primjer je preuzet s općinskog natjecanja 2002. za 5. razred.

Primjer 1. Kojim najmanjim prirodnim brojem treba podijeliti brojeve 956, 1452 i 868 da se dobiju redom ostaci 11, 12 i 13.

Oduzmemo li redom brojeve 11, 12 i 13 od 956, 1452 i 868 dobivamo brojeve 945, 1440 i 855. Tražimo zajednički djelitelj ta tri broja koji je veći od 13 (kako bismo mogli dobiti navedene ostatke). Zajedničke djelitelje možemo dobiti rastavljanjem brojeva na proste faktore i uočavanjem zajedničkih faktora. Zajednički djelitelji veći od 13 su 15 i 45, pa je odgovor 15.

Sljedeći primjer je postavljen na školskom natjecanju 2016. za 6. razred.

Primjer 2. Umnožak dva prirodna broja je 68040, a njihov najmanji zajednički višekratnik je 3780. Odredi te brojeve.

Ključan dio zadatka je iskoristiti pravilo $\boldsymbol{V(a,b)\cdot D(a,b) = a\cdot b}$. To pravilo slijedi direktno iz činjenice da za svaki prost broj u višekratnik ulazi veća potencija, a u djelitelj manja potencija tog prostog broja u rastavu brojeva *a* i *b* na proste faktore. Dakle, *D(a,b)* = 68040 : 3780 = 18. Sada možemo dobiti sve mogućnosti za brojeve *a* i *b* tako da na broj 18 dodajemo razne proste faktore broja 3780 : 18 = 2·3·5·7. Ukupno imamo 8 mogućnosti, što možemo otkriti sustavnim ispisivanjem. Elegantnije, možemo uočiti da svaki od 2^4=16 podskupova skupa {2,3,5,7} daje jedan par brojeva, ali pritom svaki par brojimo dvaput.

Sličan primjer pojavio se na regionalnom natjecanju 2009. za 5. razred.

Primjer 3. Najveći zajednički djelitelj dvaju prirodnih brojeva je 12, a njihov najmanji zajednički višekratnik 672. Koji su to brojevi ako se zna da je manji od njih djeljiv sa 7, a veći nije?

U sljedećem primjeru sa županijskog natjecanja 2019. za 6. razred također koristimo rastav na proste faktore.

Primjer 4. S koliko nula završava umnožak prvih 2019 prirodnih brojeva?

Ključna ideja potrebna za rješavanje ovog zadatka je da ćemo prebrojati koliko puta se brojevi 2 i 5 pojavljuju kao faktori u broju 1·2·3·…·2019. Uočimo još da je broj faktora 2 sigurno veći od broja faktora 5 jer ima više parnih brojeva nego brojeva djeljivih s 5. Faktor 5 se pojavljuje u svim višekratnicima broja 5 manjim od 2020 kojih ima 403 (jer je 2019 = 403·5+4). No, u višekratnicima od 25 se pojavljuje barem dvaput, u višekratnicima od 125 barem triput, a u višekratnicima od 625 četiri puta. Višekratnika od 25 manjih od 2020 ima 80, višekratnika od 125 ima 16, a višekratnika od 625 ima 3. Stoga je odgovor 403+80+16+3=502.

Kod rješavanja diofantskih jednadžbi nužno je primjenjivati djeljivost, ali pritom moramo koristiti i neke dodatne algebarske metode. Za početak promotrimo primjer s državnog natjecanja 2021. za 7. razred.

Primjer 5. Umnožak dva različita prirodna broja je 15 puta veći od njihova zbroja. Koje sve vrijednosti može poprimiti razlika većeg i manjeg broja?

