HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi test

29. svibnja 2020.

Zadatak 1.

Odredi sve parove (a, b) realnih brojeva za koje vrijedi

$$a + \frac{a+8b}{a^2+b^2} = 2 \qquad \text{i} \qquad b + \frac{8a-b}{a^2+b^2} = 0.$$

Rješenje.

Uočimo da a i b ne mogu istovremeno biti nula jer bi tada nazivnik $a^2 + b^2$ također bio nula.

Ako je $a = 0$, onda iz prve jednadžbe slijedi $b = 4$, a iz druge $b = 1$ ili $b = -1$, što nije moguće istovremeno. Analogno, ako je $b = 0$, onda u drugoj jednadžbi dobivamo $\frac{8a}{a^2} = 0$, što također nije moguće.

Množenjem prve jednadžbe sa b i druge sa a te zbrajanjem dobivamo

$$ab + \frac{ab+8b^2}{a^2+b^2} + ab + \frac{8a^2-ab}{a^2+b^2} = 2b,$$

odnosno $2ab + 8 = 2b$.

Množenjem prve jednadžbe sa a i druge sa b i oduzimanjem druge od prve dobivamo

$$a^2 + \frac{a^2+8ab}{a^2+b^2} - b^2 - \frac{8ab-b^2}{a^2+b^2} = 2a,$$

odnosno $b^2 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$. Razlikujemo dva slučaja.

U prvom slučaju, kad je $b = 1 - a$ uvrštavanjem u $2ab + 8 = 2b$ slijedi

$$2(1-b)b + 8 = 2b,$$

iz čega slijedi $b^2 = 4$. Dakle, u ovom slučaju je $b = 2$ i $a = -1$ ili $b = -2$ i $a = 3$.

U drugom slučaju kad je $b = a - 1$ na sličan način dobivamo $b^2 = -2$, što nema rješenja u realnim brojevima.

Konačno, sva rješenja su, $(a, b) \in \{(-1, 2), (3, -2)\}$.

Zadatak 2.

Deset žetona složeno je ukrug. Svaki žeton je s jedne strane bijele, a s druge crne boje. Na početku su svi žetoni okrenuti na bijelu stranu. Dozvoljeni potezi su:

- preokrenuti bilo koja četiri uzastopna žetona,
- u nizu od bilo kojih pet uzastopnih žetona preokrenuti sve osim srednjeg žetona.

Može li se nekim nizom dozvoljenih poteza postići da

(a) točno jedan žeton bude okrenut na crnu stranu?

(b) točno dva žetona budu okrenuta na crnu stranu te da se između ta dva žetona nalazi točno jedan žeton?

(c) točno dva žetona budu okrenuta na crnu stranu te da su ta dva žetona uzastopna?

Rješenje.

(a) Ako u nekom potezu preokrenemo k žetona s crne na bijelu stranu, onda ćemo preokrenuti $4-k$ žetona s bijele na crnu stranu, pa se broj žetona okrenutih na crnu stranu promijeni za $4-k-k=4-2k$, tj. za paran broj. Budući da na početku imamo nula žetona okrenutih na crnu stranu, uvijek ćemo imati paran broj takvih žetona, pa nije moguće postići da točno jedan žeton bude okrenut na crnu stranu.

(b) Označimo žetone redom brojevima od 1 do 10. Preokrenimo u prvom potezu žetone s oznakama $1,2,3,4$, a u drugom s oznakama $1,2,4,5$. Tada će žetoni s oznakama 3 i 5 biti preokrenuti na crnu stranu, a svi ostali na bijelu stranu.

(c) Uz oznake kao u (b) dijelu, nakon svakog poteza broj žetona označenih neparnim brojevima okrenutih na crnu stranu je paran. Stoga nije moguće postići da točno dva uzastopna žetona budu crna jer bi tada točno jedan žeton s neparnom oznakom bio okrenut na crnu stranu.

Zadatak 3.

Kružnice k_1 i k_2 diraju se izvana u točki F. Pravac t dira kružnice k_1 i k_2 u točkama A i B, redom. Pravac p paralelan pravcu t dira kružnicu k_2 u točki C i siječe k_1 u točkama D i E.

(a) Dokaži da točke A, F i C leže na istom pravcu.

(b) Dokaži da je točka A središte opisane kružnice trokuta BDE.

