DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. listopada 2020.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

Broj $a$ možemo zapisati u obliku:
$a = 3 \cdot 11\,111\,111 \cdot 4 \cdot 11\,111\,111 \cdot 5 \cdot 11\,111\,111$, odnosno
$a = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 = 60 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$.

Na isti način i broj $b$ možemo zapisati u obliku:
$b = 6 \cdot 11\,111\,111 \cdot 7 \cdot 11\,111\,111 \cdot 8 \cdot 11\,111\,111$, odnosno
$b = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 = 336 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$.

Sada vidimo da je zbroj zadanih brojeva jednak:
$a + b = 60 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 + 336 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$
$a + b = (60 + 336) \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$
Dakle, zbroj brojeva $a$ i $b$ možemo pisati u obliku umnoška:
$a + b = 396 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$

Broj $a + b$ je djeljiv brojem 9 jer je faktor 396 djeljiv brojem 9.

**Drugi način:**

Broj $a$ je oblika $(9k + 6) \cdot (9k + 5) \cdot (9k + 4)$, gdje je $k$ prirodan broj,
a $b$ oblika $(9l + 3) \cdot (9l + 2) \cdot (9l + 1)$, gdje je $l$ prirodan broj.
Kako je $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 = 9 \cdot 13 + 3$, slijedi da je $a$ je oblika $9m + 3$, gdje je $m$ prirodan broj,
a iz $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ slijedi da je $b$ oblika $9n + 6$, gdje je $n$ prirodan broj.
Stoga je $a + b = 9m + 3 + 9n + 6 = 9(m + n + 1)$, pa je $a + b$ djeljiv s 9.

**2.** U 20 sati i 21 minutu kazaljke sata krakovi su tupog i izbočenog kuta. Potrebno je odrediti mjere tih kutova.

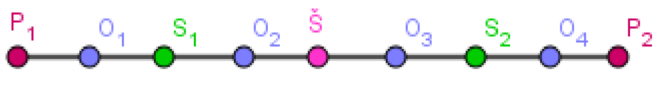
Početni položaj i male i velike kazaljke ure neka je 12 sati. Velika kazaljka za 1 sat (60 minuta) načini puni kut pa za jednu minutu zatvara kut veličine 6°. Za 21 minutu ona će zatvoriti kut veličine $21 \cdot 6° = 126°$.
Mala će kazaljka za 1 sat (60 minuta) zatvoriti kut od $360° : 12 = 30°$ pa će za 8 sati zatvoriti kut veličine 240°. Još je potrebno izračunati koliki će kut mala kazaljka prijeći za 21 minutu.
Za 1 minutu mala kazaljka zatvori kut veličine 0.5°, a za 21 minutu, bit će to kut veličine
$21 \cdot 0.5° = 10.5°$.
Ukupno, za 8 sati i 21 minutu, mala kazaljka zatvara kut veličine 250.5°.
Kut koji zatvaraju mala i velika kazaljka razlika je dobivenih kutova:
$250.5° - 126° = 124.5°$ (tupi kut).
Mjeru izbočenog kuta računamo nadopunom do 360° te ona iznosi 235.5°.

**3.** Ostatak pri dijeljenju broja $n$ brojem 45 označimo s $x$.
Ostatak pri dijeljenju broja 2 020 brojem 45 jednak je 40.
Kako je $40 < 43$, može se zaključiti da je ostatak pri dijeljenju broja $(n + 2\,020)$ brojem 45 broj $(x + 40)$.
Sada vrijedi $x + 40 = 43$, iz čega slijedi $x = 3$.
Dakle, ostatak pri dijeljenju prirodnog broja $n$ brojem 45 jest 3.

**4. Prvi način:**
Neka je bilo $n$ učenika petog razreda.
Između njih se može smjestiti jedan učenik manje od tog broja, dakle $n - 1$. Toliko je bilo „šestaša“.
U tom je trenutku na igralištu bilo $n + n - 1 = 2n - 1$ učenika oba razreda.
I između njih može stati jedan učenik manje, pa je „sedmaša“ bilo $2n - 2$.
Zajedno, od petog do sedmog razreda, bilo je $2n - 1 + 2n - 2 = 4n - 3$ učenika.
Između njih je stao jedan manje, dakle $4n - 4$ „osmaša“.
Ukupan broj svih učenika je $4n - 4 + 4n - 4 = 8n - 7$.
Vrijedi jednadžba $8n - 7 = 193$.
Tada je $8n = 200$
i $n = 25$.
U redu su bila 24 učenika šestog razreda.

**Drugi način:**
Promotrimo postupak dolaska učenika unazad.
Ako je već u redu $n$ učenika, između njih se može smjestit jedan učenik manje, dakle $n - 1$ učenik.
Zbog $193 = 97 + 96$, može se zaključiti da je na kraju u redu bilo 97 učenika petog, šestog i sedmog razreda, te da se između njih smjestilo još 96 učenika osmog razreda.
Na isti način zaključujemo da je, zbog $97 = 49 + 48$, prije toga u redu bilo 49 učenika petog i šestog razreda, a da se između njih smjestilo 48 učenika sedmog razreda.
I konačno, zbog $49 = 25 + 24$, zaključi se da je na samom početku bilo 25 učenika petog razreda, te da su se među njih smjestila 24 učenika šestog razreda.
U redu su bila 24 učenika šestog razreda.

