2. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

27. veljače 2021.

Zadatak 1.

Svakom vrhu pravilnog n-terokuta pridružen je po jedan nenegativan realni broj tako da zbroj svih pridruženih brojeva iznosi 1. Označimo s A zbroj svih umnožaka brojeva pridruženim trima uzastopnim vrhovima. Odredi najveću moguću vrijednost broja A i odredi sve slučajeve u kojima se ta vrijednost postiže ako je

a) $n = 4$,

b) $n = 6$.

Rješenje.

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ redom nenegativni realni brojevi pridruženi vrhovima n-terokuta.

U a) dijelu zadatka imamo zbroj $A = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2$. Ako taj zbroj zapišemo na drugačiji način i primijenimo nejednakost $ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$, dobivamo redom:

$$\begin{aligned} A &= x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) \\ &\leqslant \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2(x_3+x_4) + \frac{1}{4}(x_3+x_4)^2(x_1+x_2) \\ &= \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2)(x_3+x_4) \\ &\leqslant \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot\frac{1}{4}((x_1+x_2)+(x_3+x_4))^2 \\ &= \frac{1}{16}(x_1+x_2+x_3+x_4)^3 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su za svaku primjenu nejednakosti čimbenici jednaki:

$$x_1 = x_2, \qquad x_3 = x_4, \qquad x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$

odakle slijedi da su svi brojevi x_1, x_2, x_3 i x_4 jednaki $\frac{1}{4}$. Zato je maksimalna vrijednost broja A jednaka $\frac{1}{16}$ i postiže se samo u tom slučaju.

U b) dijelu zadatka imamo zbroj

$$A = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2,$$

koji ponovno možemo drugačije zapisati:

$$A = (x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6) - x_1x_3x_5 - x_2x_4x_6.$$

Zadnja dva člana su nenegativna, a za prvi član koristimo nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine. Dobivamo

$$A \leqslant \left(\frac{(x_1+x_4)+(x_2+x_5)+(x_3+x_6)}{3}\right)^3 - 0 = \frac{1}{27}.$$

Jednakost se postiže ako su tri zbroja $x_1 + x_4$, $x_2 + x_5$ i $x_3 + x_6$ jednaka $\dfrac{1}{3}$ i ako je bar jedan od brojeva x_1, x_3 i x_5 te bar jedan od brojeva x_2, x_4 i x_6 jednak nuli. To je uistinu i moguće postići, npr. za $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3}$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, pa je najveća vrijednost broja A jednaka $\dfrac{1}{27}$.

Provjerimo sve slučajeve jednakosti. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_1 = 0$. Tada iz jednakosti $x_1 + x_4 = \dfrac{1}{3}$ dobivamo da je broj x_4 jedinstveno određen i jednak $\dfrac{1}{3}$, pa stoga jedan od brojeva x_2 i x_6 mora biti jednak nuli. Zaključujemo da je nužno da su dva uzastopna broja u n-terokutu jednaka nuli. Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je $x_2 = 0$, pa onda slično dobivamo i $x_5 = \dfrac{1}{3}$. Konačno, iz posljednjeg uvjeta $x_3 + x_6 = \dfrac{1}{3}$ dobivamo da se jednakost postiže za šestorke $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ oblika

$$\left(0, 0, t, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - t\right), \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Budući da smo bez smanjenja općenitosti pretpostavili da je $x_1 = x_2 = 0$, zaključujemo da su sve šestorke brojeva za koje se postiže jednakost $A = \frac{1}{27}$ dane s cikličkim kombinacijama gore navedene šestorke.

Zadatak 2.

Tri prijateljice pronašle su N novčića ukupne mase 300 grama. Masa svakog novčića je prirodan broj. Odlučili su novčiće podijeliti na tri hrpe jednakih masa. Za koje N je to sigurno moguće napraviti, neovisno o masi pojedinih novčića?

Prvo rješenje.

