

Državno natjecanje iz matematike 2021.
Bodovne sheme
Peti razred

1. Krojačica Ana ima platno oblika pravokutnika kojemu je duljina jedne stranice 70% duljine druge stranice. Režući platno po dužini čije su krajnje točke polovišta dviju susjednih stranica tog pravokutnika dobila je dijelove oblika pravokutnog trokuta i peterokuta. Opseg je peterokuta za 68 dm veći od opsega trokuta. Kolika je površina platna?

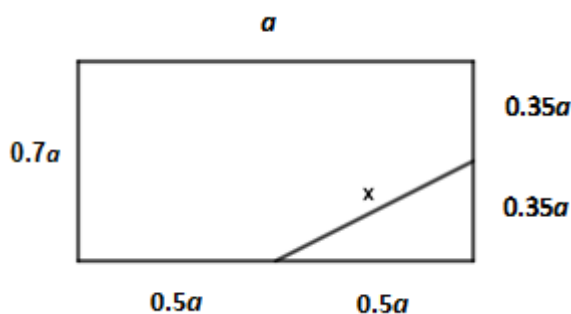
Rješenje:

1.način

Neka su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika i $a > b$. Sa x označimo duljinu dužine čije su krajnje točke polovišta susjednih stranica pravokutnika.

Vrijedi, $b = 70\% \cdot a = 0.7 \cdot a$

1 BOD



Skica

1 BOD

$$a + 0.7a + 0.5a + x + 0.35a = 0.5a + 0.35a + x + 68$$

1 BOD

$$2.55a + x = 0.85a + x + 68$$

1 BOD

$$2.55a = 0.85a + 68$$

$$2.55a - 0.85a = 68$$

1 BOD

$$1.7a = 68$$

1 BOD

$$a = 68 : 1.7$$

1 BOD

$$a = 40 \text{ dm}$$

1 BOD

$$b = 0.7 \cdot a$$

$$b = 0.7 \cdot 40$$

$$b = 28 \text{ dm}$$

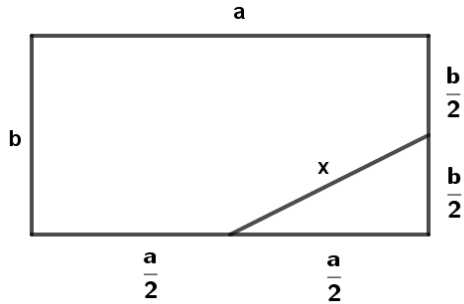
1 BOD

Površina platna je $(40 \cdot 28) \text{ dm}^2 = 1120 \text{ dm}^2$.

1 BOD

2. način

Neka su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika i $a > b$. S x označimo duljinu dužine čije su krajnje točke polovišta susjednih stranica pravokutnika.



Skica

1 BOD

Iz slike je očito da je opseg peterokuta veći od opsega trokuta za $a + b$.
Stoga vrijedi $a + b = 68 \text{ dm}$.

2 BODA

Kako je $b = 70\% \cdot a = 0.7 \cdot a$,

1 BOD

slijedi $a + 0.7a = 68$

1 BOD

$$1.7a = 68$$

1 BOD

$$a = 68 : 1.7$$

1 BOD

$$a = 40 \text{ dm}$$

1 BOD

$$b = 0.7 \cdot a$$

$$b = 0.7 \cdot 40$$

$$b = 28 \text{ dm}$$

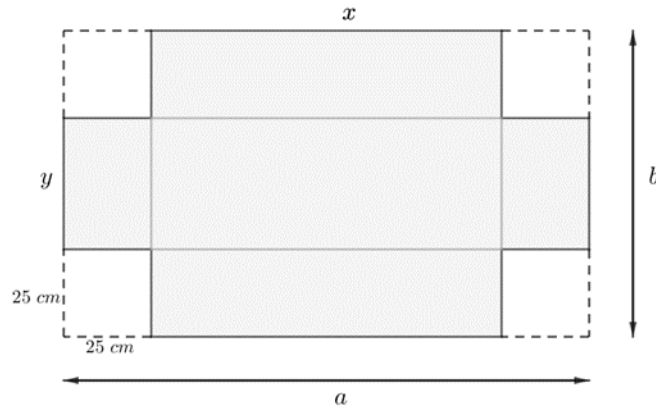
1 BOD

Površina platna je $(40 \cdot 28) \text{ dm}^2 = 1120 \text{ dm}^2$.