Prvo rješenje.

Uočimo da pravac p siječe kružnicu k_1 u dvije točke ako i samo ako je polumjer kružnice k_1 veći od polumjera kružnice k_2. Neka su O_1 i O_2 središta, a r_1 i r_2 polumjeri kružnica k_1 i k_2, redom.

Neka zajednička tangenta na obje kružnice kroz točku F siječe pravac AB u točki H. Trokuti AHO_1 i FHO_1 su sukladni pravokutni trokuti jer je $|AO_1|=|AO_2|$, $\sphericalangle O_1AH=90^\circ=\sphericalangle O_1FH$ i $\overline{O_1H}$ je zajednička hipotenuza. Slijedi da je $|AH|=|FH|$.

Na isti način dokazujemo $|BH|=|FH|$.

Budući da je $|AH| = |FH| = |BH|$, slijedi

$$\begin{aligned}180° &= \sphericalangle BAF + \sphericalangle ABF + \sphericalangle AFB = \sphericalangle BAF + \sphericalangle ABF + \sphericalangle AFH + \sphericalangle BFH \\ &= \sphericalangle BFH + \sphericalangle AFH + \sphericalangle AFH + \sphericalangle BFH = 2(\sphericalangle AFH + \sphericalangle BFH) = 2\sphericalangle AFB,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $\sphericalangle AFB = 90°$.

Budući da su t i p paralelne tangente, slijedi da su pravci O_2B i O_2C okomiti na njih te je dužina $\overline{BC}$ je promjer kružnice k_2. Prema Talesovom poučku je $\sphericalangle CFB = 90°$.

Sada slijedi da je $\sphericalangle AFC = \sphericalangle AFB + \sphericalangle BFC = 90° + 90° = 180°$, tj. da točke A, F i C leže na istom pravcu. Time je dokazana tvrdnja (a).

Simetrala dužine $\overline{DE}$ prolazi kroz točku O_1 i okomita je na p, pa je okomita i na pravac t i prolazi točkom A. Zato je $|AD| = |AE|$. Treba još pokazati da je $|AD| = |AB|$.

Neka je N nožište okomice iz točke O_2 na pravac AO_1. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut O_1O_2N dobivamo

$$|AB|^2 = |O_2N|^2 = |O_1O_2|^2 - |O_1N|^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2.$$

Neka je P polovište dužine $\overline{DE}$, a M polovište dužine $\overline{AD}$. Iz sličnosti pravokutnih trokuta APD i AMO_1 (zajednički kut u vrhu A) dobivamo

$$\frac{|AD|}{AO_1} = \frac{|AP|}{|AM|}$$

odakle, zbog $|AO_1| = r_1$, $|AP| = |BC| = 2r_2$ i $|AM| = \frac{1}{2}|AD|$ slijedi $|AD|^2 = 4r_1r_2$.

Dakle, vrijedi $|AB| = |AD|$, pa smo dokazali i tvrdnju (b).

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju uvedemo oznake i pokažemo da je $\sphericalangle AFB = 90°$ i $\sphericalangle BFC = 90°$, te zaključimo da vrijedi tvrdnja (a).

Pokažimo sada drugi način da se dokaže $|AD| = |AB|$.

Budući da je $\sphericalangle AFB = 90°$ i $\sphericalangle ABC = 90°$, slijedi da je $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC = 90° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBF$. Iz sličnosti pravokutnih trokuta ABF i ABC slijedi

$$|AB|^2 = |AF| \cdot |AC|.$$

Budući da je $\sphericalangle DCB = 90°$, zaključujemo da je i $\sphericalangle DCF = 90° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBF$.

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $2\sphericalangle ADF = \sphericalangle AO_1F$. S druge strane, vrijedi

$$\sphericalangle AO_1F = 180° - \sphericalangle O_1AF - \sphericalangle O_1FA = 180° - 2\sphericalangle O_1AF = 2 \cdot (90° - \sphericalangle O_1AF) = 2\sphericalangle BAF,$$

pa zaključujemo da je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BAF$.

Zbog $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BAF = \sphericalangle DCA$, prema K–K poučku, zaključujemo da su trokuti DAF i CAD slični. Iz te sličnosti slijedi

$$|AD|^2 = |AF| \cdot |AC|.$$

Ovime smo pokazali da je $|AB|^2 = |AD|^2$, tj. $|AB| = |AD|$, pa je time i tvrdnja (b) dokazana.