Najmanji takav N iznosi 201.

Moguće je da mase svih novčića osim jednog iznose 1 gram, a preostali novčić ima masu $301 - N$ grama. Kada bi vrijedilo da $N \leqslant 200$, tada bi tom najvećem novčiću masa bila barem 101 gram, pa sigurno ne bi bilo moguće rasporediti novčiće na tri hrpe mase 100 grama.

Dokažimo da je u slučaju $N = 201$ novčića moguće rasporediti novčiće na tri hrpe jednake mase, neovisno o masama novčića. Neka su $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_{201}$ mase tih novčića u gramima.

Prvo zaključimo da među tim novčićima njih barem 101 ima masu od jednog grama. U suprotnom, kada bi masa njih $t \leqslant 100$ bila jedan gram, a njih $201 - t$ barem 2 grama, ukupna masa svih novčića iznosila bi barem $t \cdot 1 + (201 - t) \cdot 2 = 402 - t \geqslant 302$ grama, čime dobivamo kontradikciju. Dakle, vrijedi

$$a_{101} = a_{102} = \cdots = a_{201} = 1.$$

Postavimo 100 novčića mase jedan gram na prvu hrpu.

Za druge dvije hrpe, promotrimo sume

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

Svih 100 suma ima međusobno različite vrijednosti koje iznose barem 1, a najviše 199 (jer je suma preostalih masa novčića jednaka 101, kako je svaki novčić težine 1). Ako je jedna od njih jednaka 100, tada novčiće tih masa postavimo na drugu hrpu, a sve preostale na treću, te je konstrukcija gotova. Ako nijedna od navedenih suma nije jednaka 100, posebno nijedna suma nije djeljiva sa 100, pa po Dirichletovom principu postoje dvije koje daju isti ostatak pri dijeljenju sa 100. Promotrimo sumu nastalu oduzimanjem dviju takvih izraza. Ona je djeljiva sa 100, te je ponovno veća od nule i manja od 200, pa iznosi 100. Novčiće kojima su mase pribrojnici u toj sumi stavimo na drugu hrpu, a preostale na treću hrpu. Time je konstrukcija i u ovom slučaju gotova, a stoga i dokaz tvrdnje.

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju zaključujemo da je $N \geqslant 201$ te da u slučaju 201 novčića za njih barem 101 masa iznosi 1 gram. Mase novčića u gramima su $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \cdots \geqslant a_{201}$.

Primijenimo sljedeći algoritam: u prvom koraku tri novčića najveće mase rasporedimo na tri različite hrpe (što je moguće jer je svaki od njih težak najviše 100 grama). Nakon toga novčić najveće mase koji nismo do sada rasporedili stavljamo na proizvoljnu hrpu na kojoj njegovo postavljanje neće učiniti masu te hrpe većom od 100 grama. Dokažimo da taj algoritam uistinu i možemo provesti.

Prvo primijetimo da kada postavljamo i-ti po redu najveći novčić, za $i = 4, 5, 6 \ldots, 100$, na tri hrpe još se ne nalazi nijedan od zadnjih 101 novčića masa 1 gram, pa je zato ukupna masa tih triju hrpa najviše $300 - 101 = 199$ grama. Dakle, među njima postoji barem jedna kojoj je masa najviše $\left\lfloor \dfrac{199}{3} \right\rfloor = 66$, pa na nju u i-tom koraku možemo postaviti novčić koji je mase najviše 34 grama.

S druge strane, nijednom novčiću x postavljenom nakon prva tri novčića masa sigurno ne iznosi više od 34 grama. U suprotnom, kada bi takav postojao i kako su prva tri novčića veličine barem kao i x, ukupna masa svih novčića na raspolaganju bi bila barem $4 \cdot 35 + (201 - 4) \cdot 1 = 337 > 300$, čime dobivamo kontradikciju. Zaključujemo da novčiće masa $a_4, a_5, \ldots, a_{100}$ možemo postaviti na željeni način na neku od tri hrpe.

