

Državno natjecanje iz matematike 2021.

Bodovne sheme

Prvi razred

1. zadatak

Zaključak $x+y+z=0$ (u bilo kojem obliku).	1 bod
Zapis jednog od brojeva x,y,z pomoću druga dva iz prethodne jednakosti i uvrštavanje u neku od jednadžbi.	1 bod
Rastav na faktore u jednadžbi $y(y+2x+1)=0$ ili sl.	1 bod
Zapis dva moguća rješenja $y=0$ ili $y+2x+1=0$ ili sl.	1 bod
Rješavanje slučaja $y=0$: $z=-x$, $x(x-1)=0$.	1 bod
Za svako od dobivenih rješenja iz tog slučaja $(0,0,0)$, $(1,0,-1)$ po bod.	2 boda
Rješavanje slučaja $y+2x+1=0$: $x(x+1)=0$.	1 bod
Za svako od dobivenih rješenja iz tog slučaja $(0,-1,1)$, $(-1,1,0)$ po bod.	2 boda

2. zadatak

Prvo rješenje

Trivijalna korisna opažanja (poput toga da 2021 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 ili da je $2021=43 \cdot 47$).	max 1 bod
Zaključak da je b paran.	3 boda
Zaključak da je a paran.	3 boda
Dovršetak (faktorizacija ili promatranje modulo 5).	3 boda

Drugo rješenje

Gledanje zadnjih znamenki i zaključivanje da za a i b modulo 4 postoje samo tri slučaja.	2 boda
Rješavanje dva slučaja u kojima je b neparan (npr. mod 3).	3 boda
Rješavanje $a=4k+3$, $b=4n$ slučaja.	5 bodova

Dijelovi ovih bodova mogući su samo u slučaju kad je napravljena jednostavna pogreška (a zaključci, npr. o parnosti ili ostatcima modulo 4, moraju biti točni).

3. zadatak

Ovdje prikazujemo marking shemu za rješenje koje se poklapa sa službenim u ključnim idejama, no malo se razlikuje od službenog.

- Uvođenje točke E' na kraku AD za koju je $|AE'| = |AB|$ i $|E'D| = |DC|$. **1 bod**
- Uočavanje da su trokuti ABE' i $DE'C$ jednakokračni, i raspis kutova u tim trokutima. **2 boda**
- Povezivanje vrijednosti kutova u tim trokutima i zaključak $\angle BE'C = 90^\circ$. **2 boda**
- Promatranje odnosa duljine $|ES|$ s duljinom $|DC|$ ili $|AB|$ (iz odgovarajućih sličnih trokuta ili Talesovog poučka). **2 boda**
- Uočavanje sličnosti trokuta SAB i SCD i izražavanje odnosa duljina. **2 boda**
- Zaključak da za točku E vrijedi isto što i za točku E' , čime je dokaz gotov. **1 bod**

4. zadatak

- Zaključak da su $|a|, |b|, |c| \leq 4$. **3 boda**
- (Taj se zaključak mogao dobiti kao u službenom rješenju, ili raspisivanjem slučaja po predznacima za izraze $a+b$, $b+c$ i $c+a$. Svaki od 8 slučajeva daje jedan od sljedećih 8 identiteta: $a=\pm 4$, $b=\pm 4$, $c=\pm 4$, $a+b+c=\pm 4$. Ispravno raspisivanje slučaja do ovih identiteta je nosilo **1 bod**, a preostala preostala **2 boda** za dovršen zaključak da su svi brojevi po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednaki 4.)
- $a^2+b^2+c^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 \leq 4^2 + 4^2 + 4^2 \leq 48$. **1 bod**
- Primjeri za postizanje maksimuma. **1 bod**
- Primjena K-A nejednakosti na $|a+b|$, $|b+c|$ i $|c+a|$. **2 boda**
- $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. **1 bod**
- Ispravan zaključak $a^2+b^2+c^2 \geq 16/3$. **1 bod**
- Primjeri za postizanje minimuma. **1 bod**

5. zadatak

- Promatrati jezik samo od riječi od 7 i više slova. **2 boda**
- Broj riječi u takvom jeziku 16256. **1 bod**
- Pretpostaviti suprotno da postoji riječ X koja je duga manje od 7 i promatrati skup $X + Y$ za svaku riječ Y duljine 7. **3 boda**
- Promatrati parove $\{Y, X+Y\}$, od koji je maksimalno jedan riječ. **4 boda**