DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak A-1.1.

Odredi najmanju vrijednost izraza

$$|x+1|+|x-2|+|x-3|,$$

pri čemu je x realni broj.

Rješenje.

Izračunajmo vrijednost danog izraza ovisno o tome gdje se broj x nalazi na realnom brojevnom pravcu.

- Za $x \leqslant -1$, dani je izraz jednak

  $$-x-1-x+2-x+3=4-3x.$$

  Zaključujemo da za realne brojeve $x \leqslant -1$ dani izraz postiže najmanju vrijednost kada je x najveći, tj. u točki $x=-1$ i ta vrijednost je jednaka 7.
- Za $-1 \leqslant x \leqslant 2$, dani je izraz jednak

  $$x+1-x+2-x+3=6-x,$$

  najmanja vrijednost postiže se za $x=2$ i iznosi 4.
- Za $2 \leqslant x \leqslant 3$, dani je izraz jednak

  $$x+1+x-2-x+3=x+2,$$

  najmanja vrijednost postiže se za $x=2$ i iznosi 4.
- Za $3 \leqslant x$, dani je izraz jednak

  $$x+1+x-2+x-3=3x-4,$$

  najmanja vrijednost postiže se za $x=3$ i iznosi 5.

Konačno, zaključujemo da se najmanja vrijednost izraza postiže za $x=2$ i iznosi 4.

Zadatak A-1.2.

Odredi sve parove (n, k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$n^2 + n = k^2 + 2k - 9.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo danu jednakost kao

$$n^2 + n + 10 = (k+1)^2.$$

Primijetimo da je izraz s desne strane potpun kvadrat, stoga to mora biti i izraz s lijeve strane.

Nadalje, primijetimo da je

$$n^2 < n^2 + n + 10 < n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2$$

za svaki prirodni broj n.

Stoga su jedine mogućnosti sljedeće:

- $n^2 + n + 10 = (n+1)^2$, odnosno $n^2 + n + 10 = n^2 + 2n + 1$, odnosno $n = 9$, što nam daje rješenje $(n, k) = (9, 9)$.
- $n^2 + n + 10 = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$, tj. $n = 2$, što nam daje rješenje $(n, k) = (2, 3)$.
- $n^2 + n + 10 = (n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$, tj. $5n = 1$ pa vidimo da u ovom slučaju nema rješenja.

Konačno, sva tražena rješenja su $(n, k) = (9, 9)$ i $(n, k) = (2, 3)$.

Drugo rješenje.

Pomnožimo li danu jednakost s 4, dobivamo $4n^2+4n = 4k^2+8k-36$, odnosno ako nadopunimo do potpunih kvadrata $(4n^2 + 4n + 1) + 39 = 4(k^2 + 2k + 1)$, tj.

$$(2n+1)^2 + 39 = (2(k+1))^2.$$

Primijetimo da nužno vrijedi $2(k+1) > 2n+1$, stoga postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $2n + 1 = a$ i $2(k+1) = a + b$. Rješavamo

$$a^2 + 39 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

odnosno $b(b + 2a) = 39$.

Broj b mora biti neparan djelitelj broja 39, manji od $b+2a$, pa su jedine mogućnosti $b \in \{1, 3\}$. Vidimo da za $b = 3$ dobivamo rješenje $(n, k) = (2, 3)$, te za $b = 1$ rješenje $(n, k) = (9, 9)$.

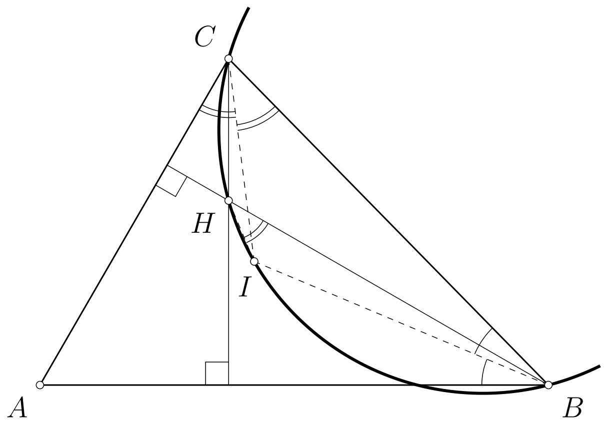
Zadatak A-1.3.

U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC = 60°$ i $|AB| > |AC|$. Ako je I središte upisane kružnice, a H ortocentar tog trokuta, dokaži da je $2\sphericalangle AHI = 3\sphericalangle ABC$.

Rješenje.

Označimo $\beta = \sphericalangle ABC$ i $\gamma = \sphericalangle BCA$. Kako je $\sphericalangle BAC = 60°$, imamo da je $\gamma = 120° - \beta$.

Točke B, C i nožište visine iz B čine pravokutan trokut, pa je $\sphericalangle HBC = 90° - \gamma = \beta - 30°$. Slično imamo $\sphericalangle HCB = 90° - \beta$. Budući da je zbroj kutova u trokutu 180°, slijedi da je $\sphericalangle CHB = 180° - \sphericalangle HBC - \sphericalangle HCB = 120°$.



Budući da središte upisane kružnice I leži na simetralama kutova trokuta ABC, vrijedi

$$\sphericalangle ICB = \frac{\gamma}{2} = 60° - \frac{\beta}{2} \qquad \text{i} \qquad \sphericalangle IBC = \frac{\beta}{2}.$$

Slijedi da je $\sphericalangle BIC = 180° - \sphericalangle ICB - \sphericalangle IBC = 120°$.