Nakon toga treba postaviti 101 novčić mase 1. Dokle god na sve tri hrpe nismo postavili sve novčiće, uvijek postoji barem jedna hrpa kojoj je ukupna masa novčića najviše 99, pa njoj možemo dodati još jedan novčić mase 1. Time je dokaz konstrukcije gotov.

Treće rješenje.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Dokažimo općenitu tvrdnju: u slučaju da je ukupna masa svih novčića $3k$, potebno nam je najmanje $N = 2k + 1$ novčića kako bismo bili sigurni da ih možemo rasporediti da tri hrpe mase k. Tvrdnja zadatka slijedi u slučaju $k = 100$.

Činjenicu da nam nije dovoljno manje od $2k + 1$ novčića dokazujemo kao i prije: ako je broj novčića $N \leqslant 2k$, moguće je da jednom od njih masa iznosi $3k + 1 - N > k$ grama, a ostalima po 1 gram.

Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Za bazu, u slučaju $k = 1$, kako imamo 3 novčića ukupne mase 3 grama, nužno je svaki mase 1 gram i svakog postavljamo na svoju hrpu.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$ i dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$: imamo na raspologanju skup novčića S u kojem je $2k + 3$ novčića ukupne mase $3(k + 1)$ koje treba rasporediti na tri hrpe jednake mase. Primijetimo da su nam na raspolaganju barem dva novčića mase 1 gram (jer u suprotnom bi ukupna masa svih bila barem $(2k+2) \cdot 2 + 1 = 4k + 5 > 3k + 3)$, te da postoji neki novčić kojemu je masa barem 2 grama (jer u suprotnom bi ukupna masa iznosila $2k + 3 < 3k + 3$).

Označimo s c neki novčić s masom većom od 1 grama. Promotrimo skup novčića S' dobiven iz S nakon sljedećih dviju transformacija:

- izbacimo dva novčića mase 1 gram (različita od c),
- izbacimo novčić c i umjesto njega ubacimo novčić c' kojem je masa za 1 gram manja.

Taj skup S' sadrži $2k + 1$ novčić nenegativne mase. Ukupna masa novčića u skupu je $3k$, pa ga po pretpostavci indukcije možemo rasporediti na tri hrpe od koje svakoj masa iznosi k.

Originalne novčiće iz S raspoređujemo na isti način kao novčiće iz S', uz dvije napomene:

- na hrpu na koji smo stavili novčić c' sada stavljamo originalan novčić c,
- dva novčića mase 1 gram koje nismo promatrali u skupu S' postavljamo na one dvije hrpe na kojima se ne nalazi novčić c.

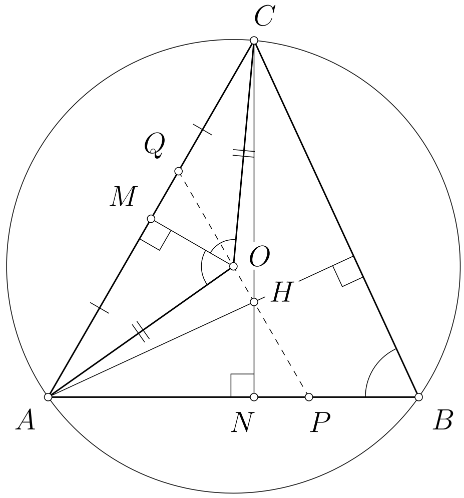
Svakoj hrpi masa sada iznosi $k + 1$, te je tvrdnja indukcije dokazana.

Zadatak 3.

U šiljastokutnom raznostraničnom trokutu ABC vrijedi da je $\sphericalangle CAB = 60°$. Neka je O središte tom trokutu opisane kružnice, a H njegov ortocentar. Pravac OH siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama P i Q. Dokaži da je trokut APQ jednakostraničan.

Prvo rješenje.