Označimo tražene brojeve s m i n. Neka je $m > n$. Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$mn = 15(m + n).$$

Glavna ideja rješenja je transformirati ovaj oblik u zapis koji s jedne strane možemo **faktorizirati**, dok je s druge strane neki konkretan broj. Prvi korak je prebaciti sve nepoznanice na jednu stranu, a onda dodati pribrojnike koji će nam omogućiti da tu stranu jednadžbe faktoriziramo. Dobivamo:

$$mn - 15m - 15n + 225 = 225,$$

odnosno

$$(m - 15)(n - 15) = 225.$$

Kako je $225 = 3^2 \cdot 5^2$, a 225 je djeljiv s $n - 15$ i $n < m$, imamo sljedeće mogućnosti:

$$n - 15 = 1, \quad m - 15 = 225$$
$$n - 15 = 3, \quad m - 15 = 75$$
$$n - 15 = 5, \quad m - 15 = 45$$
$$n - 15 = 9, \quad m - 15 = 25.$$

Tada su mogućnosti za $m - n$ sljedeće:

$$m - n = 224, 72, 40, 16.$$

Drugi način rješavanja zadatka je **izraziti jednu nepoznanicu pomoću druge**, pa nakon toga zaključivati na temelju djeljivosti kad će **razlomak biti cijeli broj**.

Iz jednadžbe $mn = 15(m + n)$ prebacivanjem na jednu stranu svih izraza koji imaju *n* te izlučivanjem i dijeljenjem slijedi

$$n = \frac{15m}{m - 15}.$$

Budući da je n cijeli broj, slijedi da na desnoj strani jednakosti nazivnik mora dijeliti brojnik. Ovaj zaključak će nam puno više koristiti ako je brojnik konkretan broj. Stoga je vrlo važna ideja da razlomak možemo zapisati u sljedećem obliku

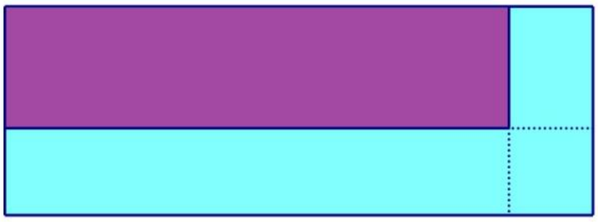
$$\frac{15m}{m - 15} = \frac{15m - 225 + 225}{m - 15} = \frac{15(m - 15) + 225}{m - 15} = 15 + \frac{225}{m - 15}.$$

Sada možemo zaključiti da *m-15* mora dijeliti 225. Zbog simetrije možemo pretpostaviti da je *m<n*, pa dobivamo iste mogućnosti za *m-15*, odnosno *m*, kao i u prethodnom rješenju. Nakon toga možemo izračunati pripadni *n*, te razliku *m-n*.

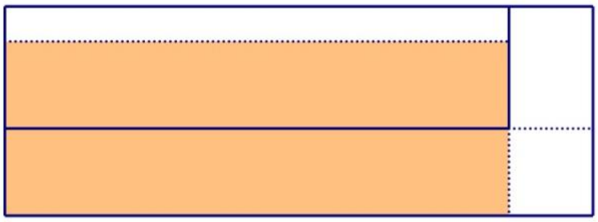
Sličan zadatak u kojem diofantska jednadžba dolazi iz geometrije zadan je na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi za kadete 2020. za 5. i 6. razred.

Primjer 6. Duljine svih stranica pravokutnika, izražene u centimetrima, prirodni su brojevi. Povećamo li širinu i visinu tog pravokutnika za 10 cm, njegova će se površina udvostručiti. Odredi dimenzije svih takvih pravokutnika.

Rješenje se svodi na rješavanje diofantske jednadžbe $(a+10)(b+10)=2ab$, ali geometrijska pozadina zadatka nas navodi i na grafičko rješenje primjereno mlađim učenicima. Produljivanjem stranica za 10 cm dobivamo sljedeći pravokutnik:



Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 10 cm, ukupne površine 100 cm^2 + 100 cm^2 = 200 cm^2. Znači, preostali pravokutnik ljubičaste boje ima površinu 200 cm^2.

