DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ broj učenika koji su planirali ići na izlet, a $x > 0$ cijena izleta po učeniku (u kunama). Tada je

$n \cdot x = 2880$

$x = \dfrac{2880}{n}.$

Nakon odustajanja, broj učenika koji idu na izlet je $n-3$, a cijena izleta po učeniku je $x+4$. Sada je

$(n-3)\cdot(x+4) = 2880$

$(n-3)\cdot\left(\dfrac{2880}{n}+4\right) = 2880$

$2880 + 4n - \dfrac{3\cdot 2880}{n} - 12 = 2880$

$4n - \dfrac{3\cdot 2880}{n} - 12 = 0 \,/\cdot n$

$4n^2 - 3\cdot 2880 - 12n = 0 /: \ 4$

$n^2 - 3n - 2160 = 0$

$n^2 - 48n + 45n - 2160 = 0$

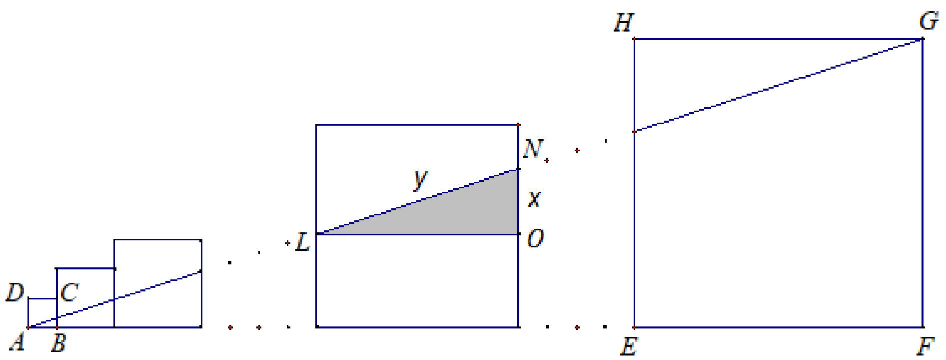
$n(n-48) + 45(n-48) = 0$

$(n-48)(n+45) = 0.$

Kako je $n \in \mathbb{N}$, jednadžba ima samo jedno rješenje, $n = 48$.

Na izlet je trebalo ići 48 učenika. (Odnosno, na izlet ih je otišlo 45).

2. Prvi način:



Kako je ukupan broj kvadrata $2n+1$, srednji kvadrat je $(n+1)$-vi po redu, pa se pravokutni trokut $\triangle LON$ nalazi u $(n+1)$-vom kvadratu. Kako je kvadrat $(n+1)$-vi u nizu, $|LO| = n+1$. Vrijedi i

$|FG| = 2n+1.$

Označimo duljine dužina $\overline{ON}$ i $\overline{LN}$ redom s x i y te izračunamo njihove duljine.

$\triangle LON \sim \triangle AFG$ prema poučku K-K jer su oba pravokutna i $\angle OLN \cong \angle FAG$ jer su to šiljasti kutovi uz presječnicu.

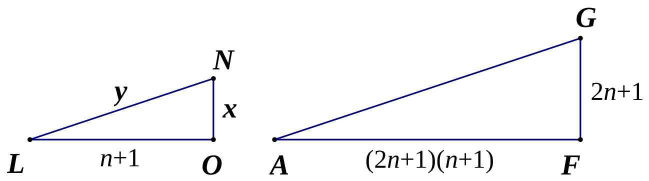
Iz sličnosti slijedi $\dfrac{x}{n+1} = \dfrac{(2n+1)}{|AF|}$.