Budući da je $\sphericalangle BIC = \sphericalangle BHC$, zaključujemo da je četverokut $CHIB$ tetivan. Zato je

$$\sphericalangle IHB = \sphericalangle ICB = 60° - \frac{\beta}{2}.$$

Veličine kutova $\sphericalangle HAB$ i $\sphericalangle HBA$ izračunamo kao što smo izračunali veličine kutova $\sphericalangle HBC$ i $\sphericalangle HCB$, pa dobivamo $\sphericalangle HAB = 90° - \beta$ i $\sphericalangle HBA = 30°$. Iz trokuta ABH računamo da je $\sphericalangle BHA = 180° - \sphericalangle HAB - \sphericalangle HBA = 60° + \beta$.

Konačno, imamo

$$\sphericalangle AHI = \sphericalangle AHB - \sphericalangle IHB = (60° + \beta) - \left(60° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2}\beta = \frac{3}{2}\sphericalangle ABC,$$

odakle zaključujemo $2\sphericalangle AHI = 3\sphericalangle ABC$, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Uvjeti zadatka osiguravaju da je $30° < \beta < 60°$, pa je pravac BH bliži stranici $\overline{BC}$ nego pravac BI, te je analogno pravac CH bliži stranici $\overline{AC}$ nego pravac CI. Tu činjenicu treba istaknuti ako je ona bitna za rješenje, npr. ako se koristi $\sphericalangle HCI = \sphericalangle HCB - \sphericalangle ICB$.

Zadatak A-1.4.

Odredi sve realne brojeve $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2020} \geqslant 0$ za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} = 1 \qquad \text{i} \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2020}^2 = a_1.$$

Rješenje.

Pomnožimo li prvu jednakost s a_1 i od tako dobivene jednakosti oduzmemo drugu, dobivamo:

$$a_2(a_1 - a_2) + a_3(a_1 - a_3) + \cdots + a_{2020}(a_1 - a_{2020}) = 0.$$

Kako je $a_1 \geqslant a_k$ i $a_k \geqslant 0$, vidimo da imamo zbroj nenegativnih brojeva koji je jednak nuli. Zaključujemo da je svaki pribrojnik jednak nuli:

$$a_k(a_1 - a_k) = 0, \quad \text{za sve } k \in \{2, 3, \ldots, 2020\},$$

odnosno za svaki $k \in \{2, 3, \ldots, 2020\}$ vrijedi da je $a_k = a_1$ ili $a_k = 0$.

Kako je $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} = 1$ i $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2020} \geqslant 0$, zaključujemo da je sigurno $a_1 > 0$ (u suprotnom zbroj nikako ne može biti pozitivan). Također, ako je neki broj u tom nizu jednak 0, zaključujemo da su svi nakon njega također jednaki 0.

Dakle, svaki niz koji zadovoljava dane uvjete će izgledati tako da je prvih nekoliko brojeva međusobno jednako i u zbroju daje 1, dok su svi preostali brojevi jednaki 0. Konačno, za svaki prirodni broj $n \in \{1, 2, \ldots, 2020\}$ imamo jedinstveno rješenje

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{te} \qquad a_{n+1} = \cdots = a_{2020} = 0.$$

Zadatak A-1.5.

Ana je prekrila ploču dimenzija 2020×2020 domino pločicama koje se međusobno ne preklapaju, a svaka od njih prekriva točno dva polja ploče. Branka želi obojiti te pločice tako da za svaku vrijedi: među njoj susjednim pločicama najviše su dvije u boji promatrane. Dvije pločice su susjedne ako prekrivaju polja koja imaju zajedničku stranicu.

Koliko je najmanje boja potrebno da bi Branka sigurno mogla obojiti pločice na takav način, neovisno o načinu na koji ih je Ana rasporedila?

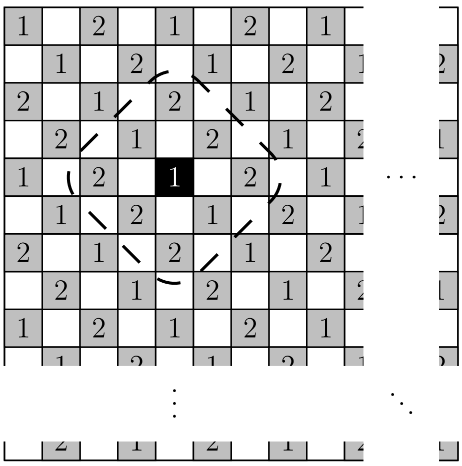
Rješenje.

Dokazat ćemo da su Branki dovoljne dvije boje.

Očito je da Branka ne može obojiti sve pločice jednom bojom: svaka pločica koja se ne nalazi na rubu ima barem četiri susjedne pločice (koje je diraju odozdo, odozgo, slijeva i zdesna) i koje su iste boje kao i promatrana, što nije dozvoljeno.

Dokažimo sada da, neovisno kako Ana postavi pločice, Branka može obojiti pločice dvjema bojama na ispravan način. Promotrimo sva crna polja 2020×2020 ploče kada bismo je obojili crno-bijelo kao šahovsku ploču. Svaka pločica, neovisno o Aninom postavljanju, prekrit će točno jedno crno polje. Zato je, umjesto pločica, dovoljno svakom crnom polju ploče 2020×2020 pridružiti jednu od dvije boje. Pločicu ćemo obojiti onom bojom koja je pridružena crnom polju koje prekriva.