Moguće duljine stranica tog pravokutnika su:

I.	1 cm i 200 cm
II.	2 cm i 100 cm
III.	4 cm i 50 cm
IV.	5 cm i 40 cm
V.	8 cm i 25 cm
VI.	10 cm i 20 cm

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I.	11 cm i 210 cm
II.	12 cm i 110 cm
III.	14 cm i 60 cm
IV.	15 cm i 50 cm
V.	18 cm i 35 cm
VI.	20 cm i 30 cm

Zadatak se može rješavati i tablično ispisivanjem svih slučajeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Tih slučajeva će biti konačno mnogo jer tražimo samo ona rješenja koja su prirodni brojevi. Kod takvog načina rješavanja učenik mora objasniti zašto oni slučajevi koje ne promatra nisu mogući i zašto u tablici odbacuje slučajeve koji nisu rješenje. Rješenja može biti više i treba ih pronaći sva. Bez obzira što to u tekstu zadatka možda nije izričito naglašeno, matematički zadatak je u potpunosti riješen tek ako su pronađena sva rješenja i dokazano je da su to sva rješenja.

Osim metoda kojima dolazimo do rješenja jednadžbi, važne su i metode kojima dokazujemo da jednadžba nema rješenja. U osnovnoj školi je osnovna takva **metoda promatranje djeljivosti i ostataka pri dijeljenju s nekim brojem**. Posebno je tipično promatranje **parnosti** (djeljivost s 2) i **zadnje znamenke** (djeljivost s 10), ali često koristimo i djeljivost s 3 ili 4 ili nekim drugim brojem. Ilustrirajmo to primjerom s državnog natjecanja 2020. za 8. razred.

Primjer 7. Ako je m prirodan, a n neparan prirodan broj, dokaži da $m(m+2)+n(n+2)$ ne može biti kvadrat prirodnog broja.

Ključna tvrdnja koja se koristi u rješenju glasi: **Ostatak pri dijeljenju kvadrata prirodnog broja s 4 je uvijek 0 ili 1, odnosno ne može biti niti 2 niti 3.**

Dokaz te tvrdnje provodimo direktno. Ako je broj paran, možemo ga zapisati kao $2k$, a njegov kvadrat je $4k^2$, što daje ostatak 0 pri dijeljenju s 4. Ako je broj neparan, zapisujemo ga kao $2k+1$, a njegov kvadrat je $4k^2+4k+1$, što daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4.

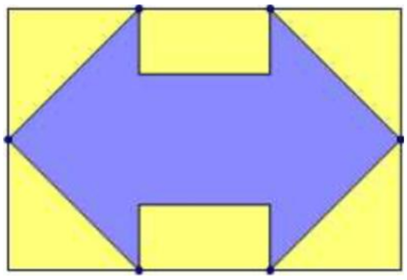
Rješenje zadatka sad dovršavamo tako da analizom svih mogućnosti (je li *m* paran ili neparan) pokazujemo da $m(m+2)+n(n+2)$ daje ostatak 2 ili 3 pri dijeljenju s 4, pa zbog prethodno istaknute tvrdnje ne može biti kvadrat prirodnog broja.

Geometrija na natjecanjima

U četvrtom razredu osnovne škole na natjecanjima u pravilu dolaze zadaci koji se oslanjaju na prepoznavanje i označavanje skupova točaka u ravnini kao što su dužina, pravac, polupravac, kut, trokut, četverokut (pravokutnik) i krug. Također se može tražiti duljina opsega ili površina četverokuta zadanog u pravokutnoj jediničnoj mreži.

Zahtjevniji primjeri za tu dob mogu se pronaći na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi za kadete. Primjer iz prvog kola 2020. je zanimljiv za rad s učenicima zbog različitih pristupa koji su povezani s temeljnim idejama u geometriji: **podjeli na jedinične kvadratiće i prebrojavanjem**, **rastavljanjem** (aditivnost površine) i **uočavanjem sukladnosti/simetrije** (koju učenici te dobi tako ne zovu, ali koriste kao ideju preslagivanja ili preklapanja). Slični zadaci i slične ideje pojavljuju se u mnogim zadacima na regionalnim natjecanjima, a i u ostalim kolima HMOK-a.

Primjer 1. Na slici je prikazan pravokutnik sa stranicama duljina 48 mm i 32 mm. Dulje stranice pravokutnika podijeljene su istaknutim točkama na tri jednaka dijela, a kraće stranice na dva jednaka dijela. Opseg svakog žutog pravokutnika jednak je duljini duže stranice pravokutnika. Odredi površinu lika obojenog plavom bojom, u kvadratnim milimetrima.