1 BOD

2. Duljine stranica kartona pravokutnog oblika su prirodni brojevi izraženi u decimetrima. Iz svakog od njegovih kutova izrezan je kvadrat sa stranicom duljine 25 cm. Preostali dio kartona iskorišten je za slaganje kutije bez poklopca čiji je obujam 112.5 dm^3 . Odredi sve moguće duljine stranica početnog kartona.

Rješenje:



Skica **1 BOD**

Neka su a i b duljine stranica kartona, a x i y redom duljine tih stranica umanjene za 50 cm.

Neka je $a > b$ kao na skici.

Pri slaganju kutije (kvadra) jedan brid ima duljinu 25 cm, a duljine preostalih bridova su x i y .

1 BOD

Obujam kvadra s bridovima duljina x , y i 25 cm (2.5 dm) računa se po formuli $V = x \cdot y \cdot 2.5$.

Iz te formule slijedi $112.5 = x \cdot y \cdot 2.5$

1 BOD

odnosno $x \cdot y = 45$.

1 BOD

Moguća rješenja odnosno duljine bridova x i y dana su u tablici.

x (dm)	1	3	5	9	15	45
y (dm)	45	15	9	5	3	1

3 BODA

Uz uvjet $x > y$ (koji slijedi iz uvjeta $a > b$) moguća su rješenja parovi (9,5), (15, 3) i (45,1).

Duljine su stranica a i b početnog kartona za 5 dm dulje i dane su u sljedećoj tablici.

a (dm)	14	20	50
b (dm)	10	8	

3 BODA

3. Gea je zamislila broj. Kad bi oblikovala niz koji ima 2021 član tako da je prvi član zamišljeni broj, a svaki je sljedeći član veći za 20.21 od prethodnog, zbroj svih brojeva tog niza bio bi 11.1 puta veći od 2021·2021. Koji je broj zamislila Gea?

Rješenje:

1.način

Neka je x broj koji je zamislila Gea.

Niz od 2021 člana koji nastaje na opisani način je niz brojeva

$$x, x + 1 \cdot 20.21, x + 2 \cdot 20.21, \dots, x + 2020 \cdot 20.21 \quad 1 \text{ BOD}$$

Tada je

$$x + x + 1 \cdot 20.21 + x + 2 \cdot 20.21 + \dots + x + 2020 \cdot 20.21 = 11.1 \cdot 2021^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (1 + 2 + \dots + 2020) = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (2021 \cdot 2020) : 2 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot 1010 \cdot 2021 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad /: 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x + 20.21 \cdot 1010 = 11.1 \cdot 2021$$

$$x + 2021 \cdot 10.1 = 11.1 \cdot 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 11.1 \cdot 2021 - 2021 \cdot 10.1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 2021 \cdot (11.1 - 10.1) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 2021 \cdot 1$$

$$x = 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

Gea je zamislila broj 2021.

2.način

Neka je x broj koji je zamislila Gea.

Niz od 2021 člana koji nastaje na opisani način je niz brojeva

$$x, x + 1 \cdot 20.21, x + 2 \cdot 20.21, \dots, x + 2020 \cdot 20.21 \quad 1 \text{ BOD}$$

Tada je

$$x + x + 1 \cdot 20.21 + x + 2 \cdot 20.21 + \dots + x + 2020 \cdot 20.21 = 11.1 \cdot 2021^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (1 + 2 + \dots + 2020) = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (2021 \cdot 2020) : 2 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot 1010 \cdot 2021 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad /: 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x + 20.21 \cdot 1010 = 11.1 \cdot 2021$$

$$x + 20412.1 = 22433.1 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$x = 22433.1 - 20412.1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 2021 \quad 1 \text{ BOD}$$

Gea je zamislila broj 2021.