To radimo kao na slici: poljima crne dijagonale pridružimo naizmjenično boje 1 i 2. Promotrimo proizvoljno crno polje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je tom polju pridružena boja 1. Pločica koja prekriva to polje bit će susjedna s nekim od osam crnih polja koja su od tog polja udaljena za dva polja. Među tim poljima imamo samo dva polja kojima je pridružena boja 1. Kako to vrijedi za proizvoljno polje, zaključujemo da će sve pločice biti susjedne s najviše dvije druge pločice iste boje.



DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve parove (n, k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$n^2 + n = k^2 + 2k - 9.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo danu jednakost kao

$$n^2 + n + 10 = (k+1)^2.$$

Primijetimo da je izraz s desne strane potpun kvadrat, stoga to mora biti i izraz s lijeve strane.

Nadalje, primijetimo da je

$$n^2 < n^2 + n + 10 < n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2$$

za svaki prirodni broj n.

Stoga su jedine mogućnosti sljedeće:

- $n^2 + n + 10 = (n+1)^2$, odnosno $n^2 + n + 10 = n^2 + 2n + 1$, odnosno $n = 9$, što nam daje rješenje $(n, k) = (9, 9)$.
- $n^2 + n + 10 = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$, tj. $n = 2$, što nam daje rješenje $(n, k) = (2, 3)$.
- $n^2 + n + 10 = (n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$, tj. $5n = 1$ pa vidimo da u ovom slučaju nema rješenja.

Konačno, sva tražena rješenja su $(n, k) = (9, 9)$ i $(n, k) = (2, 3)$.

Drugo rješenje.

Pomnožimo li danu jednakost s 4, dobivamo $4n^2 + 4n = 4k^2 + 8k - 36$, odnosno ako nadopunimo do potpunih kvadrata $(4n^2 + 4n + 1) + 39 = 4(k^2 + 2k + 1)$, tj.

$$(2n+1)^2 + 39 = (2(k+1))^2.$$

Primijetimo da nužno vrijedi $2(k+1) > 2n+1$, stoga postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $2n + 1 = a$ i $2(k+1) = a + b$. Rješavamo

$$a^2 + 39 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

odnosno $b(b + 2a) = 39$.

Broj b mora biti neparan djelitelj broja 39, manji od $b + 2a$, pa su jedine mogućnosti $b \in \{1, 3\}$. Vidimo da za $b = 3$ dobivamo rješenje $(n, k) = (2, 3)$, te za $b = 1$ rješenje $(n, k) = (9, 9)$.

Zadatak A-2.2.

Neka su a i b realni brojevi takvi da su oba rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b + 1 = 0$ prirodni brojevi. Dokaži da je $a^2 + b^2$ složen prirodni broj.

Rješenje.

Neka su ta rješenja prirodni brojevi m i n. Iskoristimo li Vièteove formule,

$$a = -m - n \qquad \text{i} \qquad b + 1 = mn,$$

dobivamo

$$a^2 + b^2 = (m+n)^2 + (mn-1)^2 = m^2 + 2mn + n^2 + m^2n^2 - 2mn + 1 = (m^2+1)(n^2+1).$$

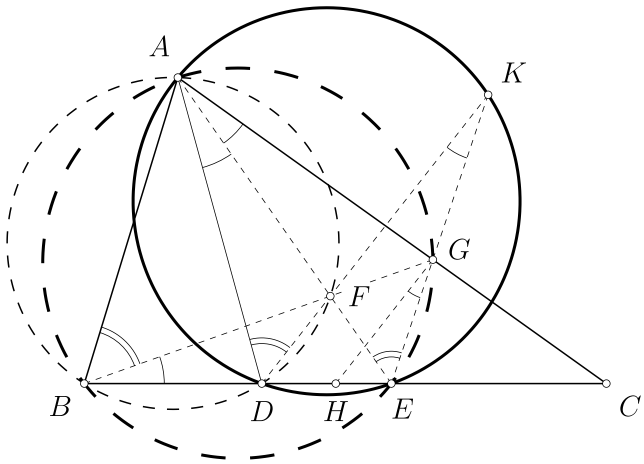
Dakle, $a^2 + b^2$ je umnožak dva prirodna broja veća od 1, pa je sigurno složen prirodni broj.

Zadatak A-2.3.

Na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC zadana je točka D. Simetrala kuta $\sphericalangle CAD$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Kružnica opisana trokutu ABD siječe dužinu $\overline{AE}$ u točkama A i F, a pravac BF siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki G. Pravac kroz točku G paralelan s $\overline{DF}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki H.

Dokaži da je pravac GE tangenta kružnice opisane trokutu BHG.

Rješenje.