Kako je $|AF| = 1+2+\ldots+2n+1 = \dfrac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{2} = (2n+1)\cdot(n+1)$, dobijemo:

$$\frac{x}{n+1} = \frac{(2n+1)}{(2n+1)\cdot(n+1)}$$

$$\frac{x}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$x = 1.$$



Kako je trokut $\triangle LON$ pravokutan, vrijedi:

$$y^2 = (n+1)^2 + x^2$$

$$y^2 = (n+1)^2 + 1^2$$

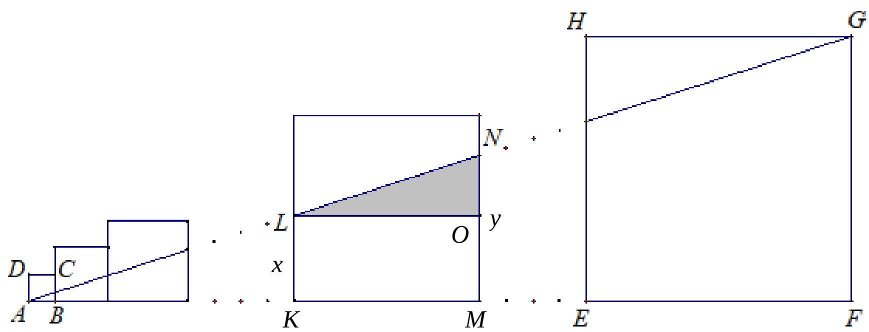
$$y^2 = n^2 + 2n + 1 + 1$$

$$y^2 = n^2 + 2n + 2,\ y > 0$$

$$y = \sqrt{n^2 + 2n + 2}.$$

Konačno, opseg pravokutnog trokuta $\triangle LON$ je $o = n + 2 + \sqrt{n^2 + 2n + 2}$, a njegova je površina $P = \dfrac{(n+1)\cdot 1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.

Drugi način:



Kako je ukupan broj kvadrata $2n+1$, srednji kvadrat je $(n+1)$-vi po redu, pa se pravokutni trokut $\triangle LON$ nalazi u $(n+1)$-vom kvadratu. Odredimo duljine stranica tog trokuta. Kako je kvadrat $(n+1)$-vi u nizu, $|LO| = n+1$.

Označimo duljine dužina $\overline{KL}$ i $\overline{MN}$ redom s x i y te izračunamo njihove duljine.

$\triangle AKL \sim \triangle AFG$ prema poučku K-K jer su oba pravokutna, a kut pri vrhu A im je zajednički.

Iz sličnosti slijedi $|AK|:x=|AF|:|FG|$.

Odredimo duljine dužina $\overline{AK}$ i $\overline{AF}$:

$$|AK|=1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$|AF|=1+2+...+2n+1=\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{2}=(2n+1)\cdot(n+1).$$

Kako je $|FG|=2n+1$, imamo:

$$x=\frac{|AK|\cdot|FG|}{|AF|}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{2\cdot(2n+1)\cdot(n+1)}=\frac{n}{2}.$$

$\triangle AMN\sim\triangle AFG$ prema poučku K-K jer su oba pravokutna, a kut pri vrhu A im je zajednički.

Iz sličnosti slijedi $|AM|:y=|AF|:|FG|$.

Odredimo duljinu dužine $\overline{AM}$:

$$|AM|=1+2+...+n+1=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Kako je $|AF|=(2n+1)\cdot(n+1)$ i $|FG|=2n+1$, imamo:

$$y=\frac{|AM|\cdot|FG|}{|AF|}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+1)}{2\cdot(2n+1)\cdot(n+1)}=\frac{n+2}{2}.$$

Sada je:

$$|ON|=y-x=\frac{n+2}{2}-\frac{n}{2}=1.$$

Kako su duljine kateta pravokutnog trokuta $\triangle LON$ jednake n + 1 i 1, duljina hipotenuze je:

$$|LN|=\sqrt{(n+1)^2+1^2}=\sqrt{n^2+2n+2}.$$

Konačno, opseg pravokutnog trokuta $\triangle LON$ je $o=n+2+\sqrt{n^2+2n+2}$, a njegova je površina

$$P=\frac{(n+1)\cdot 1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

3. Dokažimo najprije da je ostatak pri dijeljenju kvadrata prirodnog broja s 4 uvijek 0 ili 1, odnosno ne može biti niti 2 niti 3.