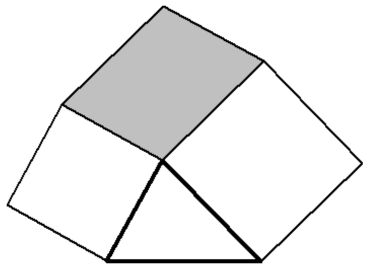
U nekim zadacima zahtijeva se prebrojavanje likova, što podrazumijeva kombinatornu komponentu zadatka. Nije uvijek nužno prebrojati likove jedan po jedan (osim ako se ne traži imenovanje i pravilno označavanje istih), ali je nužno opisati sustav po kojem se prebrojavaju kako bi se dobio maksimalan broj bodova. Taj opis može biti iskazan i riječima.

U zadacima namijenjenim nižem uzrastu učenika ponekad se kod prebrojavanja likova traži da prebroje sve *različite* dužine, trokute i sl. U ovom slučaju „različite" znači različite u smislu skupova točaka u ravnini, a ne u smislu nesukladnosti. Npr. dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ su iste jer se radi o jednoj te istoj dužini imenovanoj na dva načina. Isto tako su trokuti ABC, BCA i CAB isti - radi se o istom skupu točaka, pa ćemo ga i brojati kao jedan trokut.

Ne smatra se greškom ako se trokut ili četverokut imenuje po vrhovima u smjeru kazaljke na satu (umjesto obrnuto od smjera kazaljke na satu), pa je tako trokut ABC isti kao i trokut CBA. Dapače, kod izricanje sukladnosti ili sličnosti poželjno je označiti vrhove tako da su odgovarajući vrhovi zapisani istim redom, čak i ako trokuti nisu jednako orijentirani. Isto vrijedi i za četverokut (ako se pravokutnik ABCD pročita kao DCBA zbog toga neće biti oduzeti bodovi), ali se greškom smatra ako se pravokutnik ABCD imenuje kao ABDC. Ipak, trebalo bi poticati učenike da od najranije dobi pravilno označavaju (i orijentiraju) mnogokute.

Neki geometrijski zadaci koji se pojavljuju na natjecanjima iz matematike imaju vrlo nizak postotak riješenosti. Posebno teški se pokazuju zadaci u kojima treba docrtati neki novi element na slici kako bi se približili rješenju. Jedan takav primjer je sa školskog natjecanja 2021. za 7. razred.

Primjer 2. Duljine stranica kvadrata nacrtanih nad stranicama trokuta na slici su 4 cm i 5 cm. Površina trokuta je 8 cm^2. Kolika je površina osjenčanog paralelograma?