Simetrala kuta $\sphericalangle CAD$ dijeli taj kut na dva jednaka dijela. Neka je $\varphi = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Budući da je prema uvjetima zadatka četverokut $BDFA$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle DBF = \sphericalangle DAF = \varphi$. Također, zbog iste tetivnosti vrijedi

$$\sphericalangle FDA = \sphericalangle FBA.$$

S obzirom na to da je $\sphericalangle EAG = \sphericalangle EAC = \varphi = \sphericalangle DBF = \sphericalangle EBG$, zaključujemo da je četverokut $BEGA$ tetivan. Odavde imamo

$$\sphericalangle GEA = \sphericalangle GBA.$$

Neka je K sjecište pravaca GE i FD. Iz gore pokazanih jednakosti imamo

$$\sphericalangle KDA = \sphericalangle FDA = \sphericalangle FBA = \sphericalangle GBA = \sphericalangle GEA = \sphericalangle KEA,$$

pa je četverokut $KADE$ tetivan. Zato je

$$\sphericalangle DKE = \sphericalangle DAE = \varphi.$$

Budući da su pravci DF i GH paralelni, imamo

$$\sphericalangle HGE = \sphericalangle DKE = \varphi.$$

Time smo pokazali da je

$$\sphericalangle HGE = \sphericalangle HBG,$$

iz čega prema obratu poučka o kutu između tetive i tangente zaključujemo da je GE uistinu tangenta kružnice opisane trokutu BHG.

Zadatak A-2.4.

Odredi sve realne brojeve $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2020} \geqslant 0$ za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} = 1 \qquad \text{i} \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2020}^2 = a_1.$$

Rješenje.

Pomnožimo li prvu jednakost s a_1 i od tako dobivene jednakosti oduzmemo drugu, dobivamo:

$$a_2(a_1 - a_2) + a_3(a_1 - a_3) + \cdots + a_{2020}(a_1 - a_{2020}) = 0.$$

Kako je $a_1 \geqslant a_k$ i $a_k \geqslant 0$, vidimo da imamo zbroj nenegativnih brojeva koji je jednak nuli. Zaključujemo da je svaki pribrojnik jednak nuli:

$$a_k(a_1 - a_k) = 0, \quad \text{za sve } k \in \{2, 3, \ldots, 2020\},$$

odnosno za svaki $k \in \{2, 3, \ldots, 2020\}$ vrijedi da je $a_k = a_1$ ili $a_k = 0$.

Kako je $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} = 1$ i $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2020} \geqslant 0$, zaključujemo da je sigurno $a_1 > 0$ (u suprotnom zbroj nikako ne može biti pozitivan). Također, ako je neki broj u tom nizu jednak 0, zaključujemo da su svi nakon njega također jednaki 0.

Dakle, svaki niz koji zadovoljava dane uvjete će izgledati tako da je prvih nekoliko brojeva međusobno jednako i u zbroju daje 1, dok su svi preostali brojevi jednaki 0. Konačno, za svaki prirodni broj $n \in \{1, 2, \ldots, 2020\}$ imamo jedinstveno rješenje

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{te} \qquad a_{n+1} = \cdots = a_{2020} = 0.$$

Zadatak A-2.5.

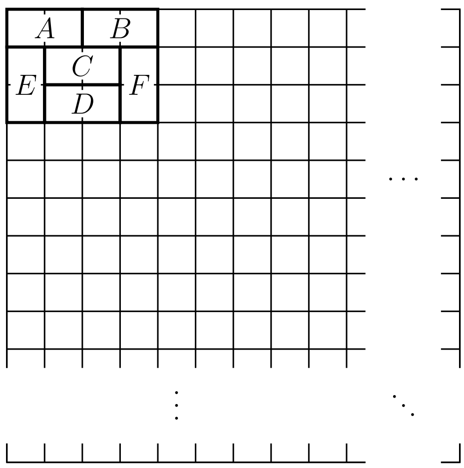
Ana je prekrila ploču dimenzija 2020×2020 domino pločicama koje se međusobno ne preklapaju, a svaka od njih prekriva točno dva polja ploče. Branka želi obojiti te pločice tako da za svaku vrijedi: među njoj susjednim pločicama najviše je jedna u boji promatrane. Dvije pločice su susjedne ako prekrivaju polja koja imaju zajedničku stranicu.

Koliko je najmanje boja potrebno da bi Branka sigurno mogla obojiti pločice na takav način, neovisno o načinu na koji ih je Ana rasporedila?

Rješenje.

Dokazat ćemo da su Branki dovoljne tri boje.

Prvo dokažimo da Branki nisu dovoljne dvije boje (a time ni manje). Naći ćemo primjer Aninog prekrivanja u kojem Branka nikako ne može obojiti pločice dvjema bojama.



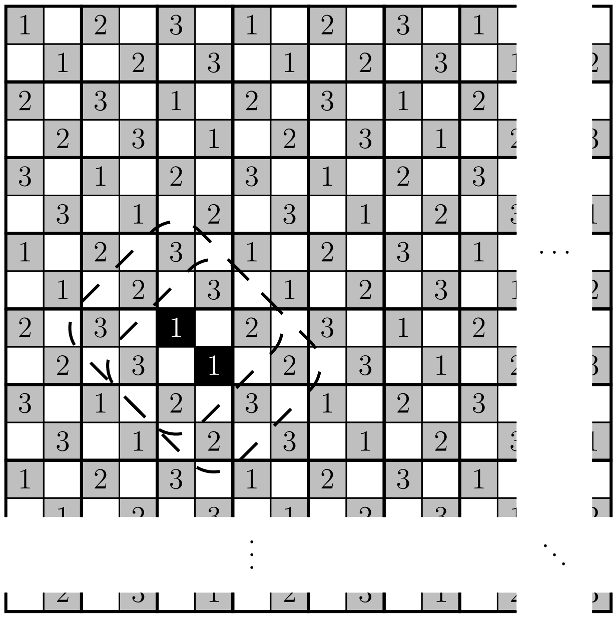
Neka Ana prekrije gornji lijevi 3×4 dio ploče kao na slici, a preostali dio postavljajući pločice horizontalno. Imenujmo pločice kao na slici. Pločice A, B i C su sve u parovima susjedne. Kako imamo dvije boje (1 i 2), po Dirichletovom principu barem dvije pločice su obojene istom bojom (bez smanjenja općenitosti bojom 1). Ako su to pločice A i B, tada sve njima susjedne pločice moraju biti obojene bojom 2. Odnosno, pločice C, E i F su obojene bojom 2, što znači da C ima dvije susjedne istobojne pločice.

