

Državno natjecanje iz matematike 2021.

Bodovne sheme

Četvrti razred

1. zadatak

- Račun za y_0, y_1 , te zaključak da je $y_n = 3^n$. 2 boda
- (Napomena: zaključak za kvocijent, a ne i za cijeli opći član donosi 1 bod).
- Tvrdnja $x_n = 2^n$. 1 bod
- Baza indukcije. 1 bod
- Pretpostavka indukcije (uz jasno naznačeno što je n, k i sl.) 1 bod
- Korak indukcije. 4 boda
- (Napomena: samo prepoznavanje i raspis binomne formule $(1+2)^n$ donosi 1 bod).
- Rješenje $x_{2020} = 2^{2020}$. 1 bod

2. zadatak

Dokaz da je lijeva strana nejednakosti veća ili

jednaka $\frac{(n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i + p_{i+1})}$ (primjenom A-H ili Cauchy-Schwarz nejednakosti). 4 boda

Zaključak da je $\sum_{i=1}^{n-1} (p_i + p_{i+1}) = n(n+1) - p_1 - p_n$. 2 boda

Zaključak da je $n(n+1) - p_1 - p_n \leq n^2 + n - 3$ i dokaz tražene nejednakosti. 4 boda

Pokušaji dokazivanja nejednakosti matematičkom indukcijom vrijede 0 bodova.

3. zadatak

Prvo rješenje

- Dokaz da je a paran. 2 boda
- Dokaz da je b paran. 2 boda
- Primjena razlike kvadrata. 3 boda
- Faktorizacija i rješavanje sustava. 3 boda

Drugo rješenje (skica)

Gledamo ostatke modulo 100. Desna strana je kongruentna 25 ili 75. 2 boda

Razmatranjem mogućih ostataka s lijeve strane vidimo da se ostatak 75 ne može pojaviti.

2 boda

Dalje, imamo $2^a=100k+4$, odakle je $a \geq 2$, pa je $2^{a-2}=25k+1$. No, desna strana je potencija od 2 samo za $k=0$, pa je $a=2$.

5 bodova

Rješenje (2,4,1).

1 bod

4. zadatak

Točno jedna pločica u svakom retku/stupcu.

1 bod

“Padajuća” struktura vertikalnih pločica nalijevo i nadesno od najveće pločice (ili analogno za horizontalne).

3 boda

Prebrojavanje broja rasporeda pločica koji poštuju “padajuću” strukturu.

3 boda

Dokaz da svako od spomenutih odabira polja dopušta obje vrste popločavanja.

2 boda

Rješenje je 2^{2n-2} .

1 bod

5. zadatak

Tvrdnja: pravac DE prolazi točkom M (polovište luka BC).

1 bod

Uvođenje točke E' = presjek MD i EC te dokaz da je $\angle IEC = \angle IE'C$.

7 bodova

Dokaz da na BC postoji najviše jedna točka E za koju je $\angle ADI = \angle IEC$.

2 boda