Zadatak 4.

(a) Neka je n prirodni broj. Dokaži da među bilo kojih $n+2$ različitih prirodnih brojeva možemo odabrati dva različita broja čija je razlika kvadrata djeljiva s $2n+1$.

(b) Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji $n+1$ različitih prirodnih brojeva među kojima ne postoje dva različita broja čija je razlika kvadrata djeljiva s $2n+1$.

Rješenje.

(a) Za dani prirodni broj n, svi ostaci pri dijeljenju sa $2n+1$ daju neki od $2n+1$ ostataka 0, 1, ..., $2n+1$. Te ostatke ćemo podijeli u $n+1$ grupa:

$$A_0 = \{0\},\ A_1 = \{1, 2n\},\ A_2 = \{2, 2n-1\}, \dots, A_n = \{n, n+1\}.$$

U grupama koje imaju dva elementa, zbroj elemenata je $2n+1$. Ako neka dva broja a i b daju ostatke koji pripadaju istoj grupi, onda $2n+1$ dijeli $a-b$ ili $a+b$, pa dijeli i $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Budući da imamo $n+1$ grupa, po Dirichletovom principu slijedi da među bilo kojih $n+2$ različitih prirodnih brojeva možemo odabrati dva različita broja koja pripadaju istoj grupi. Za takva dva broja smo pokazali da im je razlika kvadrata djeljiva s $2n+1$.

(b) Ako je $2n+1$ prost broj, onda razlika kvadrata nikoja dva broja skupa

$$S = \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n, 3n+1\}$$

nije djeljiva sa $2n+1$. Zaista, ako pretpostavimo da $2n+1$ dijeli a^2-b^2, onda $2n+1$ (zato što je prost) mora dijeliti $a-b$ ili $a+b$. No, ako su a i b neka dva različita broja iz skupa S, onda vrijedi

$$-n \leqslant a-b \leqslant n,\ a-b \neq 0, \qquad 4n+3 \leqslant a+b \leqslant 6n+1,$$

odakle je jasno da ni $a-b$ ni $a+b$ nisu višekratnici od $2n+1$.

Pretpostavimo da postoji neki složeni broj $2n+1$ i $n+1$ brojeva

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

takvih da među njima ne postoje dva čija je razlika kvadrata djeljiva sa $2n+1$. Koristeći oznake i način zaključivanja iz (a) dijela zadatka, zaključujemo da ti brojevi moraju davati ostatke koji pripadaju različitim grupa, te bez smanjenja općenitosti možemo poredati brojeve tako da broj a_k daje ostatak iz grupe A_k za $k = 0, 1, \dots, n$.

Ako je $2n+1 = cd$ za neke neparne relativno proste brojeve c i d, onda su $\frac{c-d}{2}$ i $\frac{c+d}{2}$ prirodni brojevi. Stavimo li

$$a = a_{\frac{c-d}{2}}, \qquad b = a_{\frac{c+d}{2}},$$

onda će jedan od brojeva $a-b$ i $a+b$ biti djeljiv sa c, a drugi sa d, pa će $2n+1 = cd$ dijeliti a^2-b^2, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Slično, ako je $2n+1 = p^m$ za neki prost broj p i prirodni broj $m \geqslant 2$, onda možemo uzeti

$$a = a_0, \qquad b = a_{p^{m-1}},$$

te ćemo dobiti da p^{m-1} dijeli i $a-b$ i $a+b$, pa $2n+1 = p^m$ dijeli a^2-b^2.

Dakle, traženo svojstvo imaju oni prirodni brojevi n za koje je $2n+1$ prost broj.

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi test

20. lipnja 2020.

Zadatak 1.

Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x(xy-1) &= 2(yz-1), \\ y(yz-1) &= 2(zx-1), \\ z(zx-1) &= 2(xy-1). \end{aligned}$$

Rješenje.

Pomnožimo sve tri dane jednakosti i vidimo da je

$$xyz(xy-1)(zy-1)(zx-1) = 8(xy-1)(yz-1)(zx-1).$$

Ako je $xy - 1 = 0$, onda iz prve jednakost zaključujemo da je $yz - 1 = 0$, a zatim iz druge i da je $zx - 1 = 0$. Slično zaključujemo ako je $yz - 1 = 0$ ili ako je $zx - 1 = 0$. Dakle, ako je jedan od brojeva $xy - 1$, $yz - 1$, $zx - 1$ jednak 0, onda su sva tri.