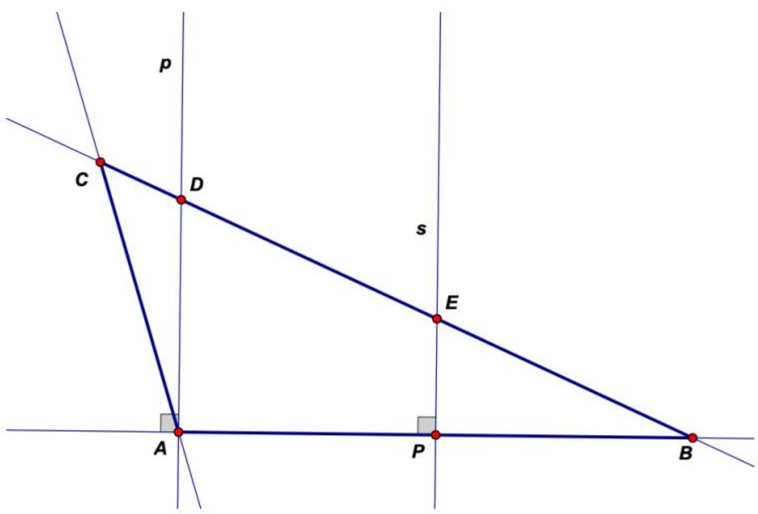


Ovdje je trebalo docrtati jednu dijagonalu paralelograma kako bi se dobila dva međusobno sukladna trokuta koji su također sukladni i zadanom trokutu. Dodatno, sukladnost je potrebno opravdati korištenjem teorema o sukladnosti. Postavlja se pitanje, kakva bi bila rješivost zadatka da je posljednja rečenica u zadatku glasila **Dokaži da je površina osjenčanog paralelograma jednaka dvostrukoj površini trokuta?** Iako to ne možemo znati, zanimljivo je razmišljanje da zadatak u formi 'dokaži' ne bi postao teži. Dapače, pitanje je postavljeno tako da se već nudi i rješenje (dvostruko veća površina), pa se lakše može doći do ideje docrtavanja dijagonale. Iako učenici zaziru od zadataka koji počinju s 'dokaži', takvi zadaci u nekim slučajevima mogu biti lakši od zadataka tipa 'izračunaj' jer je već poznato što se u rješenju treba dobiti.

Sljedeći primjer je zadan na županijskom natjecanju 2014. za 7. razred, a vrlo je poučan za analizu s učenicima iz nekoliko razloga.

Primjer 3. U tupokutnom trokutu ABC s tupim kutom u vrhu A, kut γ dva je puta veći od kuta β. Pravac p, koji prolazi vrhom A i okomit je na pravac AB, siječe pravac BC u točki D. Pravac s, koji je usporedan s pravcem p, prolazi polovištem stranice $\overline{AB}$ i siječe pravac BC u točki E. Dokaži da su dužine $\overline{BE}$, $\overline{DE}$ i $\overline{AC}$ jednakih duljina.

Mogli bismo reći da ovaj zadatak svrstavamo u primjere u kojima je važno smisleno docrtavanje. Ključna ideja u zadatku je pokazati da je svaka od dužina $\overline{BE}$, $\overline{DE}$ i $\overline{AC}$ jednake duljine kao dužina $\overline{AE}$ (i izvesti zaključak na temelju tranzitivnosti jednakosti).



U zadatku ima nekoliko uvjeta, a prvi korak u rješavanju bi trebao biti dokaz da je točka E polovište dužine $\overline{BD}$, tj. da vrijedi $|BE| = |DE|$. Vrlo je vrijedno promotriti različite dokaze koji su više ili manje elementarni. Možemo reći (i učenici će za to dobiti bodove!) da ta činjenica slijedi iz tvrdnje da je pravac s simetrala dužine $\overline{AB}$ ili da slijedi iz Talesovog poučka o proporcionalnosti, ali poučnije je uočiti da obje te tvrdnje slijede iz sukladnosti trokuta.

Označimo polovište stranice $\overline{AB}$ s P. Dužina $\overline{PE}$ je srednjica, ali treba biti svjestan da **to nije tvrdnja koju možemo koristiti, nego je upravo ono što dokazujemo**. Naime, po definiciji srednjica je dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta. Iz definicije se koristeći sukladnost može dokazati da je srednjica paralelna i dvostruko kraća od treće stranice. Iz uvjeta zadatka znamo da je $\overline{PE}$ paralelno s $\overline{AD}$ i da je P polovište dužine $\overline{AB}$, pa zapravo dokazujemo svojevrsni obrat: „ako je dužina paralelna stranici trokuta i prolazi polovištem druge stranice, onda prolazi i polovištem treće“.

