

## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

### Prvi test

29. svibnja 2020.

1. Odredi sve parove  $(a, b)$  realnih brojeva za koje vrijedi

$$a + \frac{a + 8b}{a^2 + b^2} = 2 \quad \text{i} \quad b + \frac{8a - b}{a^2 + b^2} = 0.$$

2. Deset žetona složeno je ukруг. Svaki žeton je s jedne strane bijele, a s druge crne boje. Na početku su svi žetoni okrenuti na bijelu stranu. Dozvoljeni potezi su:

- preokrenuti bilo koja četiri uzastopna žetona,
- u nizu od bilo kojih pet uzastopnih žetona preokrenuti sve osim srednjeg žetona.

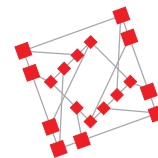
Može li se nekim nizom dozvoljenih poteza postići da

- (a) točno jedan žeton bude okrenut na crnu stranu?  
(b) točno dva žetona budu okrenuta na crnu stranu te da se između ta dva žetona nalazi točno jedan žeton?  
(c) točno dva žetona budu okrenuta na crnu stranu te da su ta dva žetona uzastopna?
3. Kružnice  $k_1$  i  $k_2$  diraju se izvana u točki  $F$ . Pravac  $t$  dira kružnice  $k_1$  i  $k_2$  u točkama  $A$  i  $B$ , redom. Pravac  $p$  paralelan pravcu  $t$  dira kružnicu  $k_2$  u točki  $C$  i siječe  $k_1$  u točkama  $D$  i  $E$ .
- (a) Dokaži da točke  $A$ ,  $F$  i  $C$  leže na istom pravcu.  
(b) Dokaži da je točka  $A$  središte opisane kružnice trokuta  $BDE$ .
4. (a) Neka je  $n$  prirodni broj. Dokaži da među bilo kojih  $n + 2$  različitih prirodnih brojeva možemo odabrati dva različita broja čija je razlika kvadrata djeljiva s  $2n + 1$ .  
(b) Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje postoji  $n + 1$  različitih prirodnih brojeva među kojima ne postoje dva različita broja čija je razlika kvadrata djeljiva s  $2n + 1$ .

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.



## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

### Drugi test

20. lipnja 2020.

1. Odredi sve trojke realnih brojeva  $(x, y, z)$  za koje vrijedi

$$x(xy - 1) = 2(yz - 1),$$

$$y(yz - 1) = 2(zx - 1),$$

$$z(zx - 1) = 2(xy - 1).$$

2. Za prirodni broj  $n$  promatramo tablicu  $2020 \times n$  u čije je svako polje upisan jedan od brojeva 1 ili  $-1$ . Neka je  $a_j$  umnožak svih brojeva u  $j$ -tom retku, a  $b_i$  umnožak svih brojeva u  $i$ -tom stupcu. Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje može vrijediti

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2020} + b_1 + \dots + b_n = 0.$$

3. Neka je  $ABC$  trokut s tupim kutem u vrhu  $C$  i  $k$  kružnica promjera  $\overline{AB}$ . Simetrala kuta  $\sphericalangle CAB$  siječe kružnicu  $k$  u točki  $D$  ( $D \neq A$ ), a simetrala kuta  $\sphericalangle ABC$  siječe tu kružnicu u točki  $E$  ( $E \neq B$ ). Kružnica upisana trokutu  $ABC$  dira stranice  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$  u točkama  $F$  i  $G$ , redom. Dokaži da točke  $D$ ,  $E$ ,  $F$  i  $G$  leže na istom pravcu.

4. Postoje li prirodni brojevi  $m$ ,  $n$  za koje je  $3m^2 - n^2$  jednako

(a) 75 ?

(b) 100 ?

(c) 125 ?

(d) 150 ?

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.