3.način

Neka je x broj koji je zamislila Gea.

Niz od 2021 člana koji nastaje na opisani način je niz brojeva

$$x, x + 20.21, x + 40.42, \dots, x + 40\,824.2$$

1 BOD

Tada je

$$x + x + 20.21 + x + 40.42 + \dots + x + 40\,824.2 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$$

1 BOD

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (1 + 2 + \dots + 2020) = 45\,337\,295.1$$

1 BOD

$$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (2021 \cdot 2020) : 2 = 45\,337\,295.1$$

2 BODA

$$2021 \cdot x + 41\,252\,854.1 = 45\,337\,295.1$$

1 BOD

$$2021 \cdot x = 45\,337\,295.1 - 41\,252\,854.1$$

1 BOD

$$2021 \cdot x = 4\,084\,441$$

1 BOD

$$x = 4\,084\,441 : 2021$$

1 BOD

$$x = 2021$$

1 BOD

Gea je zamislila broj 2021.

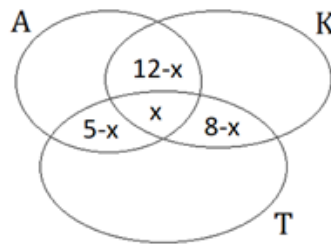
4. Trojica prijatelja Ante, Karlo i Tomo crtali su zastave država u koje bi voljeli otputovati. Ante je nacrtao 20, Karlo 25, a Tomo 28 zastava. Broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Ante jednak je tri petine broja zastava koje je nacrtao Ante. Broj zastava koje su nacrtali i Tomo i Ante jednak je četvrtini broja zastava koje je nacrtao Ante. Broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Tomo jednak je dvije sedmine broja zastava koje je nacrtao Tomo. Broj zastava koje su nacrtala sva trojica sedamnaest je puta manji od ukupnog broja svih zastava koje su nacrtali. Koliko su ukupno različitih zastava nacrtali Ante, Karlo i Tomo?

Rješenje:

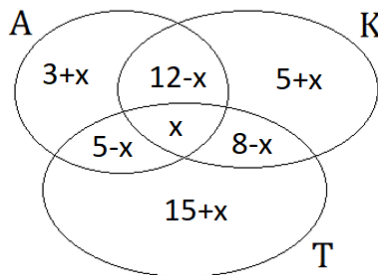
1.način

- $\frac{3}{5}$ od 20 je 12 Karlo i Ante nacrtali su 12 istih zastava. 1 BOD
- $\frac{1}{4}$ od 20 je 5 Tomo i Ante nacrtali su 5 istih zastava. 1 BOD
- $\frac{2}{7}$ od 28 je 8 Karlo i Tomo nacrtali su 8 istih zastava. 1 BOD

Neka je x broj zastava koje su nacrtala sva trojica, a z ukupan broj svih zastava koje su nacrtali. Tada je $z = 17 \cdot x$ i



- Broj zastava koje je nacrtao samo Ante je $3 + x$. 1 BOD
- Broj zastava koje je nacrtao samo Karlo je $5 + x$. 1 BOD
- Broj zastava koje je nacrtao samo Tomo je $15 + x$. 1 BOD



$$17x = 3 + x + 12 - x + 5 + x + 5 - x + x + 8 - x + 15 + x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$17x = 48 + x$$

$$16x = 48 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 3 \quad 1 \text{ BOD}$$

Broj različitih zastava koje su nacrtali Ante, Karlo i Tomo je $z = 17 \cdot 3 = 51$. 1 BOD

2.način

$\frac{3}{5}$ od 20 je 12 Karlo i Ante nacrtali su 12 istih zastava.