Označimo $\beta = \sphericalangle ABC$. Neka je M polovište dužine $\overline{AC}$, te N nožište visine iz C na stranicu $\overline{AB}$.



Prema teoremu o obodnom i središnjem kutu, $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ABC = 2\beta$. Trokut AOC je jednakokračan ($|OA| = |OC|$ su radijusi opisane kružnice), pa je $\sphericalangle CAO = 90° - \beta$.

Iz pravokutnog trokuta koji čine točke A, B i nožište visine iz A na stranicu $\overline{BC}$ dobivamo da je $\sphericalangle HAB = 90 - \beta$, dakle vrijedi

$$\sphericalangle MAO = \sphericalangle CAO = \sphericalangle HAB = \sphericalangle HAN.$$

Trokut ANC je pravokutan trokut s jednim kutom veličine $60°$, pa je stoga $|AN| = \frac{1}{2}|AC|$. Kako je M polovište stranice $\overline{AC}$, vrijedi i $|AM| = \frac{1}{2}|AC|$, odnosno vrijedi $|AM| = |AN|$.

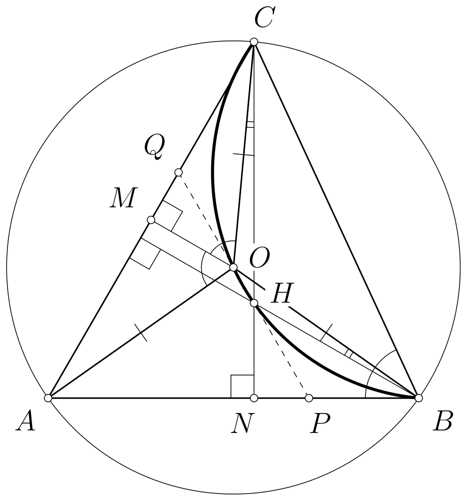
Trokuti OMA i HNA su pravokutni trokuti sa sukladnim kutovima te vrijedi $|AM| = |AN|$. Prema K–S–K poučku, ti trokuti su sukladni, pa vrijedi i $|AO| = |AH|$. Zaključujemo da je trokut AHO jednakokračan, pa su kutovi $\sphericalangle AHO$ i $\sphericalangle AOH$ sukladni, kao i njihovi odgovarajući vanjski kutovi. Konačno, vrijedi

$$\sphericalangle PQA = 180° - \sphericalangle AOQ - \sphericalangle OAQ = 180° - \sphericalangle AHP - \sphericalangle HAP = \sphericalangle QPA,$$

pa je trokut APQ jednakokračan. Budući da mu je jedan kut veličine $60°$, on je i jednakostraničan.

Drugo rješenje.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $|AB| < |AC|$. Označimo $\beta = \sphericalangle ABC$ te $\gamma = \sphericalangle BCA$. Posebno, vrijedi $\beta + \gamma = 120°$ i $\beta > 60° > \gamma$.



Trokut koji određuju točke A, C i nožište visine iz C na $\overline{AB}$ je pravokutan, pa zaključujemo da je $\sphericalangle HCA = 90° - \sphericalangle CAB = 30°$. Prema teoremu o obodnom i središnjem kutu, $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ABC = 2\beta$. Trokut AOC je jednakokračan ($|OA| = |OC|$ su radijusi opisane kružnice), pa je $\sphericalangle ACO = 90° - \beta$. Iz toga dobivamo da je

$$\sphericalangle HCO = \sphericalangle HCA - \sphericalangle ACO = \beta - 60°.$$

Slično, računanjem obodnog kuta $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BCA = 2\gamma$ i promatranjem jednakokračnog trokuta OBA, dobivamo $\sphericalangle OBA = 90° - \gamma$. Također, iz pravokutnog trokuta koji čine A, B i nožište visine iz vrha B, dobivamo da je $\sphericalangle HBA = 30°$. Zato je

$$\sphericalangle OBH = \sphericalangle OBA - \sphericalangle HBA = 60° - \gamma = 60° - (120° - \beta) = \beta - 60°.$$