Ako je $xy = 1$, $yz = 1$ i $zx = 1$, množenjem te tri jednakosti zaključujemo da je $x^2y^2z^2 = 1$, a kako je $x^2y^2 = 1$, zaključujemo da je $z^2 = 1$ te slično i da je $x^2 = 1$ te $y^2 = 1$.

Ako je $z = 1$, onda iz zadnje jednakost slijedi da je $x = 1$, a iz druge da je $y = 1$. Slično, ako je $z = -1$, onda je i $x = y = -1$.

Pretpostavimo sada da je $(xy-1)(yz-1)(zx-1) \neq 0$. Tada vidimo da je $xyz = 8$.

Pomnožimo prvu jednakost s x i vidimo da je $x^3y - x^2 = 2(xyz - x)$, odnosno

$$x^3y = 15 + (x-1)^2 \geqslant 15.$$

Zaključujemo da je $x^3y \geqslant 15$, iz čega zaključujemo da je $xy > 0$, a kako je $xyz = 8$, zaključujemo da je $z > 0$. Na isti način zaključujemo da je $x > 0$ i $y > 0$.

Ako pretpostavimo da je $xy < 1$, onda iz prve jednakosti vidimo da je i $yz < 1$, a zatim iz druge i da je $zx < 1$. Međutim, to je nemoguće jer je tada $64 = x^2y^2z^2 < 1$. Dakle, vrijedi da je $xy - 1 > 0$, $yz - 1 > 0$ i $zx - 1 > 0$.

Pretpostavimo da je $x > 2$, tada je

$$2yz - 2 = 2(yz-1) = x(xy-1) > 2(2y-1) = 4y - 2,$$

što znači da je i $z > 2$. No, tada iz druge jednakost na isti način zaključimo i da je $y > 2$. To je nemoguće jer bi vrijedilo $8 = xyz > 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Dakle, nužno je $x \leqslant 2$, $y \leqslant 2$ i $z \leqslant 2$, a kako je $xyz = 8$, zaključujemo da je jedina mogućnost da je $x = y = z = 2$. Time smo pokazali da sustav ima točno tri rješenja: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ i $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Zadatak 2.

Za prirodni broj n promatramo tablicu $2020 \times n$ u čije je svako polje upisan jedan od brojeva 1 ili -1. Neka je a_j umnožak svih brojeva u j-tom retku, a b_i umnožak svih brojeva u i-tom stupcu. Odredi sve prirodne brojeve n za koje može vrijediti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} + b_1 + \cdots + b_n = 0.$$

Rješenje.

Zbroj $2020 + n$ brojeva jednak je 0, svaki od tih brojeva je 1 ili -1. To znači da je tih brojeva parno mnogo, iz čega zaključujemo da je broj $2020 + n$ paran, odnosno zaključujemo da broj n mora biti paran.

Primijetimo da su brojevi $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2020}$ i $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$ jednaki. Oba ta broja su jednaka umnošku svih brojeva upisanih u tablicu. Dakle, broj pojavljivanja broja -1 među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ iste je parnosti kao broj pojavljivanja broja -1 među brojevima $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Zaključujemo da je ukupan broj brojeva -1 paran, a kako je taj broj jednak $1010 + \frac{n}{2}$ zaključujemo da je broj $\frac{n}{2}$ paran, tj. broj n je nužno djeljiv s 4.

Tvrdimo da za svaki prirodan broj n koji je djeljiv s 4 može vrijediti tražena jednakost. Preostaje navesti primjer za 2020 redaka i n stupaca.

Neka je $n = 4k$, znamo da među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}, b_1, b_2, \ldots, b_n$ mora biti $1010 + 2k$ brojeva jednakih -1.

U prvom stupcu tablice neka su brojevi u retcima $2, 3, \ldots, 1011$ jednaki -1. Nadalje, u prvom retku tablice neka su brojevi u stupcima $2, 3, \ldots, 2k+1$ jednaki -1. Svi ostali brojevi u tablici neka su jednaki 1.

