DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj radnika iz pojedine zemlje označimo na sljedeći način:
a – broj Austrijanaca,
b – broj Belgijanaca,
c – broj Ciprana,
d – broj Danaca,
e – broj Estonaca.

Iz uvjeta zadatka dobivamo sustav:

$$a = \frac{1}{3}e - 1$$

$$a = \frac{1}{2}b - 3$$

$$e + d = c + b + 3$$

$$c + e = \frac{1}{2}(a + b + c + d + e) - 1$$

$$c + b = \frac{7}{16}(a + b + c + d + e)$$

Nadalje, vrijedi:
$e = 3a + 3$
$b = 2a + 6$
$e - b - c + d = 3$
$a + b - c + d - e = 2$
$7a - 9b - 9c + 7d + 7e = 0$

Iz treće jednadžbe sustava slijedi:
$-c + d = 3 - e + b$
Uvrštavanjem u četvrtu jednadžbu dobivamo:
$a + b + 3 - e + b - e = 2$
$a + 2b - 2e = -1$
Uvrštavanjem $e = 3a + 3$, $b = 2a + 6$ imamo:
$a + 2(2a + 6) - 2(3a + 3) = -1$
$a + 4a + 12 - 6a - 6 = -1$
$a = 7$
Slijedi $e = 24$ i $b = 20$.

Uvrštavanjem izračunatih vrijednosti a, b i e u treću i posljednju jednadžbu sustava dobivamo:

$4 - c + d = 3$
$49 - 180 - 9c + 7d + 168 = 0$

Slijedi:
$d = c - 1$
$37 - 9c + 7d = 0$

$37 - 9c + 7c - 7 = 0$
$30 = 2c$
$c = 15$
$d = 14$

Dakle, rješenje sustava je:
$a = 7$
$b = 20$
$c = 15$
$d = 14$
$e = 24$

U tvrtki radi 7 Austrijanaca, 20 Belgijanaca, 15 Ciprana, 14 Danaca i 24 Estonca.

2. Rezultat dvaju izvlačenja kuglica može se zapisati kao uređeni par kojemu je prvi član jednak broju na prvoj izvučenoj kuglici, a drugi član je broj na drugoj izvučenoj kuglici. Takvih uređenih parova ima ukupno
$100 \cdot 100 = 10\,000$.
Prebrojimo one uređene parove kod kojih je umnožak članova djeljiv s 9. To je moguće ako je bar jedan član djeljiv s 9 ili ako su oba člana djeljiva s 3.
Uređenih parova kod kojih je prvi član djeljiv s 9, a drugi član je bilo koji broj ima $11 \cdot 100 = 1\,100$.
Uređenih parova kod kojih je drugi član djeljiv s 9, a prvi član je bilo koji broj ima $100 \cdot 11 = 1\,100$.
Uređenih parova kod kojih su i prvi i drugi član djeljivi s 9 ima $11 \cdot 11 = 121$.
Dakle, uređenih parova kod kojih je bar jedan član djeljiv s 9 ima
$1\,100 + 1\,100 - 121 = 2\,079$.
Promotrimo uređene parove kod kojih su oba člana djeljiva s 3 i nijedan od njih nije djeljiv s 9 (jer su takvi već prebrojani).
Brojeva od 1 do 100, koji su djeljivi s 3, a nisu s 9, ima $33 - 11 = 22$.
Uređenih parova kod kojih su oba člana djeljiva s 3, ali nisu s 9 ima $22 \cdot 22 = 484$.
Dakle, uređenih parova kod kojih je umnožak prvog i drugog člana djeljiv s 9 ima ukupno
$2\,079 + 484 = 2\,563$.
Tražena vjerojatnost je $p = \dfrac{2\,563}{10\,000} = 25.63\ \%$.

3. Neka je $n = \overline{abcd}$ broj s traženim svojstvom i neka je x zbroj znamenaka broja n, a y zbroj znamenaka broja $n + 1$. Onda je $x = a + b + c + d$.
Ako je $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ onda je $n + 1 = \overline{abc(d+1)}$ i $y = a + b + c + d + 1 = x + 1$.
To znači da je y neposredni sljedbenik od x, pa su x i y različite parnosti što je suprotno uvjetu zadatka.

Zaključujemo da je $d = 9$.

