Državno 2020
Bodovne sheme – 1. razred

1.1.

Uočavanje nužnosti gledanja vrijednosti funkcije po intervalima	1 bod
Analiza funkcije po intervalima	po 2 boda za svaki slučaj
Zaključak o minimalnoj vrijednosti funkcije na čitavoj domeni	1 bod

Ukoliko nema diskusije o padu i rastu funkcije na pojedinom intervalu ili analize moguće vrijednosti funkcija u ovisnosti o argumentu *x* natjecatelju su oduzeti bodovi (prema intervalima).

1.2.

RJ1

Opservacija n^2+n+10 treba biti potpun kvadrat	2 boda
Ugniježđenje n^2< n^2+n+10<(n+4)^2	4 boda
Rješavanje slučajeva n^2+n+10=(n+k)^2, k=1,2,3	po 1 bod
Rješenja su (2,3) i (9,9)	1 bod

RJ2

Dopuna do izraza (2n+1)^+39=(2k+2)^2	5 bodova
pa svođenje na razliku kvadrata (2k-2n+1)(2k+2n+3)=39, odnosno na izraz b(b+2a)=39	1 bod
Objašnjenje da su samo slučajevi b=1, b=3 dobri	1 bod
Rješavanje slučajeva b=1, b=3	po 1 bod
Rješenja su (2,3) i (9,9)	1 bod

1.3.

Analiza i određivanje mjera kutova trokuta *CHB*	2 boda
Kutovi $\measuredangle ICB$ i $\measuredangle IBC$	1 bod
Kut $\measuredangle BIC$	1 bod
Zaključak da je četverokut CHIB tetivni	1 bod
Kut $\measuredangle IHB$	1 bod
Analiza i određivanje mjera kutova trokuta *ABH*	2 boda
Veza mjera $\measuredangle AHI$ i $\measuredangle ABC$	2 boda

Određivanje mjere nekog od kutova tih trokuta (suma kutova u trokutu, simetrala kuta …) bez nekog povezivanja i zaključka nosi najviše 1 bod.

1.4.

Pogođena rješenja	2 boda
Ideja da se prva jed. pomnoži s a_1 pa da se oduzima	1 bod
a_k(a_k – a_1) = 0 –> a_k = 0 za sve k ili a_k = a_1 za sve k,	
ako je sve ostalo točno (upao u „zamku“)	7 bodova
našao dobra rješenja, ali zapisao da može biti bilo koja komb	8 bodova

1.5.

Pokazati da nije moguće samo s jednom bojom	1 bod
Odgovor da je moguće u dvije boje	1 bod
Dokaz zašto su dvije boje odgovor	8 bodova

Državno 2020
Bodovne sheme – 2. razred

2.1.

RJ1

Opservacija n^2+n+10 treba biti potpun kvadrat	2 boda
Ugniježđenje n^2< n^2+n+10<(n+4)^2	4 boda
Rješavanje slučajeva n^2+n+10=(n+k)^2, k=1,2,3	po 1 bod
Rješenja su (2,3) i (9,9)	1 bod

RJ2

Dopuna do izraza (2n+1)^+39=(2k+2)^2	5 bodova
pa svođenje na razliku kvadrata (2k-2n+1)(2k+2n+3)=39,	
odnosno na izraz b(b+2a)=39	1 bod
Objašnjenje da su samo slučajevi b=1, b=3 dobri	1 bod
Rješavanje slučajeva b=1, b=3	po 1 bod
Rješenja su (2,3) i (9,9)	1 bod

2.2.

Za samo napisane Vieteove formule u koje su uvršteni koeficijenti zadane jednadžbe 1bod
Zapisano a^2+b^2 preko x_1 i x_2 bez rastavljanja na faktore 4 boda
Rastavljeno na faktore i zaključak da je složen broj 5 bodova

Ako učenik nije krenuo od Vieteovih formula nego pokušajem dokaza preko kontradikcije, dobije po jedan bod za dobar zaključak kod pojedinog slučaja.

2.3.

Tipično rješenje malo je jednostavnije od službenog jer nema uvođenja dodatne točke K.

<DBF = <DAF pa je <EBG = <EAG (koristimo tetivnost i simetralu kuta)	2 boda
zato je ABEG tetivan	1 bod
<BAD = <BFD = <BGH (koristimo tetivnost, onu zadanu, i paralelnost)	2 boda
<BAE = <BGE (koristimo dokazanu tetivnost)	1 bod
pa je <DAE = <HGE ("razlika")	2 boda
Dakle, <HGE = <HBG,	
pa je po obratu teorema o TT, pravac GE tangenta.	2 boda

Tvrdnja "trebamo dokazati <HGE = <HBG" nosi 1 bod. Taj bod se pribraja sitnim bodovima na početku rješavanja. Tvrdnja "trebamo dokazati da je <SGE = 90" ne nosi bodove.