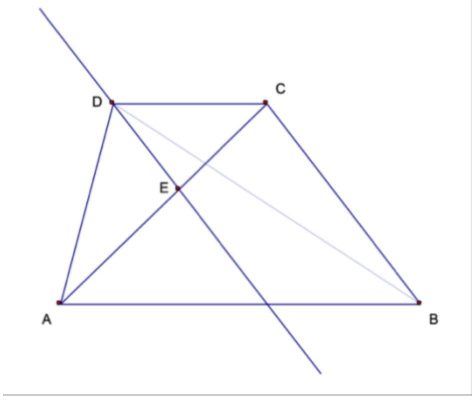
Primjereno učenicima 7. razreda tu tvrdnju bismo dokazali docrtavanjem i korištenjem sukladnosti. U ovom konkretnom zadatku, situacija je olakšana jer se radi o pravokutnom trokutu (inače bismo prethodno dokazivali dodatne tvrdnje o paralelogramu). Najjednostavniji put je uvesti točku F na stranici $\overline{AD}$ takvu da je $APEF$ pravokutnik, pa dokazati da su pravokutni trokuti APE, BPE, AFE i DFE sukladni. Uočite da pritom moramo paziti da ni za točku F ne znamo da je polovište dužine $\overline{AD}$, pa je važan redoslijed kojim dokazujemo. Prvo ćemo pokazati su trokuti APE i BPE sukladni po S-K-S poučku, nakon toga AFE i APE po K-S-K poučku, te konačno AFE i DFE također po K-S-K poučku, pri čemu sukladnost kutova zaključujemo pozivanjem na transverzalu. Time ćemo dokazati da vrijedi $|AE| = |BE| = |DE|$. To je ujedno važna činjenica, koju možemo izreći i na način: **središte opisane kružnice pravokutnog trokuta leži u polovištu hipotenuze.** Na višim razinama se nerijetko koristi i obrat te tvrdnje.

Zanimljivo je uočiti da tvrdnju $|AE| = |AC|$ ne dokazujemo koristeći sukladnost trokuta. Vrlo tipična pogreška koji učenici rade je **pogrešna primjena S-S-K poučka o sukladnosti trokuta**. U ovoj situaciji vrijedi da je mjera kuta AEC jednaka 2β, a tolika je i mjera kuta ACE prema preostalom neiskorištenom uvjetu iz zadatka, pa je trokut ACE jednakokračan. No, neki učenici dodatno argumentiraju da su trokuti ADE i ADC sukladni jer imaju zajedničku stranicu $\overline{AD}$, mjere kutova nasuprot te stranice su jednake, te znaju da bi trebalo dokazati da je $|AE| = |AC|$. Ovakvu situaciju zapravo imamo kad god u jednakokračnom trokutu povučemo spojnicu vrha između krakova s bilo kojom točkom na nasuprotnoj stranici. Preporuka je da se s natjecateljima posebno diskutira S-S-K poučak i posebno istakne snažnija formulacija tog poučka: **ako se u trokutima podudaraju dvije stranice i kut nasuprot jedne od tih stranica, onda za kutove nasuprot druge stranice vrijedi da su sukladni ili suplementarni**. Time ističemo da se radi samo o dvije mogućnosti, te pokazujemo da u situacijama u kojima možemo eliminirati jednu opciju (npr. jer su oba trokuta šiljastokutna ili jer znamo informaciju o kutu nasuprot dulje stranice), možemo zaključiti sukladnost.

U sljedećem primjeru koristi se još jedna ideja koja je vrlo elementarna, a izrazito teška učenicima. Primjer je bio zadan na županijskom natjecanju 2012. za 7. razred.

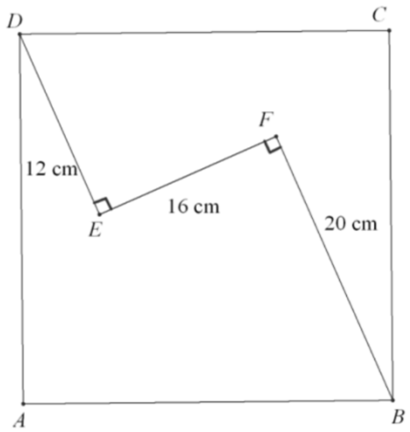
Primjer 4. Zadan je trapez $ABCD$ tako da je $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$. Na dijagonali $\overline{AC}$ odabrana je točka E tako da je $DE \parallel BC$. Dokaži da su površine trokuta ACD i BCE jednake.

Zadatak je zanimljiv jer rješenje može djelovati vrlo jednostavno, ali način razmišljanja nije svojstven većem broju učenika. Naime, nema nikakvih konkretnih podataka koji bi omogućili izračunavanje površine, te bi učenici bi mogli očekivati da će jednakost površina slijediti iz sukladnosti trokuta. No, trokuti ACD i BCE nisu sukladni.