S druge strane, ako je C iste boje kao neka od pločica A ili B, tada sve ostale susjedne pločice pločici C moraju biti boje 2. Tada su D, E i F obojene bojom 2, što znači da D ima dvije susjedne istobojne pločice.

U oba slučaja dolazimo do kontradikcije, stoga su potrebne barem tri boje.

Dokažimo sada da, neovisno kako Ana postavi pločice, Branka može obojiti pločice trima bojama na ispravan način. Promotrimo sva crna polja 2020×2020 ploče kada bismo je obojili crno-bijelo kao šahovsku ploču. Svaka pločica, neovisno o Aninom postavljanju, prekrit će točno jedno crno polje. Zato je, umjesto pločica, dovoljno svakom crnom polju ploče 2020×2020 pridružiti jednu od tri boje. Pločicu ćemo obojiti onom bojom koja je pridružena crnom polju koje prekriva.

Dodatno, za konstrukciju bojenja, podijelimo ploču 2020×2020 na 2×2 blokove. Obojiti jedan blok znači pridružiti njegovim crnim poljima (dakle poljima u gornjem lijevom i donjem desnom kutu) istu boju. Blokove bojimo izmjenjujući redom sve tri boje, kao na slici.



Dvije pločice mogu biti susjedne samo ako im je udaljenost crnih polja koja prekrivaju najviše 2. Stoga promotrimo dva polja u istom 2×2 bloku kojima je pridružena ista boja (bez smanjenja općenitosti boja 1). Sa slike vidimo da polja kojima je pridružena boja 1 imaju u svojoj blizini najviše jedno polje kojem je pridružena ista boja. Kako to vrijedi za proizvoljno polje s pridruženom proizvoljnom bojom, zaključujemo da će sve pločice biti susjedne s najviše jednom pločicom iste boje.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve četvorke (a, b, c, d) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a + b = cd, \qquad ab = c + d.$$

Rješenje.

Ako su vrijednosti $cd = a + b$ i $ab = c + d$ jednake, onda $ab = a + b$ povlači $(a-1)(b-1) = 1$. Budući da su a i b prirodni, nužno je $a = b = 2$. Analogno je $c = d = 2$, pa je jedno rješenje $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$.

Ako vrijednosti $cd = a + b$ i $ab = c + d$ nisu jednake, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $ab < a + b$. Tada je $(a - 1)(b - 1) < 1$, što je moguće ako je jedna od zagrada jednaka nuli. Pretpostavimo da je $a = 1$.

Tada dobivamo sustav $cd = b+1, c+d = b$, odakle je $(c-1)(d-1) = b+1-b+1 = 2$. Uzimajući u obzir rastav broja 2 na faktore, dobivamo dva rješenja: $c = 2, d = 3$ ili $c = 3, d = 2$, te (u oba ta slučaja) $b = 5$.

Analogno se rješava i sve ostale slučajeve (kada je $b = 1$, te kada je $ab > a + b$).

Tako dobivamo sva rješenja:

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) = {} & (2, 2, 2, 2), \\ & (1, 5, 2, 3),\ (1, 5, 3, 2), \\ & (5, 1, 2, 3),\ (5, 1, 3, 2), \\ & (2, 3, 1, 5),\ (3, 2, 1, 5), \\ & (2, 3, 5, 1),\ (3, 2, 5, 1).\end{aligned}$$

Zadatak A-3.2.

Dana su četiri različita realna broja iz intervala $\langle 0, 1\rangle$. Dokaži da među njima postoje dva broja, x i y, takva da vrijedi

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

Rješenje.

Neka su dani realni brojevi x_1, x_2, x_3 i x_4. Budući da se nalaze u intervalu $\langle 0,1\rangle$, postoje jedinstveni brojevi a_1, a_2, a_3 i a_4 u intervalu $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ takvi da je $x_i = \sin a_i$, za sve $i = 1,2,3,4$. Kako su svi brojevi x_i međusobno različiti, isto vrijedi i za brojeve a_i. Dodatno primijetimo da za brojeve a_i vrijedi $\cos a_i > 0$.

Za proizvoljne x_i i x_j izraz iz uvjeta zadatka možemo pisati i na ovaj način:

$$\begin{aligned}
&x_i\sqrt{1-x_j^2} - x_j\sqrt{1-x_i^2} \\
&= \sin(a_i)\sqrt{1-\sin^2(a_j)} - \sin(a_j)\sqrt{1-\sin^2(a_i)} \\
&= \sin(a_i)\cos(a_j) - \sin(a_j)\cos(a_i) = \sin(a_i - a_j).
\end{aligned}$$

Podijelimo interval $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ na tri podintervala jednake duljine: $I_1 := \langle 0,\frac{\pi}{6}]$, $I_2 := \langle\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6}]$ i $I_3 := \langle\frac{2\pi}{6},\frac{\pi}{2}\rangle$. Po Dirichletovom principu, među a_1, a_2, a_3 i a_4 postoje dva broja $a_i > a_j$ koja se nalaze u istom podintervalu.