Tražimo, dakle, sve brojeve oblika $n = \overline{abc9}$ manje od 2 020 sa svojstvom da su x i y neparni.

Kako je $x = a + b + c + 9$, a 9 je neparan, onda $a + b + c$ mora biti paran.

Razmotrimo **prvu mogućnost**, $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Tada je $n + 1 = \overline{ab(c+1)0}$, pa je $y = a + b + (c + 1) + 0 = a + b + c + 1$ i on je neparan ako je $a + b + c$ paran.

Stoga tražimo sve brojeve oblika $n = \overline{abc9}$ manje od 2 020, tako da vrijedi:

$a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $a + b + c$ je paran.

1. Ako je $a = 0$, onda je $b + c$ paran i postoje sljedeće mogućnosti:

	paran + paran	neparan + neparan
b	5 mogućnosti $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	5 mogućnosti $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
c	5 mogućnosti $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	4 mogućnosti $c \in \{1, 3, 5, 7\}$
$b + c$	25 mogućnosti	20 mogućnosti

Za $a = 0$ postoji ukupno 45 mogućnosti.

2. Ako je $a = 1$, onda je $b + c$ neparan i postoje sljedeće mogućnosti:

	paran + neparan	neparan + paran
b	5 mogućnosti $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	5 mogućnosti $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
c	4 mogućnosti $c \in \{1, 3, 5, 7\}$	5 mogućnosti $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$b + c$	20 mogućnosti	25 mogućnosti

Za $a = 1$ postoji ukupno 45 mogućnosti.

3. Ako je $a = 2$, onda je $b = 0$ i $c \in \{0, 1\}$ jer je $d = 9$ i prema uvjetu zadatka $n = \overline{abc9} < 2020$.
Kako $a + b + c$ mora biti paran, $2 + 0 + c = 2 + c$, pa c mora biti paran, tj. $c = 0$.

Za $a = 2$ postoji jedna mogućnost, broj 2009.

Dakle, za $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ postoji $45 + 45 + 1 = 91$ broj koji zadovoljava uvjete zadatka.

Razmotrimo sada i **drugu mogućnost**, $c = 9$.

Ako je $c = 9$ i $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, onda je $n = \overline{ab99}$, pa je $x = a + b + 9 + 9 = a + b + 18$ neparan ako je $a + b$ neparan.

No u tom slučaju je $n + 1 = \overline{a(b+1)00}$, pa je $y = a + b + 1 + 0 + 0 = a + b + 1$.

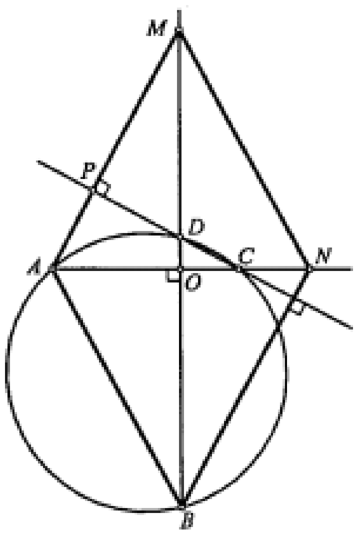
Prema uvjetu zadatka i y mora biti neparan, što je nemoguće jer je $a + b$ neparan pa je $a + b + 1$ paran broj.

Dakle, za $c = 9$ također je i $b = 9$, pa je $n = \overline{a999}$.
No $x = a + 9 + 9 + 9 = a + 27$ je neparan pa a mora biti paran tj. $a \in \{0, 2\}$.
Za $a = 0$ postoji rješenje $n = 999$, a za $a = 2$ rješenje 2 999 ne zadovoljava uvjete zadatka (prirodni brojevi manji od 2 020).

Dakle, za $c = 9$ postoji samo jedna mogućnost, broj 999.

Konačno, zaključujemo da postoji 91 + 1 = 92 prirodna broja n koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

4. Skica:



$ABNM$ je četverokut s okomitim dijagonalama $\overline{AN}$ i $\overline{BM}$. Da bi taj četverokut bio romb, dovoljno je dokazati da su mu sve četiri stranice sukladne.
Primijetimo da je $|\angle DBA| = |\angle DCA|$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{AD}$) i $|\angle DCA| = |\angle NBD|$ ($CA \perp BD$ i $CD \perp BN$ pa su kutovi s okomitim kracima iste vrste).
Slijedi $|\angle OBA| = |\angle DBA| = |\angle NBD| = |\angle NBO|$.