1 BOD

$\frac{1}{4}$ od 20 je 5 Tomo i Ante nacrtali su 5 istih zastava.

1 BOD

$\frac{2}{7}$ od 28 je 8 Karlo i Tomo nacrtali su 8 istih zastava.

1 BOD

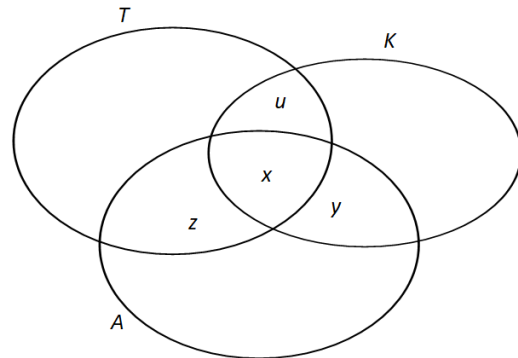
Neka je x broj zastava koje su nacrtala sva trojica, a d ukupan broj svih zastava koje su nacrtali. Tada je $d = 17 \cdot x$.

Neka je z broj zastava koje su nacrtali i Tomo i Ante, y broj zastava koje su nacrtali i Ante i Karlo, a u broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Tomo. Tada vrijedi:

$$x + z = 5$$

$$x + y = 12$$

$$x + u = 8$$



Tada je broj zastava koje je nacrtao samo Ante:

$$20 - (x + y) - z = 20 - 12 - z = 8 - z$$

1 BOD

Tada je broj zastava koje je nacrtao samo Karlo:

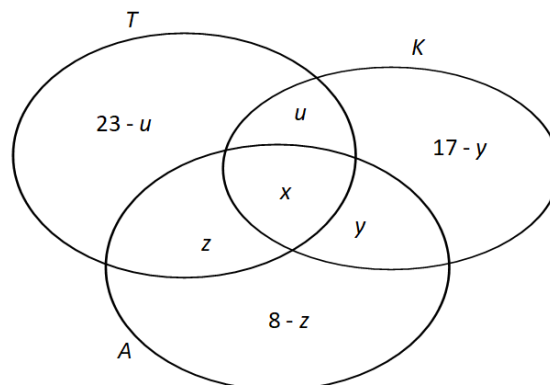
$$25 - (x + u) - y = 25 - 8 - y = 17 - y$$

1 BOD

Tada je broj zastava koje je nacrtao samo Tomo:

$$28 - (x + z) - u = 28 - 5 - u = 23 - u$$

1 BOD



Ukupan broj zastava koje su njih trojica nacrtali je

$$d = 23 - u + u + 17 - y + y + 8 - z + z + x = 48 + x$$

1 BOD

Kako je $d = 17x$, iz uvjeta zadatka, slijedi: $17x = 48 + x$

$$16x = 48$$

1 BOD

$$x = 3$$

1 BOD

Broj različitih zastava koje su nacrtali Ante, Karlo i Tomo je $d = 17 \cdot 3 = 51$.

1 BOD

3.način

$\frac{3}{5}$ od 20 je 12 Karlo i Ante nacrtali su 12 istih zastava.

1 BOD

$\frac{1}{4}$ od 20 je 5 Tomo i Ante nacrtali su 5 istih zastava.

1 BOD

$\frac{2}{7}$ od 28 je 8 Karlo i Tomo nacrtali su 8 istih zastava.

1 BOD

Neka je x broj zastava koje su nacrtala sva trojica, a d ukupan broj svih zastava koje su nacrtali. Tada je

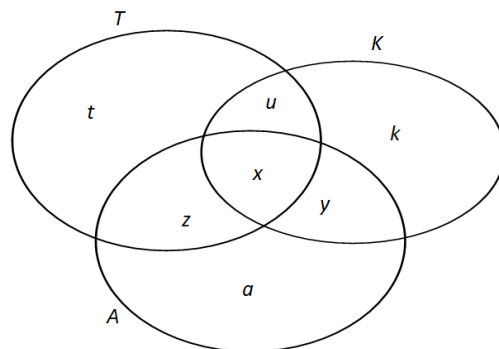
$$d = 17 \cdot x.$$

Neka je z broj zastava koje su nacrtali i Tomo i Ante, y broj zastava koje su nacrtali i Ante i Karlo, a u broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Tomo. Tada vrijedi:

$$x + z = 5$$

$$x + y = 12$$

$$x + u = 8$$



Iz zapisanih jednakosti možemo zaključiti da je $x \leq 5$.