Za njih vrijedi $0 < a_i - a_j < \frac{\pi}{6}$, odnosno $0 < \sin(a_i - a_j) < \frac{1}{2}$. Dakle, postoje dva broja x_i i x_j kao u tekstu zadatka, te je time tvrdnja dokazana.

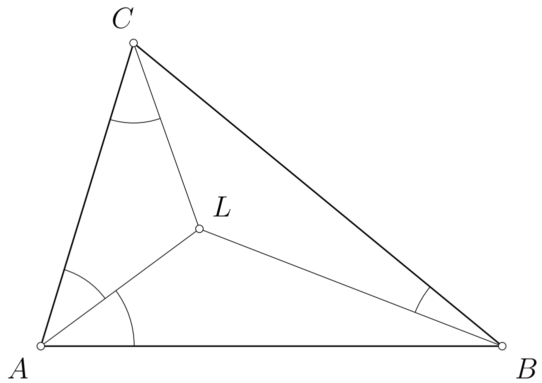
Zadatak A-3.3.

Za točku L koja se nalazi unutar trokuta ABC vrijedi

$$\sphericalangle LBC = \sphericalangle LCA = \sphericalangle LAB = \sphericalangle CAL.$$

Dokaži da je umnožak duljina dviju stranica tog trokuta jednak kvadratu duljine treće stranice.

Rješenje.



Za duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC koristimo uobičajene oznake: $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$, te $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Iz uvjeta $\sphericalangle CAL = \sphericalangle LAB$ zaključujemo da je AL simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, te je zato $\dfrac{\alpha}{2}$ veličina sva četiri jednaka kuta iz uvjeta zadatka.

Iz trokuta CLB zaključujemo

$$\sphericalangle BLC = \pi - \sphericalangle LCB - \sphericalangle CBL = \pi - \left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = \pi - \gamma.$$

Prema poučku o sinusima, u trokutu CLB vrijedi

$$\frac{|CL|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin(\pi-\gamma)} = \frac{a}{\sin\gamma}.$$

S druge strane, u jednakokračnom trokutu CAL imamo $\sphericalangle CLA = \pi - \alpha$, pa prema poučku o sinusima vrijedi

$$\frac{|CL|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Iz posljednje dvije relacije zaključujemo

$$\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\alpha}, \qquad \text{odnosno} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Međutim, primjenom poučka o sinusima na trokut ABC vidimo da je

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

pa dobivamo $bc = a^2$, odnosno $|CA| \cdot |AB| = |BC|^2$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-3.4.

Neka su A i B prirodni brojevi, a S skup svih točaka s cjelobrojnim koordinatama unutar pravokutnika s vrhovima $(0,0)$, $(A,0)$, (A,B) i $(0,B)$. Točke s cjelobrojnim koordinatama na rubu tog pravokutnika su obojene crvenom, a unutar skupa S jednom od tri boje: plavom, zelenom ili crvenom.

Za jedinični kvadrat kojemu su sva četiri vrha u S kažemo da je *poseban* ako je točno jedan par njegovih susjednih vrhova istobojan. Dokaži da je broj posebnih jediničnih kvadrata paran.

Rješenje.

Definirajmo da je dužina *važna* ako su joj oba krajnja vrha iste boje.

Ukupan broj jediničnih kvadrata kojima su sva četiri vrha u S je jednak AB. Označimo te jedinične kvadrate indeksima od 1 do AB. Za svaki od tih kvadrata definirajmo b_i kao broj važnih dužina u i-tom jediničnom kvadratu. Očito je $b_i \in \{0,1,2,3,4\}$. Nadalje, nemoguće je da vrijedi $b_i = 3$: ako su sva četiri vrha jediničnog kvadrata iste boje, tada je $b_i = 4$, a inače je nužno $b_i \leqslant 2$. Primijetimo da je kvadrat poseban ako i samo ako vrijedi $b_i = 1$.

Definirajmo broj $N \coloneqq b_1 + \cdots + b_{AB}$. U toj sumi jedini neparni pribrojnici su oni za koje je $b_i = 1$. Zato vrijedi: N je paran ako i samo ako je broj posebnih jediničnih kvadrata paran.

S druge strane, u definiciji broja N prebrojili smo sve važne dužine po svim jediničnim kvadratima u kojima se oni nalaze. Svaka važna dužina koja se nalazi na rubu pravokutnika pripada točno jednom jediničnom kvadratu, dok se sve ostale važne dužine nalaze u točno dva jedinična kvadrata.

Neka je a_u broj važnih dužina kojima se barem jedan vrh nalazi u unutrašnjosti pravokutnika, te a_v broj važnih dužina koje se nalaze na rubu pravokutnika. Zbog prethodnog pasusa zaključujemo da vrijedi $N = a_v + 2a_u$. Nadalje, sve dužine na rubu pravokutnika su važne (jer su im obje krajnje točke crvene), pa vrijedi $a_v = 2(A+B)$, odnosno $N = 2(A+B+a_u)$. Dakle, N je paran, iz čega zaključujemo da je broj posebnih jediničnih kvadrata paran, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-3.5.