Uz zajedničku stranicu $\overline{OB}$, $|\angle OBA| = |\angle NBO|$ i $|\angle AOB| = |\angle BON| = 90°$, prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta je $\Delta ABO \cong \Delta NOB$, odakle slijedi $|AB| = |NB|$.
Također je i $|AO| = |ON|$ što znači da je pravac BM simetrala dužine $\overline{AN}$ (pravac BM je okomit na dužinu $\overline{AN}$ i prolazi njenim polovištem).
M je točka na simetrali dužine $\overline{AN}$, pa je $|AM| = |NM|$.
Preostalo je još dokazati da je $|AB| = |AM|$.
Neka je P nožište okomice iz točke A na pravac CD.
Tada je prema K-K poučku o sličnosti trokuta $\Delta ABO \sim \Delta ACP$ ($|\angle OBA| = |\angle DCA| = |\angle PCA|$ i $|\angle APC| = |\angle AOB| = 90°$), pa slijedi $|\angle OAM| = |\angle CAP| = |\angle BAO|$.
Sada je prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta ($|\angle OAM| = |\angle BAO|$, $\overline{AO}$ zajednička stranica, $|\angle MOA| = |\angle AOB| = 90°$) slijedi $\Delta AOM \cong \Delta ABO$, odakle je $|AB| = |AM|$ te je četverokut $ABNM$ romb.

Napomena: Da je $|AB| = |AM|$ možemo dokazati i na drugi način. Pravci AM i BN su usporedni jer su oba okomita na isti pravac CD. Zaključujemo da je $|\angle MAO| = |\angle ONB|$ (kutovi uz presječnicu iste vrste) te je $|\angle ONB| = |\angle OAB|$ iz već dokazane sukladnosti trokuta ΔABO i ΔNOB.

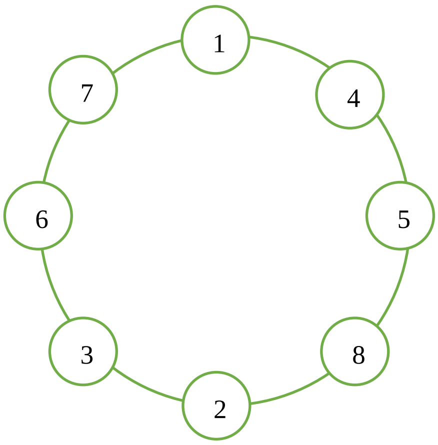
Odavde je $|\angle MAO| = |\angle OAB|$, pa uz zajedničku stranicu $\overline{OA}$ i $|\angle AOB| = |\angle MOA| = 90°$ prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta slijedi $\Delta ABO \cong \Delta MAO$ i vrijedi $|AB| = |AM|$.

5. Ako se osam brojeva smjesti nekim redom u kružnom poretku, dobije se osam zbrojeva od po četiri uzastopno smještena broja. Kako je svaki od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 pribrojnik u točno četiri zbroja, onda je zbroj tih osam zbrojeva jednak

$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4 \cdot 36 = 144.$$

Pretpostavimo li da je $m = 18$, svih spomenutih osam zbrojeva bi moralo biti jednako 18 jer je $8 \cdot 18 = 144$.
No ako je a, b, c, d, e nekih pet uzastopno smještenih brojeva, onda je $a + b + c + d \neq b + c + d + e$ jer je $a \neq e$. To znači da m ne može biti 18, odnosno vrijedi $m > 18$.

Odredimo jedan raspored tako da najveći zbroj neka četiri uzastopno smještena broja jednak 19.
Smjestimo brojeve tako da brojevi 8 i 7 ne budu u istom zbroju, kao ni brojevi 6 i 5, 4 i 3 te 2 i 1, na način prikazan na slici.



Traženih osam zbrojeva je:
$1 + 4 + 5 + 8 = 18$,
$4 + 5 + 8 + 2 = 19$,
$5 + 8 + 2 + 3 = 18$,
$8 + 2 + 3 + 6 = 19$,
$2 + 3 + 6 + 7 = 18$,
$3 + 6 + 7 + 1 = 17$,
$6 + 7 + 1 + 4 = 18$,
$7 + 1 + 4 + 5 = 17$,
pa je $m = 19$.