Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi test

29. svibnja 2020.

1. Odredi sve parove (a, b) realnih brojeva za koje vrijedi

$$a + \frac{a+8b}{a^2+b^2} = 2 \qquad \text{i} \qquad b + \frac{8a-b}{a^2+b^2} = 0.$$

2. Deset žetona složeno je ukrug. Svaki žeton je s jedne strane bijele, a s druge crne boje. Na početku su svi žetoni okrenuti na bijelu stranu. Dozvoljeni potezi su:

- preokrenuti bilo koja četiri uzastopna žetona,
- u nizu od bilo kojih pet uzastopnih žetona preokrenuti sve osim srednjeg žetona.

Može li se nekim nizom dozvoljenih poteza postići da

(a) točno jedan žeton bude okrenut na crnu stranu?

(b) točno dva žetona budu okrenuta na crnu stranu te da se između ta dva žetona nalazi točno jedan žeton?

(c) točno dva žetona budu okrenuta na crnu stranu te da su ta dva žetona uzastopna?

3. Kružnice k_1 i k_2 diraju se izvana u točki F. Pravac t dira kružnice k_1 i k_2 u točkama A i B, redom. Pravac p paralelan pravcu t dira kružnicu k_2 u točki C i siječe k_1 u točkama D i E.

(a) Dokaži da točke A, F i C leže na istom pravcu.

(b) Dokaži da je točka A središte opisane kružnice trokuta BDE.

4. (a) Neka je n prirodni broj. Dokaži da među bilo kojih $n+2$ različitih prirodnih brojeva možemo odabrati dva različita broja čija je razlika kvadrata djeljiva s $2n+1$.

(b) Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji $n+1$ različitih prirodnih brojeva među kojima ne postoje dva različita broja čija je razlika kvadrata djeljiva s $2n+1$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi test

20. lipnja 2020.

1. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x(xy-1) &= 2(yz-1), \\ y(yz-1) &= 2(zx-1), \\ z(zx-1) &= 2(xy-1). \end{aligned}$$

2. Za prirodni broj n promatramo tablicu $2020 \times n$ u čije je svako polje upisan jedan od brojeva 1 ili -1. Neka je a_j umnožak svih brojeva u j-tom retku, a b_i umnožak svih brojeva u i-tom stupcu. Odredi sve prirodne brojeve n za koje može vrijediti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} + b_1 + \cdots + b_n = 0.$$

3. Neka je ABC trokut s tupim kutem u vrhu C i k kružnica promjera $\overline{AB}$. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe kružnicu k u točki D $(D \neq A)$, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe tu kružnicu u točki E $(E \neq B)$. Kružnica upisana trokutu ABC dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u točkama F i G, redom. Dokaži da točke D, E, F i G leže na istom pravcu.

4. Postoje li prirodni brojevi m, n za koje je $3m^2 - n^2$ jednako

(a) 75 ?

(b) 100 ?

(c) 125 ?

(d) 150 ?

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.