ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
17. veljače 2021.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj 68 Magdalena je mogla dobiti nakon što je prethodnom rezultatu dodala 16.
Početni broj računamo unatrag, oduzimanjem broja 16 te dijeljenjem s 2. 1 BOD
68 – 16 = 52
52 : 2 = 26
26 – 16 = 10
10 : 2 = 5
Traženi početni broj je 5. 2 BODA
Broj 68 Magdalena je mogla dobiti nakon što je prethodni rezultat pomnožila s 2.
Početni broj računamo unatrag, dijeljenjem s 2 te oduzimanjem broja 16. 1 BOD
68 : 2 = 34
34 – 16 = 18
18 : 2 = 9
Traženi početni broj je 9. 2 BODA
Magdalena je mogla početi računati od broja 5 ili od broja 9.

Napomena: Točno rješenje bez postupka ili objašnjenja bodovati s JEDNIM BODOM.
……………………………………………………………………………..…….. UKUPNO 6 BODOVA

2. $A = \{-153, -152, -151, \ldots, 144, 145\}$ ili
$a \in \{-153, -152, -151, \ldots, 144, 145\}$, odnosno
elementi skupa A su: –153, –152, –151, …, 144, 145. 1 BOD
$B = \{-149, -148, -147, \ldots, 86, 87\}$ ili
$b \in \{-149, -148, -147, \ldots, 86, 87\}$, odnosno
elementi skupa B su: –149, –148, –147, …, 86, 87. 1 BOD
Zbroj svih elemenata skupa A je:
$-153 + (-152) + \ldots + (-146) + (-145) + (-144) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + \ldots + 145 =$
$= -153 + (-152) + \ldots + (-146) + (-145 + 145) + (-144 + 144) + \ldots + (-1 + 1) + 0 =$
$= -153 - 152 - 151 - 150 - 149 - 148 - 147 - 146 =$ 1 BOD
$= -1\,196$ 1 BOD
Umnožak svih elemenata skupa B je 0 jer je 0 element skupa B. 1 BOD
Umnožak svih elemenata skupa B veći je od zbroja svih elemenata skupa A za 1 196. 1 BOD
……………………………………………………………………………………..UKUPNO 6 BODOVA

3. d – broj godina djeda
o – broj godina oca
s – broj godina sina
Vrijedi:
$o = (d + s) : 2$, odnosno $d + s = 2o$. 2 BODA
Kako je $o + (d + s) = 84$, vrijedi
$o + 2o = 84$ 1 BOD
$3o = 84$ 1 BOD

$o = 84 : 3$ 1 BOD

$o = 28$

Otac ima 28 godina. 1 BOD

……………………………………………………………………………...UKUPNO 6 BODOVA

4. Ako je $a = 2$, tada je $a^2 = 4$. Da bi umnožak bio troznamenkasti broj, b mora biti prost broj veći ili jednak broju 25. Da bi umnožak bio manji od 200, b mora biti prost broj manji od 50.

Tada je $b \in \{29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. 1 BOD

Ako je $a = 3$, tada je $a^2 = 9$, pa b treba biti prost broj veći od 11, a manji ili jednak broju 22.

Tada je $b \in \{13, 17, 19\}$. 1 BOD

Za $a = 5$ vrijedi $a^2 = 25$, pa je $b \in \{5, 7\}$. 1 BOD

Za $a = 7$ vrijedi $a^2 = 49$, pa je $b \in \{3\}$. 1 BOD

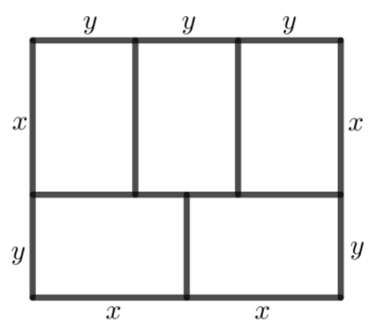
Za $a \geq 11$ vrijedi $a^2 \cdot b > 200$ za bilo koji prost broj b te rješenja više nema. 1 BOD

Ukupan broj rješenja je, prema tome, $6 + 3 + 2 + 1 = 12$. 1 BOD

……………………………………………………………………………...UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Označimo s x duljinu veće, a s y duljinu manje stranice malog pravokutnika.



Sa slike se zaključi da je opseg početnog pravokutnika $4x + 5y$.

