ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** Neka je $x = 202120212021$. 1 BOD

Tada brojevni izraz poprima oblik:

$$\frac{(x-2)\cdot x\cdot(x+2)}{100010001\cdot(x^2-4)}=$$ 1 BOD

$$=\frac{x\cdot(x^2-4)}{100010001\cdot(x^2-4)}$$ 1 BOD

$$=\frac{x}{100010001}$$ 1 BOD

(uočimo da je $202120212021 = 2021 \cdot 10^8 + 2021 \cdot 10^4 + 2021 = 2021 \cdot 100010001$)

$$=\frac{2021\cdot 100010001}{100010001}$$ 1 BOD

$= 2021$ 1 BOD

........................................................................................ UKUPNO 6 BODOVA

**2.** Neka je $p : z$ omjer broja plavih i broja zelenih žaba pretprošle godine.

Prošle godine broj plavih žaba bio je $p_1 = 1.6p$, a broj zelenih žaba $z_1 = 0.4z$. 1 BOD

Kako su omjeri broja plavih i broja zelenih žaba prošle godine i pretprošle isti, ali u obrnutom poretku, vrijedi:

$$\frac{1.6p}{0.4z}=\frac{z}{p}.$$ 1 BOD

Iz te jednakosti slijedi

$4p^2 = z^2$, odnosno $z = 2p$ (radi se o pozitivnim cijelim brojevima). 1 BOD

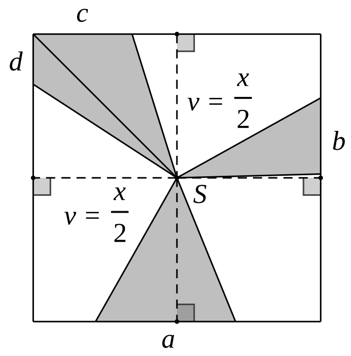
Omjer ukupnog broja svih žaba prošle i pretprošle godine je

$$\frac{1.6p+0.4z}{p+z}=\frac{1.6p+0.4\cdot 2p}{p+2p}=\frac{2.4p}{3p}=\frac{8}{10} = 80\ \%.$$ 2 BODA

Dakle, ukupan broj žaba smanjio se za 20 % (prošle godine u odnosu na pretprošlu). 1 BOD

........................................................................................ UKUPNO 6 BODOVA

**3.**




Neka je zajednička točka osjenčanih dijelova $S$, a duljina stranice kvadrata $x$.

Kako je $S$ jednako udaljena od svih stranica zadanog kvadrata, onda su duljine visina trokuta koje čine osjenčani dijelovi jednake polovini duljine stranice kvadrata, tj. $\frac{x}{2}$. 1 BOD

Površina osjenčanog dijela jednaka je trećini površine kvadrata pa vrijedi:

$\frac{1}{2}a\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}b\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}c\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}d\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{3}x^2$ 1 BOD

$\frac{ax}{4}+\frac{bx}{4}+\frac{cx}{4}+\frac{dx}{4}=\frac{1}{3}x^2$ 1 BOD

$x(a+b+c+d)=\frac{4x^2}{3}$ 1 BOD

$a+b+c+d=\frac{4x}{3}$ 1 BOD

$a+b+c+d=\frac{o}{3}$. 1 BOD

……………………………………………………………………..…….......... UKUPNO 6 BODOVA

**4. Prvi način:**

S obzirom da su zadani izrazi pozitivni dokazom jednakosti njihovih kvadrata dokazujemo i njihovu jednakost. 1 BOD

$\left(2\sqrt{21}\right)^2 = \left(\sqrt{22+2\sqrt{21}}+\sqrt{22-2\sqrt{21}}\right)^2$ .

Dobijemo:

$84 = \sqrt{22+2\sqrt{21}}^2 + 2\cdot\sqrt{22+2\sqrt{21}}\cdot\sqrt{22-2\sqrt{21}} + \sqrt{22-2\sqrt{21}}^2$ 1 BOD

$84 = 22+2\sqrt{21}+2\sqrt{(22+2\sqrt{21})\cdot(22-2\sqrt{21})} + 22 - 2\sqrt{21}$ 1 BOD

$84 = 44+2\sqrt{22^2-4\cdot 21}$ 1 BOD

$84 = 44+2\sqrt{484-84}$

$84 = 44+2\sqrt{400}$ 1 BOD

$84 = 84$ 1 BOD

……………………………………………………………………...……..… UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena:** Ako učenik/ca nije razmatrao/la pozitivnost veličina $2\sqrt{21}$ i $\sqrt{22+2\sqrt{21}}+\sqrt{22-2\sqrt{21}}$, ne može ostvariti maksimalan broj bodova.