Bilo koja jednakost obodnih kutova na kružnici ABDF nosi 1 bod. Taj bod se ne pribraja drugim bodovima iz gornjeg rješenja. Ako netko napiše jednakost kutova koja direktno slijedi iz paralelnosti, ne dobiva bod za to.

2.4.

Pogođena rješenja 2 boda
Ideja da se prva jed. pomnoži s a_1 pa da se oduzima 1 bod
a_k(a_k – a_1) = 0 –> a_k = 0 za sve k ili a_k = a_1 za sve k,
ako je sve ostalo točno (upao u „zamku“) 7 bodova
našao dobra rješenja, ali zapisao da može biti bilo koja komb 8 bodova

2.5.

Pokazati da nije moguće samo s dvije boje 3 boda
Dokaz zašto su tri boje odgovor 7 bodova

- Od kojih se za pokušaj krivog bojanja ili pokušaja dokaza za neki veći broj broja daje 1 bod

Državno 2020
Bodovne sheme – 3. razred

3.1.

Analiza/strategija rastava na slučajeve (npr. kao u službenom rješenju,
ili dokaz da najmanja varijabla mora biti manja od 3) 4 boda
Rješavanje slučaja u kojem se dobije rješenje (2,2,2,2) 2 boda
Rješavanje slučaja u kojem se dobiju ostala rješenja 4 boda

Ostale napomene:
Ako se bez odgovarajućeg dokaza nađe rješenje (2,2,2,2): 1 bod. Nalazak jednog rješenja oblika (1,5,2,3) ili bilo koje njegove permutacije vrijedi 1 bod. Pronalazak svih ostalih odgovarajućih permutacija rješenja (1,5,2,3) još 1 bod. Ako se tvrdi da je neka „netočna“ četvorka rješenje, oduzima se 1 bod.

3.2.

Prvo rješenje
1) 4 broja x_1, x_2, x_3 i x_4 iz intervala (0,1) možemo zapisati kao $x_i=\sin(a_i)$ za neke brojeve a_i iz intervala (0, π/2). 2 boda
2) Dokaz da je $x_i\sqrt{1-x_j^2}-x_j\sqrt{1-x_i^2}=\sin(a_i-a_j)$. 4 boda
3) Dijeljenje intervala (0, π/2) na 3 podintervala: (0, π/6], (π/6, 2π/6], (2π/6, π/2) i dokaz da možemo izabrati 2 broja $a_i > a_j$ koji se nalaze unutar istog podintervala. 3 boda
4) Dokaz da za izabrane a_i i a_j iz 3) vrijedi $0<\sin(a_i-a_j)<1/2$, tj. vrijedi tvrdnja zadatka. 1 bod

Drugo rješenje
Neka su x_1, x_2, x_3 i x_4 4 različita broja iz intervala (0,1).
1) Dijeljenje intervala (0,1) na 3 podintervala: (0, 1/2], (1/2, √3/2], (√3/2, 1) i dokaz da možemo izabrati 2 broja $x_i > x_j$ koji se nalaze unutar istog podintervala 3 boda
2) Dokaz da izabrane x_i i x_j iz 1) vrijedi tvrdnja zadatka, tj. 7 bodova
$$0<x_i\sqrt{1-x_j^2}-x_j\sqrt{1-x_i^2}<\frac{1}{2}.$$

Napomena:
1) Tvrdnja i dokaz da iz x>y slijedi $x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}>0$. 1 bod
2) Dijeljenje intervala (0,1) na podintervale: (0, 1/3], (1/3, 2/3], (2/3, 1) i dokaz da možemo izabrati 2 broja $x_i > x_j$ koji se nalaze unutar istog podintervala. 2 boda
3) Dokaz da možemo izabrati 2 broja x_i i x_j za koje vrijedi $x_i - x_j<1/3$. 1 bod

Budući da 3) očito slijedi iz 2), bodovi za 2) i 3) se ne mogu zbrajati!

3.3.

Uočavanje da je AL simetrala kuta BAC	1 bod
Računanje kutova pri točki L	2 boda
Korištenje poučka o sinusima na dva trokuta koji imaju stranicu CL	3 boda
Primjena poučka o sinusima na trokut ABC	2 boda
Povezivanje svih tvrdnji i dovršavanje dokaza	2 boda

3.4.

Osim službenog rješenja postoji i rješenje u kojem se promatra što se događa ako jednoj po jednoj točki mijenjamo boju iz plavu ili zelene u crvenu. Ta rješenja se mogu zapisati u terminima indukcije, algoritamski ili kao invarijanta, ali bez obzir na pristup suština takvog pristupa je **pažljivo analizirati i opisati sve moguće slučajeve.**
Sama ideja promatranja što se događa kad jednoj točki promijenimo boju nosi 1 bod,
a naznaka strategije (npr. indukcija, opis da će algoritam ići po redovima, zapis koliko slučajeva ima itd.) nosi 2 boda.
Učenici koji su sustavno ispisali sve slučajeve (uz precizno korištenje simetrije da smanje broj slučajeva) su dobili 10 bodova. Tako su bodovana i druga potpuna rješenja.