Ključna ideja je iskoristiti tvrdnju: **trokuti kojima je zajednička stranica i ista duljina visine imaju jednake površine**. Tvrdnju ćemo iskoristiti dva puta kako bismo površine svakog od trokuta ACD i BCE usporedili s trećim trokutom, BCD. Dakle, i u ovom zadatku je potrebno docrtati jedan element, dijagonalu $\overline{BD}$ s ciljem da bismo uočili trokut BCD. Nakon toga je iz označene tvrdnje jasno da vrijedi $P(ACD) = P(BCD)$ i $P(BCD) = P(BCE)$, te slijedi zaključak.

U višim razredima teme se nižu prema predmetnom kurikulumu i tablici tema koju propisuje povjerenstvo. Jedina tema iz geometrije koja spada u dodatne teme je **Sličnost**, koja se prema novom kurikulumu obrađuje tek u 8. razredu, u sklopu jedinice 'Primjene proporcionalnosti'. Obzirom da se tema 'Proporcionalnost' radi u 7. razredu, sličnost se kao dodatna tema može uvrstiti u državno natjecanje u 7. razredu, te županijsko i državno natjecanje u 8. razredu. U sljedećem primjeru također je ključno docrtavanje, ali i primjena sličnosti i Pitagorinog poučka. Zadatak je zadan na školskom natjecanju 2016. za 8. razred i pokazao se dosta težak učenicima.



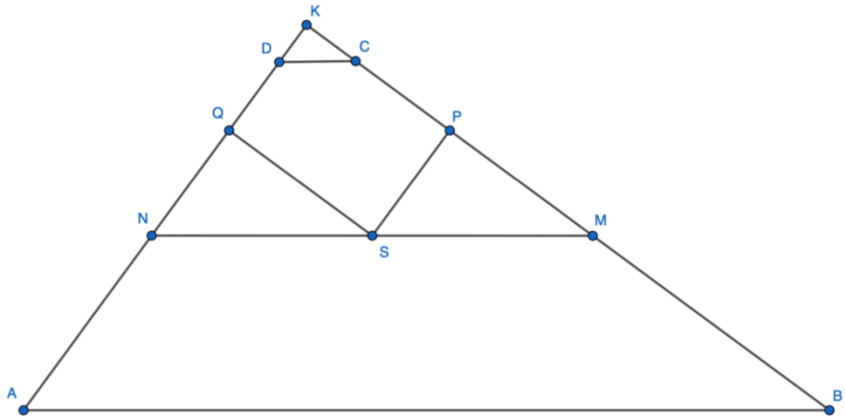
Primjer 5. Odredi površinu kvadrata na slici.

U zadatku je zadano nekoliko dužina koje se sijeku pod pravim kutom, te je potrebno dovesti duljine tih dužina u vezu sa površinom kvadrata. Ključna ideja je zapravo dovesti zadane duljine u vezu s dijagonalom $\overline{BD}$. Koristimo li ovaj zadatak u pripremi učenika za buduća natjecanja, za razvoj ideja poželjno je da učenici sami otkriju taj korak. Prije svega, potrebno je uočiti da bez docrtavanja ne možemo riješiti zadatak, a nakon toga slijedi promišljanje (koje može biti u obliku rasprave mentora i učenika ili učenika međusobno) o tome koje sve elemente bismo mogli docrtati i koliko je to **docrtavanje smisleno**. Jedna od očitih ideja je docrtati dužine $\overline{DF}$ i $\overline{BE}$ jer ćemo tako dobiti pravokutne trokute na koje možemo primijeniti Pitagorin poučak, ali to docrtavanje nam ne pomaže u rješavanju zadatka jer docrtane dužine ne povezuju zadane duljine s kvadratom kojem želimo izračunati površinu.

