

Državno natjecanje iz matematike 2021.

Bodovne sheme

Treći razred

1. zadatak

U svim rješenjima svako od točnih rješenja nosi po **1 bod**. Bodovi iz različitih rješenja se ne zbrajaju.

Prvo rješenje

Zaključak da su oba djelitelja $\leq n/2$.	1 bod
Zaključak da je manji djelitelj $\leq n/3$.	1 bod
Ograda $n \leq 6$.	3 boda
Ograda $n \geq 3$.	1 bod
Analiza svakog od slučajeva $n = 3, 4, 5, 6$ vrijedi po 1 bod.	4 boda

Drugo rješenje

Zaključak da su a i b relativno prosti.	2 boda
Zaključak da je n oblika $n = abk$.	1 boda
Ograda $(a-1)(b-1) \leq 2$ ili nešto ekvivalentno.	3 boda
Analiza slučaja $a=1$.	2 boda
Analiza slučajeva $a = b = 2$ i $a = 2, b = 3$ vrijedi po 1 bod.	2 boda

Treće rješenje (skica)

Promatranjem $a+b = n-1$ zaključak da su oba djelitelja između $n/2-1$ i $n/2$.	1 bod
1. slučaj: n je paran. Neka je $a \geq b$. Tada je $a = n/2$ i $n = bk$ za neki k .	1 bod
Sređivanjem dobivamo $n=2k/(k-2) = 2+4/(k-2)$.	1 bod
Kako je $k \geq 1$, $k-2$ može biti samo $-1, 1$, ili 4 .	1 bod
Za $k-2 = -1$ nema rješenja, za $k-2 = 1$ dobijemo $n = 6$, a za $k = 4$ dobijemo $n = 4$.	
Analiza svakog od tih slučajeva vrijedi po 1 bod.	3 boda
2. slučaj: n je neparan. Neka je $a \geq b$. Tada je $a = (n-1)/2$, odnosno $n = 2a+1$.	1 bod
Primijetimo da su $2a$ i $2a+1$ relativno prosti.	1 bod
Iz $a 2a+1$ onda slijedi da je $a = 1$, odnosno $n = 3$.	1 bod

2. zadatak

Zapis $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ primjena $\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2\sin\varphi}$.	3 boda
---	--------

Sređivanje do izraza $2^{-1010} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha \dots \sin 2020\alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \dots \sin 1010\alpha}$ i dobivanje faktora 2^{-1010} . **2 boda**

Izvod i primjena identiteta $\sin(2k\alpha) = -\sin((2021 - 2k)\alpha)$. **3 boda**

Sređivanje konačnog rezultata do $-\frac{1}{2^{1010}}$. **2 boda**

Napomene o bodovanju različitih neuspješnih pokušaja:

- zaključak da je rješenje negativno: **1 bod**
- dobivanje faktora $\frac{1}{2}$: **1 bod**
- i kod dobivenog izraza $-\cos \frac{\pi}{2021} \cdot \cos \frac{2\pi}{2021} \dots \cos \frac{1010\pi}{2021}$: **5 bodova**

3. zadatak

Prvo rješenje

Poučak o obodnom i središnjem kutu, $\angle AMB = 45^\circ$. **1 bod**

Četverokut PSMD je tetivan. **2 boda**

Talesov teorem, $\angle BMD = 90^\circ$. **1 bod**

Zaključak o okomitosti pravaca PS i BD. **2 boda**

Komentiranje analognog slučaja za QRCM; QR i AC su okomiti. **3 boda**

Korištenje činjenice o okomitosti dijagonala kvadrata. **1 bod**

Drugo rješenje (skica)

Postavljanje koordinatnog sustava, postavljanje uvjeta na koordinate točke

M (preko jednadžbe opisane kružnice ili kutova $\angle MAB$ i $\angle MBA$) **1 bod**

Računanje koordinata točaka P, Q, R, S (ili vektora AP, AQ, BR, BS) **2 boda**

Dokaz okomitosti: računanje umnoška koeficijenata smjera pravaca

PS i QR ili skalarnog produkta vektora PS i QR **7 bodova**

4. zadatak

Izbor prvog indeksa i takvog da je x_i označen. **1 bod**

Izbor najmanjeg indeksa j takvog da je suma $x_i + \dots + x_j > 0$. **1 boda**

Tvrdnja da su svi uzastopni od x_i do x_j označeni. **1 boda**

Dokaz. **5 bodova**

Algoritamski ili induktivni zaključak da je i u ostatku niza (x_{j+1}, \dots, x_n) također

suma označenih brojeva pozitivna. **2 boda**

Alternativno rješenje ima analogna prva dva koraka i indukciju, ali središnja tvrdnja je drugačija: suma svih označenih koji se nalaze između indeksa i i j je pozitivna (sve i ako imamo neke neoznačene negativne brojeve između tih indeksa). U tom dokazu iskaz vrijedi **1 bod**, a dokaz **5 bodova**.

5. zadatak

- Argumentirano objašnjenje da nije moguće da su težišnica i visina iz istog vrha jednake duljine, i da nije moguće da su težišnice iz dva vrha u parovima jednake duljine kao i dvije visine iz ta ista dva vrha. 1 bod
- Izražavanje sinusa jednog od kutova (prema oznakama u službenom rješenju) $\angle CAP_A$ i $\angle P_BBA$ preko duljina stranica, visina i/ili težišnica trokuta. 1 bod
- Dokaz da je mjera jednog od kutova (prema oznakama u službenom rješenju) $\angle CAP_A$ i $\angle P_BBA$ jednaka 30° . 1 bod
- Dokaz da za drugi od dva gore spomenuta kuta. 1 bod
- Korištenje sličnosti na trokutima BP_BA i AP_BT . 2 boda
- Zaključak da je $\angle CAB = 120^\circ$. 1 bod
- Zaključak da je $b=2c$. 1 bod
- Nalazak duljina a , t_c i v_b , te konačno rješenje. 2 boda