Naime, svaki se prirodan broj može zapisati na jedan od četiri načina:

$4k+1, 4k+2, 4k+3$ ili $4k+4=4(k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0$

Kvadrirajmo ove izraze i promotrimo ostatke pri dijeljenju s četiri:

$(4k+1)^2=16k^2+8k+1$, stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 1.

$(4k+2)^2=16k^2+16k+4$, stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0.

$(4k+3)^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1=8(2k^2+3k+1)+1$, stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 1.

$(4(k+1))^2=16(k+1)^2$, stoga je ostatak pri dijeljenju s 4 jednak 0.

Zaključujemo da kvadrat bilo kojeg prirodnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1, odnosno, ne može biti niti 2 niti 3.

Napomena: Možemo to dokazati i na drugi način. Ako je prirodan broj paran, odnosno oblika $2k$, onda je njegov kvadrat jednak $4k^2$, tj. djeljiv s 4 (ostatak je 0). Ako je prirodan broj neparan, odnosno oblika $2k + 1$, onda je njegov kvadrat jednak $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ pa daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4.

Pokažimo sada da, za neparan prirodan broj n, broj $m(m+2)+n(n+2)$ pri dijeljenju s 4 daje ostatak 2 ili 3.

Naime, brojevi n i $n + 2$ su dva uzastopna neparna prirodna broja pa daju ostatke 1 i 3 pri dijeljenju s 4, što znači da $n(n+2)$ daje ostatak $1 \cdot 3 = 3$ pri dijeljenju s 4.

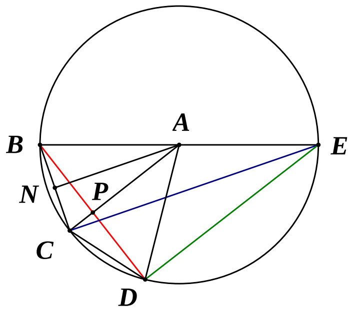
1) Ako je m neparan, onda i $m(m+2)$ daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, pa $m(m+2)+n(n+2)$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4.
2) Ako je m paran, onda je $m(m+2)$ djeljivo s 4, pa $m(m+2)+n(n+2)$ daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4.

Dakle, s obzirom da, za neparan prirodan broj n, broj $m(m+2)+n(n+2)$ daje ostatak 2 ili 3 pri dijeljenju s 4, a kvadrat prirodnog broja ne može dati ostatke 2 i 3 pri dijeljenju s 4, slijedi da $m(m+2)+n(n+2)$ ne može biti kvadrat prirodnog broja.

4. Iz uvjeta zadatka slijedi da točke B, C, D i E pripadaju istoj kružnici sa središtem u A duljine polumjera 1 te da je $\overline{BE}$ promjer te kružnice.

Potrebno je izračunati $|BD|, |CE|$ i $|DE|$.

Prema Talesovom poučku, kut $\sphericalangle ECB$ je pravi pa primjenom Pitagorinog poučka na $\triangle CEB$ dobivamo:



$$|CE|^2 = |BE|^2 - |BC|^2$$

$$|CE|^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$|CE|^2 = \frac{15}{4}$$

odnosno, $|CE| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Nadalje, po poučku S-S-S o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ pa je $|\angle ACB| = |\angle DCA|$.

Neka je točka P sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Prema poučku S-K-S o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle BCP \cong \triangle CDP$.

To znači da je $|\angle BPC| = |\angle CPD| = 90°$. Zato je $\overline{BP}$ visina trokuta $\triangle ABC$.