Jednom kad docrtamo dijagonalu dobivamo dva pravokutna trokuta, ali tim trokutima znamo samo po jednu duljinu stranice, te znamo da preostale dvije katete imaju duljine koje u zbroju daju 16 cm. Dakle, drugi važan korak u rješavanju je uočiti da su ta dva pravokutna trokuta slična, što nam omogućava izračunavanje duljina svih kateta tih trokuta. Nakon toga računamo duljine hipotenuza, koje daju duljinu dijagonale kvadrata i konačno površinu.

Na kraju diskutiramo rješenje zadatka zadanog na državnom natjecanju 2021. za 8. razred koje je nešto jednostavnije od ponuđenog službenog rješenja.

Primjer 6. Neka je ABK trokut sa šiljastim kutovima u vrhovima A i B. Na stranici $\overline{KA}$ odabrane su točke D i N, a na stranici $\overline{KB}$ točke C i M tako da su pravci CD, MN i AB usporedni. Pravci AB i CD su od pravca MN udaljeni 4 cm. Polovište dužine $\overline{MN}$ je od pravca AK udaljeno 4 cm, a od pravca BK udaljeno 3 cm. Ako površina četverokuta $ABCD$ iznosi 80 cm^2, odredi površinu trokuta ABK.



Iz uvjeta zadatka slijedi da je $ABCD$ trapez, a na osnovu zadanih podataka izračuna se duljina njegove srednjice $\overline{MN}$, odnosno zbroja duljina njegovih osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Označimo polovište dužine $\overline{MN}$ sa S, a nožišta okomica iz točke S na pravce AK i BK redom sa Q i P. Trokuti SMP i NSQ su pravokutni, te se primjenom Pitagorinog poučka izračunava duljina nepoznate katete za svakog od njih, a na osnovu poučka S-S-S dokazuje njihovu **sukladnost**. Na osnovu te sukladnosti slijedi da vrijedi zbroj mjera kutova $\measuredangle SMP$ i $\measuredangle SNQ$ iznosi $90°$, pa zaključujemo da je kut $\measuredangle BKA$ pravi.

Koristeći K-K poučak možemo uočiti mnoge pravokutne **slične** trokute čiji je omjer kateta 3:4. To su trokuti SMP, NSQ, ABK, NMK i DCK. Da bismo riješili zadatak potrebno je još smisliti strategiju kojom ćemo zadanu površinu trapeza $ABCD$, odnosno poznate mjere u trokutima SMP i NSQ iskoristiti za izračunavanje površine trokuta ABK.

Budući da znamo da vrijedi $|MN| = 10\text{ cm}$, možemo odrediti duljine kateta u trokutu NMK, tj. zaključiti da je $|NK| = 6\text{ cm}$ i $|MK| = 8\text{ cm}$. Druga ideja koja nas vodi kroz rješavanje je poznavanje visine trapez $ABCD$. Stoga u trokutu NMK određujemo duljinu visine iz vrha K, što iznosi 4.8 cm. Sada lako zaključujemo da visina u trokutu ABK iznosi 8.8 cm.

Konačno, koristeći sličnost trokuta ABK i NMK zaključujemo da je omjer duljina osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$ jednak omjeru visina na te osnovice, tj. vrijedi $|AB|: 10\text{ cm} = 8.8 : 4.8$ iz čega slijedi $|AB| = \frac{55}{3}$ cm. Iz dobivenih podataka sada lako računamo površinu trokuta ABK.

Na osnovu navedenog slijedi da je ključni korak u rješenju uočavanje i dokazivanje sukladnih odnosno sličnih trokuta, te primjena svojstava sukladnosti i sličnosti u svrhu određivanja duljina dužina potrebnih za računanje površine trokuta. U dokazima učenike treba upozoriti na važnost navođenja odgovarajućih elemenata na osnovu kojih se primjenjuju poučci o sukladnosti ili sličnosti. Ako učenik navodi kako su trokuti sukladni jer se podudaraju u dva kuta i jednoj stranici, radi veću konceptualnu pogrešku obzirom da takvi trokuti ne moraju biti sukladni. Zato je od velike važnosti da se boduju isključivo dokazi sukladnosti ili sličnosti koji su precizno iskazani.