**Drugi način:**

$\sqrt{22+2\sqrt{21}} + \sqrt{22-2\sqrt{21}} = \sqrt{21+2\sqrt{21}+1} + \sqrt{21-2\sqrt{21}+1}$ 1 BOD

$= \sqrt{\left(\sqrt{21}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{21}-1\right)^2}$ 2 BODA

Budući da je $\sqrt{21}+1 > 0$ i $\sqrt{21}-1 > 0$, 1 BOD

vrijedi $\sqrt{\left(\sqrt{21}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{21}-1\right)^2} = \sqrt{21}+1+\sqrt{21}-1$ 1 BOD

$= 2\sqrt{21}.$ 1 BOD

…………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena:** Ako učenik/ca nije razmatrao/la pozitivnost veličina $\sqrt{21}+1$ i $\sqrt{21}-1$, ne može ostvariti maksimalan broj bodova.

**5. Prvi način:**

Odredimo zbroj oduzimanjem parnih pribrojnika od ukupnog zbroja niza uzastopnih prirodnih brojeva od 1 do *k*.

$1 + 2 + 3 + ... + k - ( 2 + 4 + 6 + ... + (k - 1)) = 40\,000$ 1 BOD

$\frac{k\cdot(k-1)}{2} - 2\cdot\left(1+2+3+...+\frac{k-1}{2}\right) = 40\,000$ 1 BOD

$\frac{k\cdot(k-1)}{2} - 2\cdot\frac{\frac{k-1}{2}\cdot\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}{2} = 40\,000,$ 1 BOD

što je ekvivalentno kvadratnoj jednadžbi

$k^2 + 2k + 1 = 160\,000$ 1 BOD

$(k + 1)^2 = 160\,000.$

Mogućnost $k + 1 = -400$ tj. $k = -401$ otpada jer je *k* prirodan broj. 1 BOD

$k + 1 = 400$

$k = 399$ 1 BOD

Budući je *k* prirodan broj, najveći pribrojnik u zbroju je 399.

………………………….……….………….…………………….……......... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:**

Zapišimo zbroj prvih *n* neparnih prirodnih brojeva na sljedeći način:

$1+3+5+...+2n-1=\left(1+2+3+4+...+2n-1\right)-(2+4+6+...+2n-2)$ 1 BOD

$=\frac{\left(2n-1\right)\cdot 2n}{2} - 2\cdot(1+2+3+...+n-1)$ 1 BOD

$= (2n-1)\cdot n - 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$ 1 BOD

$= 2n^2 - n - (n-1)\cdot n$

$= 2n^2 - n - n^2 + n$

$= n^2$ 1 BOD

Dakle, zbroj prvih $n$ neparnih prirodnih brojeva jednak je $n^2$.
Kako je 40 000 = $200^2$, zaključujemo da je zadani zbroj, zbroj prvih 200 neparnih prirodnih brojeva. 1 BOD

Traženi broj $k$ je 200-ti neparni prirodan broj, zato je $k = 2 \cdot 200 - 1 = 399$. 1BOD

………………………………………………………………………........ UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena:** Učenik/ca dobiva 4 BODA za svaki valjani dokaz da je zbroj prvih $n$ neparnih prirodnih brojeva jednak $n^2$.

**6.** Neka su $2n-1$ i $2m-1$, $n,m\in\mathbb{N}$ dva neparna prirodna broja. Potrebno je dokazati da je $(2n-1)^4-(2m-1)^4$ djeljivo sa 16.

Ako je $n=m,\ n,m\in\mathbb{N}$, tvrdnja vrijedi jer je 0 djeljiva brojem 16. 1 BOD

Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $n>m,\ n,m\in\mathbb{N}$.

$(2n-1)^4-(2m-1)^4=\left((2n-1)^2\right)^2-\left((2m-1)^2\right)^2$ 1 BOD

$=\left((2n-1)^2-(2m-1)^2\right)\left((2n-1)^2+(2m-1)^2\right)$ 1 BOD

$=(2n-1-2m+1)(2n-1+2m-1)\left(4n^2-4n+1+4m^2-4m+1\right)$ 1 BOD

$=(2n-2m)(2n+2m-2)\left(4n^2-4n+4m^2-4m+2\right)$ 1 BOD

$=8(n-m)(n+m-1)\left(2n^2-2n+2m^2-2m+1\right)$ 1 BOD

U dobivenom umnošku prvi je faktor 8, a zadnji je neparan prirodan broj.
Da bi pokazali da je umnožak djeljiv sa 16, potrebno je još pokazati da je ili drugi ili treći faktor ovog umnoška paran. Imamo dva moguća slučaja:

1) Ako su $n$ i $m$ iste parnosti, tada je njihova razlika $n-m$ paran broj, 1 BOD
pa je
$(2n-1)^4-(2m-1)^4=8\cdot 2k(n+m-1)\left(2n^2-2n+2m^2-2m+1\right)=16l,\ k,l\in\mathbb{N},$
dakle razlika četvrtih potencija dvaju neparnih prirodnih brojeva je djeljiva sa 16. 1 BOD

2) Ako su $n$ i $m$ različite parnosti, onda je $n + m - 1$ paran broj, 1 BOD
pa je
$(2n-1)^4-(2m-1)^4=8(n-m)\cdot 2k\left(2n^2-2n+2m^2-2m+1\right)=16l,\ k,l\in\mathbb{N},$
dakle razlika četvrtih potencija dvaju neparnih prirodnih brojeva je djeljiva sa 16. 1 BOD