Neka je N nožište visine trokuta $\triangle ABC$ povučene iz vrha A. Kako je $\triangle ABC$ jednakokračan, onda je

$$|AN|^2 = |AC|^2 - |CN|^2$$

$$|AN|^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$|AN|^2 = \frac{15}{16}$$

$|AN| = \frac{\sqrt{15}}{4}.$

Prema poučku K-K o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle ANC \sim \triangle BCP$ pa je

$$\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|AN|}{|AC|}$$

$$|BP| = \frac{|AN|}{|AC|} \cdot |BC|$$

$$|BP| = \frac{1}{|AC|} \cdot |AN| \cdot |BC|$$

$$|BP| = \frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Nadalje, $|BD| = 2 \cdot |BP| = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$

Konačno, prema Talesovom poučku, kut $\angle EDB$ je pravi pa primjenom Pitagorinog poučka na $\triangle DEB$ dobivamo:

$$|DE|^2 = |BE|^2 - |BD|^2$$

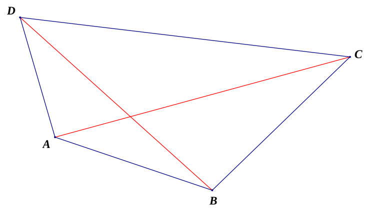
$$|DE|^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2$$

$$|DE| = \frac{7}{4}.$$

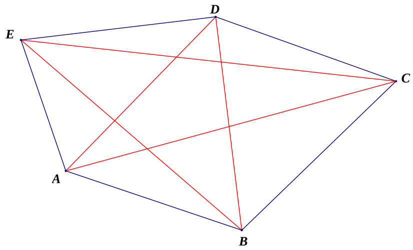
Napomena: $|BP|$ smo mogli izračunati i izražavajući površinu trokuta $\triangle ABC$ na dva načina:

$$\frac{|BC| \cdot |AN|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BP|}{2}.$$

5. Za n = 4, stranice obojimo u jednu, npr. plavu boju, a dijagonale u drugu – crvenu boju. Tada je očito da ne postoji trokut čiji su vrhovi vrhovi tog četverokuta, a sve stranice su obojane u istu boju.



Za n = 5, stranice obojimo u jednu, npr. plavu boju, a dijagonale u drugu – crvenu boju. Tada je očito da ne postoji trokut čiji su vrhovi vrhovi tog peterokuta, a sve stranice su obojane u istu boju.

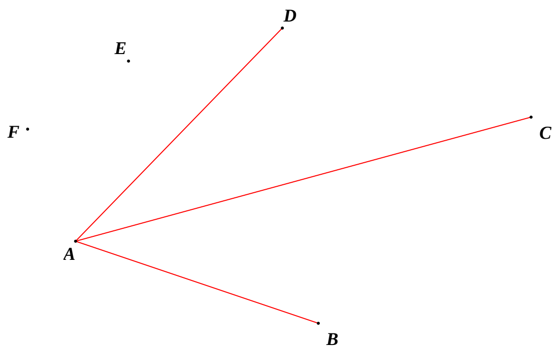


Time smo dokazali da je traženi $n > 5$.

Dokažimo sada da za svaki šesterokut vrijedi da, na koji god način obojali svaku od stranica i dijagonala pravilnog šesterokuta u plavu ili crvenu boju, mora postojati barem jedan trokut čiji su vrhovi ujedno vrhovi tog šesterokuta i čije su stranice sve obojane u istu boju.

Uočimo jedan vrh tog šesterokuta, nazovimo ga *A*. Iz njega izlazi pet spojnica s drugim vrhovima koje su obojane ili u plavu ili u crvenu boju.

Kako je $5 = 2 \cdot 2 + 1$, prema Dirichletovom principu, postoji boja takva da su barem tri takve spojnice obojane u tu boju. Npr. neka je to crvena boja.



Označimo vrhove koji određuju te spojnice s vrhom A npr. s B, C i D, pa su crvene spojnice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$.

Ako je barem jedna od spojnica $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ ili $\overline{CD}$ obojana u crvenu boju, imamo istobojni (crveni) trokut.

Ako nije, onda je trokut $\triangle BCD$ istobojan (plavi).

Napomena: Ukoliko učenik ne promatra slučaj $n = 4$, ali promatra slučaj $n = 5$ i pokaže da je moguće obojiti peterokut tako da niti jedan trokut nema istobojne stranice, ne gubi bodove.