1 BOD

Neka je $d = x + z + y + u + t + k + a$. Prema uvjetu zadatka vrijedi $17x = d$.

Za $x = 1$

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
1	4	11	7	16	6	4	49

Provjerom se lako vidi da $x = 1$ ne zadovoljava uvjet $17x = 49$.

1 BOD

Za $x = 2$

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
2	3	10	6	17	7	5	50

Provjerom se lako vidi da niti $x = 2$ ne zadovoljava uvjet $17x = 50$.

1 BOD

Za $x = 3$

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
3	2	9	5	18	8	6	51

Provjerom se lako vidi da $x = 3$ zadovoljava uvjet $17x = 51$.

1 BOD

Za $x = 4$

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
4	1	8	4	19	9	7	52

Provjerom se lako vidi da $x = 4$ ne zadovoljava uvjet $17x = 52$.

1 BOD

Za $x = 5$

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
5	0	7	3	20	10	8	53

Provjerom se lako vidi da $x = 5$ ne zadovoljava uvjet $17x = 53$.

1 BOD

Broj različitih zastava koje su nacrtali Ante, Karlo i Tomo je $d = 17 \cdot 3 = 51$.

1 BOD

5. Na Morskim susretima, natjecanju u igrama uz more i bazen, sudjeluje 8 Dubrovčana, 7 Zadrana, 2 Hvarana i 3 Splitskana. Trebaju sastaviti peteročlanu ekipu u kojoj će biti barem po jedan natjecatelj iz svakog od ta četiri grada, ali ne smiju biti tri natjecatelja iz istog grada. Na koliko različitih načina mogu sastaviti ekipu?

Rješenje:

Neka D označava natjecatelja iz Dubrovnika, Z natjecatelja iz Zadra, H natjecatelja iz Hvara i S natjecatelja iz Splita.

Prema uvjetima zadatka moguće su sljedeće ekipe: DDZHS, ZZDHS, HHDZS i SSDZH.

2 BODA

Pri slaganju ekipe DDZHS,

dva natjecatelja iz Dubrovnika biraju se na $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ načina,

1 BOD

jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina, jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina i jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina.

Ukupan broj ekipa DDZHS je $28 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 1176$.

1 BOD

Pri slaganju ekipe ZZDHS,

dva natjecatelja iz Zadra biraju se na $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ način,

1 BOD

jedan natjecatelj iz Dubrovnika na 8 načina, jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina, jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina.

Ukupan broj ekipa ZZDHS je $21 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 = 1008$.

1 BOD

Pri slaganju ekipe HHDZS, oba natjecatelja iz Hvara su članovi ekipe pa ih se može odabrati samo na 1 način, jedan natjecatelj iz Dubrovnika na 8 načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina, jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina.

Ukupan broj ekipa HHDZS je $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$.

1 BOD

U četvrtom slučaju, pri slaganju ekipe SSDZH,

dva natjecatelja iz Splita biraju se na $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ načina,

1 BOD

jedan natjecatelj iz Dubrovnika na 8 načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina i jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina.

Ukupan broj ekipa SSDZH je $3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 = 336$.

1 BOD

Ekipu je moguće odabrati na $1176 + 1008 + 168 + 336 = 2688$ načina.

1 BOD

Napomena: Učenicima koji broj načina odabira drugog člana iz istoga grada nisu podijelili brojem 2 ukupan broj bodova umanjen je za 3 boda.