……………………………………...………………………….……..…..... UKUPNO 10 BODOVA

**7. Prvi način:**

**a)** Da bi broj bio palindrom i istovremeno djeljiv s 5 zadnja znamenka može biti samo 5 (ne može biti 0 jer vodeća znamenka ne može biti 0) i tada je i prva znamenka slijeva jednaka 5. 1 BOD

Drugu znamenku možemo birati na 10 načina, a jednako tako i treću. 1 BOD
Tada je (jer je broj palindrom) četvrta znamenka određena jednoznačno.
Zato je ukupan broj takvih brojeva jednak $10 \cdot 10 = 100$. 1 BOD

**b)** Prva znamenka slijeva ne smije biti 0; biramo prve dvije znamenke na $9 \cdot 10 = 90$ načina
1 BOD
i potom su zadnje dvije znamenke određene jednoznačno.
Srednju znamenku sada biramo tako da broj bude djeljiv s 3, tj. da zbroj svih znamenki bude djeljiv s 3.

Za mogućih 90 izbora prve dvije znamenke vrijedi da je točno 30 djeljivo s 3, točno 30 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 i točno 30 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 pa to isto vrijedi i za zbroj njihovih znamenki. 1 BOD

Zato je:

(i) u 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim srednje, je djeljiv s 3,

(ii) u 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim srednje, daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3,

(iii) u 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim srednje, daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. 1 BOD

Da bi u slučaju (i) broj bio djeljiv s 3, srednja znamenka mora biti djeljiva s 3, tj. mora biti jednaka 0, 3, 6 ili 9, pa je takvih brojeva $30 \cdot 4 = 120$. 1 BOD

Da bi u slučaju (ii) broj bio djeljiv s 3, srednja znamenka mora dati ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. mora biti jednaka 2, 5 ili 8, pa je takvih brojeva $30 \cdot 3 = 90$. 1 BOD

Da bi u slučaju (iii) broj bio djeljiv s 3, srednja znamenka mora dati ostatak 1 pri dijeljenju s 3, tj. mora biti jednaka 1, 4 ili 7, pa je takvih brojeva $30 \cdot 3 = 90$. 1 BOD

Zato je ukupni broj takvih brojeva jednak $30 \cdot 4 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 3 = 300$. 1 BOD
…………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

**a)** (isto kao na prvi način) 3 BODA

**b)** Palindrom možemo zapisati u obliku $\overline{abcba}$, $a,b,c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i $a \neq 0$.

Taj broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3 pa vrijedi:

$$a+b+c+b+a=3k$$
$$2a+2b+c=3k,\ k \in \mathbb{N}.$$
1 BOD

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 1$ | $b = 0$ | $2a + 2b + c = 2 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 1$ | $2a + 2b + c = 4 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 2$ | $2a + 2b + c = 6 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 3$ | $2a + 2b + c = 8 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $b = 4$ | $2a + 2b + c = 10 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 5$ | $2a + 2b + c = 12 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 6$ | $2a + 2b + c = 14 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 7$ | $2a + 2b + c = 16 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 8$ | $2a + 2b + c = 18 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 9$ | $2a + 2b + c = 20 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |

Ukupno ima $7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21 + 12 = 33$ takva broja. 1 BOD

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 2$ | $b = 0$ | $2a + 2b + c = 4 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 1$ | $2a + 2b + c = 6 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 2$ | $2a + 2b + c = 8 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 3$ | $2a + 2b + c = 10 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 4$ | $2a + 2b + c = 12 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 5$ | $2a + 2b + c = 14 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 6$ | $2a + 2b + c = 16 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 7$ | $2a + 2b + c = 18 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 8$ | $2a + 2b + c = 20 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 9$ | $2a + 2b + c = 22 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |

Ukupno ima $7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21 + 12 = 33$ takva broja. 1 BOD

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 3$ | $b = 0$ | $2a + 2b + c = 6 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 1$ | $2a + 2b + c = 8 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 2$ | $2a + 2b + c = 10 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 3$ | $2a + 2b + c = 12 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 4$ | $2a + 2b + c = 14 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 5$ | $2a + 2b + c = 16 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 6$ | $2a + 2b + c = 18 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |
| | $b = 7$ | $2a + 2b + c = 20 + c$ | $c = 1, 4, 7$ |
| | $b = 8$ | $2a + 2b + c = 22 + c$ | $c = 2, 5, 8$ |
| | $b = 9$ | $2a + 2b + c = 24 + c$ | $c = 0, 3, 6, 9$ |

Ukupno ima $6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 18 + 16 = 34$ takvih brojeva. 1 BOD
Analogno, za $a = 4, 5, 7, 8$ ima po 33 takva broja, 1 BOD
a za $a = 6, 9$ ima po 34 takva broja. 1 BOD
Ukupno ima:
$6 \cdot 33 + 3 \cdot 34 = 198 + 102 = 300$ takvih brojeva. 1 BOD
…………………………………………………………..……..…..….. UKUPNO 10 BODOVA