Vrijedi $4x + 5y = 176$. 1 BOD

Promatrajući gornju i donju stranicu početnog pravokutnika, zaključi se:

$2x = 3y$, 1 BOD

odnosno $4x = 6y$.

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu slijedi:

$6y + 5y = 176$

$11y = 176$

$y = 176 : 11$

$y = 16$ cm 1 BOD

Dalje je:

$4x = 6 \cdot 16$

$4x = 96$

$x = 96 : 4$

$x = 24$ cm 1 BOD

Duljine stranica početnog pravokutnika su:

$a = 2x = 48$ cm i $b = x + y = 40$ cm, 1 BOD

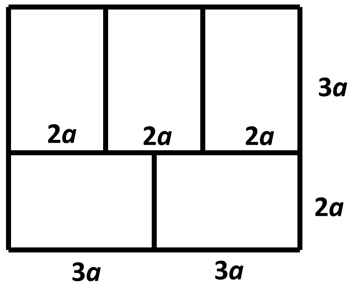
a površina:

$P = a \cdot b = 48 \cdot 40 = 1\,920\ \text{cm}^2$. 1 BOD

……………………………………………………………………………...UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Uvedimo oznake kao na slici: 1 BOD



Duljine stranica pravokutnika su $6a$ i $5a$, pa je opseg:

$o = 2 \cdot (6a + 5a)$

$o = 22a$ 2 BODA

Kako je $o = 176$ cm, to je:

$22a = 176$

$a = 8$ cm 1 BOD

Površina velikog pravokutnika je:

$P = 6a \cdot 5a$

$P = 30a^2$

$P = 30 \cdot 64$

$P = 1\ 920$ cm^2 2 BODA

…………………………..…………………………………::……………...UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Izračunamo Gaussovim postupkom zbroj prvih 66 prirodnih brojeva.

Zbroj je $(1 + 66) \cdot 66 : 2 = 67 \cdot 66 : 2 = 4\ 422 : 2 = 2\ 211$. 4 BODA

Količnik broja 2 211 i broja 7 je 315, uz ostatak 6, tj. $2\ 211 = 315 \cdot 7 + 6$. 2 BODA

Zbroj će biti djeljiv sa 7 ako izbrišemo broj 6. 1 BOD

Isto tako, zbroj će biti djeljiv sa 7 i ako izbrišemo sve brojeve oblika $7k + 6$, tj. one brojeve koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 6.

To su brojevi: 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55 i 62. 3 BODA

……………………………………………………………………….……... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Odredimo zbroj Gaussovom dosjetkom:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 65 + 66 = \dfrac{66 \cdot 67}{2} = 33 \cdot 67 = 2\ 211$ 4 BODA

Tražimo broj djeljiv sa 7:

2 211 – 66 = 2 145, 2 145 nije djeljiv sa 7

2 211 – 65 = 2 146, 2 146 nije djeljiv sa 7

2 211 – 64 = 2 147, 2 147 nije djeljiv sa 7

2 211 – 63 = 2 148, 2 148 nije djeljiv sa 7

2 211 – 62 = 2 149, 2 149 je djeljiv sa 7 2 BODA

Svaki sljedeći sedmi broj biti će djeljiv sa 7, a to znači da svaki sljedeći broj koji se oduzima treba umanjiti za 7. 1 BOD

Traženi brojevi su: 62, 55, 48, 41, 34, 27, 20, 13 i 6. 3 BODA

……………………………………………….…………...……………... UKUPNO 10 BODOVA

7. Pravokutnik:

$P = 48\ \text{cm}^2$

$P = a \cdot b$

U tablici su prikazane sve moguće vrijednosti za duljine stranica a i b te je izračunat opseg.

a (cm)	1	2	3	4	6
b (cm)	48	24	16	12	8
Opseg (cm)	98	52	38	32	28

Napomena 1: Za svaki napisani slučaj i izračunati opseg dobije se po 1 BOD. 5 BODOVA

Kvadrat:

Za svaki od pronađenih 5 slučajeva provjeri se je li duljina stranice a prirodni broj:

Opseg (cm)	98	52	38	32	28
a (cm)	nema rješenja	13	nema rješenja	8	7
Površina (cm^2)	-	169	-	64	49

Napomena 2: Za svaki napisani slučaj i izračunatu površinu dobije se po 1 BOD. 5 BODOVA

………………………………………………………………………….……... UKUPNO 10 BODOVA