Odredi sve parove (n, k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3^n = 5k^2 + 1.$$

Rješenje.

Promotrimo ostatke koje izrazi iz dane jednakosti mogu davati pri dijeljenju s 5. Vidimo da desna strana daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5. S druge strane, za sve nenegativne cijele brojeve l vrijedi:

$$3^{4l+1} \equiv 3 \pmod 5, \quad 3^{4l+2} \equiv 4 \pmod 5, \quad 3^{4l+3} \equiv 2 \pmod 5, \quad 3^{4l} \equiv 1 \pmod 5.$$

Stoga zaključujemo da 4 dijeli n. Neka je $n = 4a$. Iz početne jednadžbe sada slijedi

$$5k^2 = 3^n - 1 = 3^{4a} - 1 = (3^a - 1)(3^a + 1)(3^{2a} + 1).$$

Sva tri faktora na desnoj strani su parni brojevi, te su dodatno prva dva faktora dva uzastopna parna broja pa je jedan od njih djeljiv s 4. Zato je i cijeli umnožak djeljiv sa 16. Uvodeći $k = 4b$, imamo

$$80b^2 = 3^{4a} - 1 = (3^a - 1)(3^a + 1)(3^{2a} + 1).$$

Nadalje, kako se prva dva faktora na desnoj strani razlikuju za 2, te kako vrijedi

$$(3^{2a} + 1) = (3^a - 1)(3^a + 1) + 2,$$

zaključujemo da je najveća zajednička mjera svakog para faktora s desne strane jednaka 2, odnosno u izrazu

$$10b^2 = \frac{3^a - 1}{2} \cdot \frac{3^a + 1}{2} \cdot \frac{3^{2a} + 1}{2}$$

sva tri faktora na desnoj strani jednakosti su u parovima relativno prosti. Zato je svaki od tih faktora jednak kvadratu prirodnog broja pomnožen s 1, 2, 5 ili 10. Dodatni faktori ovise o parnosti broja a.

Ako je a paran broj, iz raspisa slučajeva za ostatke broja 3^n pri dijeljenju s 5 zaključujemo da $3^{2a} + 1$ nije djeljiv s 5. Također, nije ni djeljiv s 4, pa je nužno $3^{2a} + 1 = 2x^2$, za neki prirodan broj x. No, u ovom slučaju nema rješenja, budući da lijeva strana daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, dok desna daje 0 ili 2.

Ako je a neparan broj, tada je $2a$ oblika $4l+2$, pa zaključujemo da je $3^{2a}+1$ djeljiv s 5. Nadalje, 3^a za neparan a daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, pa zaključujemo da mora biti

$$\frac{3^a - 1}{2} = x^2, \qquad \frac{3^a + 1}{2} = 2y^2, \qquad \frac{3^{2a} + 1}{2} = 5z^2,$$

za neke prirodne x, y i z.

Iz druge jednakosti dobivamo $3^a = (2y - 1)(2y + 1)$. S desne strane imamo umnožak dva uzastopna neparna broja, pa su oni relativno prosti. Kako u umnošku daju potenciju broja 3, zaključujemo da je to moguće samo ako je manji od njih jednak 1, odnosno $y = 1$, pa je $a = 1$. U tom slučaju dobivamo da je $n = 4$ i $k = 4$, odnosno dobivamo jedino rješenje jednadžbe.

Dakle, jedino rješenje je $(n, k) = (4, 4)$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak A-4.1.

Neka je n prirodni broj. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$(1-z+z^2)(1-z^2+z^4)(1-z^4+z^8)\cdots(1-z^{2^{n-1}}+z^{2^n})=\frac{3z^{2^n}}{1+z+z^2}.$$

Rješenje.

Najprije, nužno je $1+z+z^2\neq 0$, što znači da z ne smije biti takav da je $z^3=1$ i $z\neq 1$. Odnosno, z nije neki od dva treća korijena iz 1 različit od 1.

Pomnožimo cijelu jednadžbu s $1+z+z^2$. Dobivamo jednadžbu

$$(1+z+z^2)(1-z+z^2)(1-z^2+z^4)(1-z^4+z^8)\cdots(1-z^{2^{n-1}}+z^{2^n})=3z^{2^n}.$$

Označimo s I_n lijevu stranu posljednje jednakosti. Dokažimo matematičkom indukcijom po n da vrijedi $I_n=1+z^{2^n}+z^{2^{n+1}}$. U dokazu ćemo koristiti pomoćnu tvrdnju: za svaki prirodan broj k vrijedi

$$(1+z^k+z^{2k})(1-z^k+z^{2k})=(1+z^{2k})^2-(z^k)^2=1+z^{2k}+z^{4k}.$$

Dokažimo tvrdnju. Za bazu indukcije, $n=1$, vrijedi

$$I_1=(1+z+z^2)(1-z+z^2)=1+z^2+z^4,$$

pri čemu smo iskoristili pomoćnu tvrdnju za $k=1$. Pretpostavimo da tvrdnja indukcije vrijedi za neki n, pa dokažimo da vrijedi i za $n+1$:

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=I_n\cdot(1-z^{2^n}+z^{2^{n+1}})\\&=(1+z^{2^n}+z^{2^{n+1}})(1-z^{2^n}+z^{2^{n+1}})\\&=1+z^{2^{n+1}}+z^{2^{n+2}},\end{aligned}$$

pri čemu smo u pretposljednjoj jednakosti iskoristili pretpostavku indukcije, a u posljednjoj pomoćnu tvrdnju za $k=2^n$. Time smo dokazali tvrdnju indukcije.