Dobili smo da su kutovi $\sphericalangle HCO$ i $\sphericalangle OBH$ sukladni, pa je četverokut $COHB$ tetivan. Zato vrijedi $\sphericalangle COH + \sphericalangle HBC = 180°$, te

$$\sphericalangle COQ = 180° - \sphericalangle COH = \sphericalangle CBH.$$

Iz pravokutnog trokuta koji čine C, B i nožište visine iz B na $\overline{AC}$ zaključujemo da je $\sphericalangle CBH = 90° - \gamma$.

Konačno, kut $\sphericalangle PQA$ je vanjski u trokutu COQ, pa je

$$\sphericalangle PQA = \sphericalangle COQ + \sphericalangle OCQ = 90° - \gamma + 90° - \beta = 60°,$$

te je trokut APQ jednakostraničan.

Zadatak 4.

Označimo s $d(n)$ broj prirodnih djelitelja prirodnog broja n. Odredi sve $k \in \mathbb{N}$ za koje postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(a) = d(b) = d(2a + 3b) = k.$$

Rješenje.

Dokazat ćemo da su takvi brojevi k parni prirodni brojevi.

Za bilo koji paran broj $k = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), uzmimo $a = 2 \cdot 5^{m-1}$, $b = 3 \cdot 5^{m-1}$. Tada je $2a+3b = 13 \cdot 5^{m-1}$. Svi su ti brojevi oblika $p \cdot 5^{m-1}$, gdje je $p \neq 5$ prost, i imaju ukupno $2m = k$ djelitelja:

$$1,\ 5,\ 5^2,\ \ldots,\ 5^{m-1},\ p,\ p \cdot 5,\ p \cdot 5^2,\ \ldots,\ p \cdot 5^{m-1}.$$

Dakle, za svaki paran broj k postoji takav izbor brojeva a i b.

Neka je sada k neparan broj te pretpostavimo da postoje brojevi a i b za koje vrijede uvjeti zadatka. Kako brojevi a, b i $2a+3b$ imaju neparno mnogo djelitelja, nužno su kvadrati prirodnih brojeva. Neka su x, y i z prirodni brojevi takvi da je $x^2 = a$, $y^2 = b$ i $z^2 = 2a+3b$. Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$2x^2 + 3y^2 = z^2.$$

Dokažimo da ta jednadžba nema rješenja u skupu prirodnih brojeva. Pretpostavimo da postoji barem jedno rješenje (x, y, z), i među svim tim rješenjima uzmimo ono kojem z ima najmanju vrijednost.

Promatrajući ostatke pri dijeljenju s 3, vidimo da vrijedi $2x^2 \equiv z^2 \pmod 3$. Kako kvadrati daju ostatke 0 ili 1 pri dijeljenju s 3, jedina je mogućnost da su oba broja x i z djeljiva s 3. Dakle, imamo $x = 3x_1$ i $z = 3z_1$, za neke prirodne x_1 i z_1. Uvrštavanjem tih brojeva u jednadžbu i dijeljenjem s 3, dobivamo

$$6x_1^2 + y^2 = 3z_1^2.$$

Gledajući jednadžbu ponovno modulo 3, vidimo da je y djeljiv s 3, dakle postoji prirodan broj y_1 takav da je $y = 3y_1$. Uvrštavanjem i dijeljenjem s 3 imamo

$$2x_1^2 + 3y_1^2 = z_1^2.$$

Dobili smo da trojka prirodnih brojeva (x_1, y_1, z_1) također zadovoljava istu jednadžbu kao i (x, y, z). Kako je $z_1 = z/3 < z$, dobivamo kontradikciju s pretpostavkmo da je (x, y, z) rješenje jednadžbe s najmanjom vrijednosti broja z, što je kontradikcija. Dakle, jednadžba nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.