Vidimo da je $a_1 = a_{1012} = \cdots = a_{2020} = 1$ i $a_2 = a_3 = \cdots = a_{1011} = -1$. Također je i $b_1 = b_{2k+2} = \cdots = b_{4k} = 1$ te $b_2 = b_3 = \cdots b_{2k+1} = -1$. Dakle, vrijedi da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0.$$

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut s tupim kutem u vrhu C i k kružnica promjera $\overline{AB}$. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe kružnicu k u točki D ($D \neq A$), a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe tu kružnicu u točki E ($E \neq B$). Kružnica upisana trokutu ABC dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u točkama F i G, redom. Dokaži da točke D, E, F i G leže na istom pravcu.

Rješenje.

Sjecište pravaca AD i BE je središte upisane kružnice trokuta ABC. Označimo tu točku sa I.

Kutovi $\sphericalangle AEI = AEB$ i $\sphericalangle AGI$ su pravi. Zato je četverokut $AIGE$ tetivan. Slijedi da je

$$\sphericalangle BEG = \sphericalangle IEG = \sphericalangle IAG = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BED,$$

što povlači da su točke E, G i D na istom pravcu.

Analogno pokazujemo da su točke E, F i D na istom pravcu.

Dakle, točke G i F leže na pravcu ED.

Zadatak 4.

Postoje li prirodni brojevi m, n za koje je $3m^2 - n^2$ jednako

(a) 75 ?

(b) 100 ?

(c) 125 ?

(d) 150 ?

Rješenje.

(a) Da. Stavimo npr. da je $m = 10$ i $n = 15$.

Napomena. Dovoljno je samo navesti jedan primjer, ali ako želimo do primjera doći sustavno možemo uočiti da su brojevi 75 i $3m^2$ djeljivi s 3, pa i n^2 mora biti djeljiv s 3. Dakle, postoji prirodni broj k takav da je $n = 3k$.

Uvrštavanjem i dijeljenjem sa 3 dobivamo $m^2 - 3k^2 = 25$, odnosno $m^2 - 25 = 3k^2$. Rastavljanjem koristeći razliku kvadrata dobivamo $(m-5)(m+5) = 3k^2$. Jedan traženi par sada možemo potražiti kao rješenje sustav $m-5 = k$ i $m+5 = 3k$, tj. $m+5 = 3(m-5)$. Odakle slijedi $m = 10$ i $k = 5$, pa je $n = 15$.

(b) Ne. Prirodan broj k pri dijeljenju s 3 može dati ostatak 0, 1 ili 2. Dakle, broj k^2, gdje je k prirodan broj pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1. To znači da broj $3m^2 - n^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili -1, tj. 2. Međutim, broj 100 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, stoga ne postoje prirodni brojevi m i n za koje je $3m^2 - n^2 = 100$.

(c) Ne. Prirodan broj k pri dijeljenju s 4 može dati ostatak 0, 1, 2 ili 3. Dakle, broj k^2, gdje je k prirodan broj pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1. Zaključujemo da broj $3m^2 - n^2$ pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0, 2 ili 3. Međutim, broj 125 pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1, zato je i ovdje odgovor ne.

Drugi način. Prirodan broj k pri dijeljenju s 5 može dati ostatak 0, 1, 2, 3 ili 4. Dakle, broj k^2, gdje je k prirodan broj pri dijeljenju s 5 daje ostatak 0, 1 ili 4, a $3k^2$ daje ostatak 0, 2 ili 3. Zaključujemo da broj $3m^2 - n^2$ pri dijeljenju s 5 može dati broj djeljiv s 5 ako i samo ako su $3m^2$ i n^2 djeljivi s 5. Dakle, m i n su djeljivi s 5, pa postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $m = 5a$ i $n = 5b$. Uvrštavanjem i dijeljenjem s 25 dobivamo $3a^2 - b^2 = 5$. Sada na isti način zaključujemo da su a i b djeljivi s 5, pa je lijeva strana djeljiva s 25, dok desna strana nije. Dakle, ne mogu postojati takvi prirodni brojevi n i m.

(d) Ne. Broj 150 je, kao i broj $3m^2$, djeljiv s 3. To znači da je i broj n^2 djeljiv s 3. Neka je $n = 3k$, tada mora vrijediti $m^2 - 3k^2 = 50$. Kao i u (b) vidimo da broj $m^2 - 3k^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1, dok broj 50 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. Dakle, opet je odgovor negativan.