U jednom učeničkom rješenju se pojavila ideja dvostrukog prebrojavanja te je učinjeno nekoliko koraka ka povezivanju broja posebnih kvadrata i jednobojnih dužina, kao u službenom rješenju, ali dokaz nije dovršen i to nosi 6 bodova.

3.5.

Dokaz da je n djeljiv s 4	2 boda
Faktorizacija oblika (3^a-1)(3^a+1)(3^(2a)-1) = 5k^2	1 bod
Promatranje mjera faktora na lijevoj strani	1 bod
Analiza koja opisuje strategiju rastava na slučajeve (promatranje djeljivosti zagrada s 4 i 5)	2 boda
Rješavanje slučaja kad je a paran	2 boda
Rješavanje slučaja kad je a neparan	2 boda

Ostale napomene:
Ako nije dokazano da je n djeljiv s 4, ali jest da je djeljiv s 2, daje se 1 bod. Ako je pronađeno rješenje (4,4), te učenik/učenica nije ostvario/ostvarila nijedan bod na temelju preostalog bodovanja, dobiva 1 bod.

Državno 2020
Bodovne sheme – 4. razred

4.1.

Potpuno točno rješenje	10 bodova
Ako nije učinjena provjera da rješenja nisu u nazivniku početne jednadžbe	-1 bod
Ako indukcija nije provedena formalno, već se zaključuje po analogiji	-2 boda
Zaključak $z^{2^n} = 1 \implies z = 1$.	- 3 boda
Identitet $(1 - z + z^2)(1 + z + z^2) = 1 + z^2 + z^4$.	2 boda

4.2.

Potpuno točno rješenje	10 bodova
Ako nije učinjena provjera da f(x)=x zaista zadovoljava jednadžbu	-1 bod
Računske greške koje dovode do pogrešnog rješenja	- 3 boda

(postoji mogućnost provjere koja nije iskorištena, pa se ne radi samo o računskoj pogrešci)

4.3.

Tipično rješenje malo je jednostavnije od službenog jer nema uvođenja dodatne točke K.

<DBF = <DAF pa je <EBG = <EAG (koristimo tetivnost i simetralu kuta)	2 boda
zato je ABEG tetivan	1 bod
<BAD = <BFD = <BGH (koristimo tetivnost, onu zadanu, i paralelnost)	2 boda
<BAE = <BGE (koristimo dokazanu tetivnost)	1 bod
pa je <DAE = <HGE ("razlika")	2 boda
Dakle, <HGE = <HBG,	
pa je po obratu teorema o TT, pravac GE tangenta.	2 boda

Tvrdnja "trebamo dokazati <HGE = <HBG" nosi 1 bod. Taj bod se pribraja sitnim bodovima na početku rješavanja. Tvrdnja "trebamo dokazati da je <SGE = 90" ne nosi bodove.

Bilo koja jednakost obodnih kutova na kružnici ABDF nosi 1 bod. Taj bod se ne pribraja drugim bodovima iz gornjeg rješenja. Ako netko napiše jednakost kutova koja direktno slijedi iz paralelnosti, ne dobiva bod za to.

4.4.

Osim službenog rješenja postoji i rješenje u kojem se promatra što se događa ako jednoj po jednoj točki mijenjamo boju iz plavu ili zelene u crvenu. Ta rješenja se mogu zapisati u terminima indukcije, algoritamski ili kao invarijanta, ali bez obzir na pristup suština takvog pristupa je **pažljivo analizirati i opisati sve moguće slučajeve.**
Sama ideja promatranja što se događa kad jednoj točki promijenimo boju nosi 1 bod,
a naznaka strategije (npr. indukcija, opis da će algoritam ići po redovima, zapis koliko slučajeva ima itd.) nosi 2 boda.
Učenici koji su sustavno ispisali sve slučajeve (uz precizno korištenje simetrije da smanje broj slučajeva) su dobili 10 bodova. Tako su bodovana i druga potpuna rješenja.

4.5.

Dokaz da je n djeljiv s 4	2 boda
Faktorizacija oblika (3^a-1)(3^a+1)(3^(2a)-1) = 5k^2	1 bod
Promatranje mjera faktora na lijevoj strani	1 bod
Analiza koja opisuje strategiju rastava na slučajeve (promatranje djeljivosti zagrada s 4 i 5)	2 boda
Rješavanje slučaja kad je a paran	2 boda
Rješavanje slučaja kad je a neparan	2 boda

Ostale napomene:
Ako nije dokazano da je n djeljiv s 4, ali jest da je djeljiv s 2, daje se 1 bod. Ako je pronađeno rješenje (4,4), te učenik/učenica nije ostvario/ostvarila nijedan bod na temelju preostalog bodovanja, dobiva 1 bod.