**Treći način:**
Nacrtajmo skicu opisane situacije koja se odnosi na dva susjedna učenika petih razreda ($P_1$ i $P_2$).

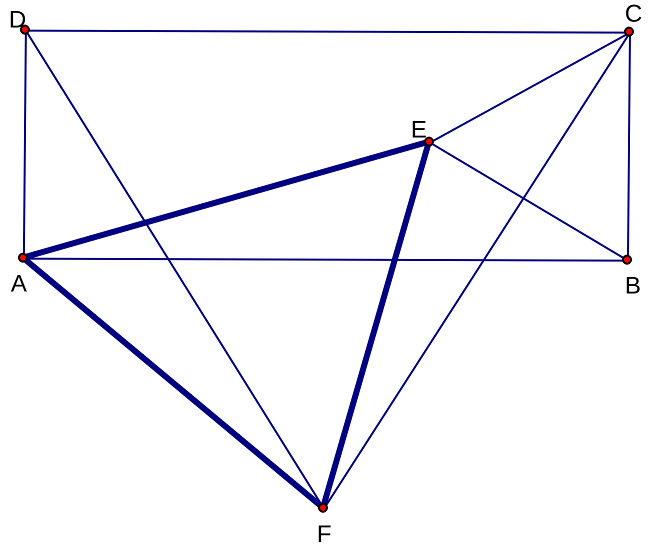



Zaključujemo da se između svaka dva učenika petih razreda nalazi po jedan učenik šestog razreda, dva učenika sedmog te četiri učenika osmog razreda. Ako jednu skupinu od 8 učenika čine učenici od $P_1$ do $O_4$ (uključujući njih), prema uvjetima zadatka vrijedi da je

$$8x + 1 = 193$$

gdje je $x$ broj skupina prikazanih skicom. Rješenje jednadžbe je $x = 24$. S obzirom da je u svakoj skupini jedan učenik šestog razreda, zaključujemo da u redu stoji 24 učenika šestog razreda.

**5.** Skica:




**Prvi način:**

Budući da je $|AD| = |BC| = |BE| = b$, $|AB| = |CD| = |DF| = a$ i $|\angle ADF| = |\angle EBA| = 90° - 60° = 30°$, po poučku o sukladnosti trokuta SKS slijedi da je $\Delta AFD \cong \Delta ABE$, pa vrijedi da je $|AF| = |AE|$.
Na sličan način dokazujemo da je $\Delta AFD \cong \Delta FCE$.

Vrijedi da je $|BE| = |EC| = b$, $|DF| = |CF| = a$, te da je $|\angle DCF| = 60°$, $|\angle ECB| = 60°$ i $|\angle DCB| = 90°$.

Iz $|\angle DCF| + |\angle ECB| = 120°$ i $|\angle DCF| + |\angle ECB| = 90° + |\angle ECF|$ slijedi da je $90° + |\angle ECF| = 120°$, tj. $|\angle ECF| = 30°$.

Po poučku o sukladnosti trokuta SKS slijedi da je $\Delta AFD \cong \Delta FCE$, pa vrijedi da je $|EF| = |AF|$.
Time je dokazano da stranice trokuta *AFE* imaju jednake duljine, tj. da je $\Delta AFE$ jednakostraničan.

**Drugi način:**

Iz uvjeta zadatka ($\Delta BCE$ i $\Delta FCD$ su jednakostranični) proizlazi $|\angle FCD| = |\angle CDF| = |\angle DFC| = 60°$ i $|\angle EBC| = |\angle BCE| = |\angle CEB| = 60°$ te $|AD| = |BC| = |BE| = b$, $|AB| = |CD| = |DF| = a$.

Budući da je $|AD| = |BE| = b$, $|AB| = |DF| = a$ i $|\angle ADF| = |\angle EBA| = 90° - 60° = 30°$, po poučku o sukladnosti trokuta SKS vrijedi da je $\Delta AFD \cong \Delta AEB$, iz čega slijedi $|AF| = |AE|$.
Kako je $|\angle DCE| = |\angle BCF| = 90° - 60° = 30°$, vrijedi $|\angle FCE| = 90° - |\angle DCE| - |\angle \mathrm{BCF}| = 30°$.

Sada se iz $|BE| = |EC| = b$, $|DF| = |CF| = a$ i $|\angle ECF| = |\angle EBA| = 30°$ može zaključiti da po poučku o sukladnosti SKS vrijedi $\Delta AFD \cong \Delta AEB$, iz čega slijedi $|AF| = |EF|$.
Kako je $|AF| = |AE|$ i $|AF| = |EF|$, slijedi $|AF| = |AE| = |EF|$, čime je tvrdnja dokazana, tj. $\Delta AFE$ jest jednakostraničan trokut.