Tako smo dobili jednadžbu

$$1+z^{2^n}+z^{2^{n+1}}=3z^{2^n},$$

odnosno

$$z^{2^{n+1}}-2z^{2^n}+1=0,\qquad \text{tj.}\quad (z^{2^n}-1)^2=0.$$

Konačno, tražena rješenja su svi 2^n-ti korijeni broja 1, odnosno

$$z_k=\cos\frac{k\pi}{2^{n-1}}+i\sin\frac{k\pi}{2^{n-1}},\quad \text{za } k\in\{0,1,2,\ldots,2^n-1\}.$$

Svi ti brojevi uistinu jesu rješenja, jer nijedan 2^n-ti korijen iz 1 nije ujedno i treći korijen iz 1, osim samog broja 1.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x vrijedi

$$f(x) + xf(2-x) = 3x - x^2.$$

Rješenje.

Uvrstimo li $x = 1$, dobivamo $f(1) + f(1) = 2$, iz čega zaključujemo da je $f(1) = 1$.

Nadalje, neka je $x \neq 1$. Uvrstimo li $2 - x$ umjesto x, dobivamo:

$$f(2-x) + (2-x)f(x) = 3 \cdot (2-x) - (2-x)^2 = 2 + x - x^2.$$

Pomnožimo ovu jednakost s x i tako dobivenu jednakost oduzmimo od zadane. Dobivamo:

$$(x-1)^2 f(x) = x(x-1)^2.$$

Zaključujemo da je za svaki $x \neq 1$ nužno $f(x) = x$, a na početku smo pokazali i da je $f(1) = 1$. Dakle, jedini kandidat za rješenje je funkcija $f(x) = x$.

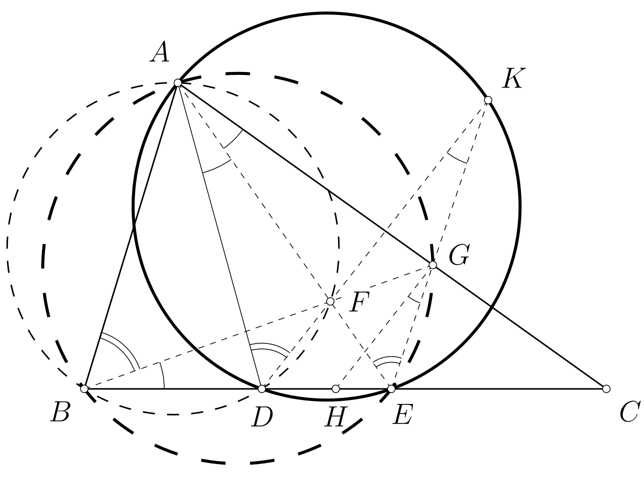
Provjerom utvrđujemo da to uistinu jest rješenje.

Zadatak A-4.3.

Na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC zadana je točka D. Simetrala kuta $\sphericalangle CAD$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Kružnica opisana trokutu ABD siječe dužinu $\overline{AE}$ u točkama A i F, a pravac BF siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki G. Pravac kroz točku G paralelan s $\overline{DF}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki H.

Dokaži da je pravac GE tangenta kružnice opisane trokutu BHG.

Rješenje.



Simetrala kuta $\sphericalangle CAD$ dijeli taj kut na dva jednaka dijela. Neka je $\varphi = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Budući da je prema uvjetima zadatka četverokut $BDFA$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle DBF = \sphericalangle DAF = \varphi$. Također, zbog iste tetivnosti vrijedi

$$\sphericalangle FDA = \sphericalangle FBA.$$

S obzirom na to da je $\sphericalangle EAG = \sphericalangle EAC = \varphi = \sphericalangle DBF = \sphericalangle EBG$, zaključujemo da je četverokut $BEGA$ tetivan. Odavde imamo

$$\sphericalangle GEA = \sphericalangle GBA.$$

Neka je K sjecište pravaca GE i FD. Iz gore pokazanih jednakosti imamo

$$\sphericalangle KDA = \sphericalangle FDA = \sphericalangle FBA = \sphericalangle GBA = \sphericalangle GEA = \sphericalangle KEA,$$

pa je četverokut $KADE$ tetivan. Zato je

$$\sphericalangle DKE = \sphericalangle DAE = \varphi.$$

Budući da su pravci DF i GH paralelni, imamo

$$\sphericalangle HGE = \sphericalangle DKE = \varphi.$$

Time smo pokazali da je

$$\sphericalangle HGE = \sphericalangle HBG,$$

iz čega prema obratu poučka o kutu između tetive i tangente zaključujemo da je GE uistinu tangenta kružnice opisane trokutu BHG.

Zadatak A-4.4.

Neka su A i B prirodni brojevi, a S skup svih točaka s cjelobrojnim koordinatama unutar pravokutnika s vrhovima $(0, 0)$, $(A, 0)$, (A, B) i $(0, B)$. Točke s cjelobrojnim koordinatama na rubu tog pravokutnika su obojene crvenom, a unutar skupa S jednom od tri boje: plavom, zelenom ili crvenom.

Za jedinični kvadrat kojemu su sva četiri vrha u S kažemo da je *poseban* ako je točno jedan par njegovih susjednih vrhova istobojan. Dokaži da je broj posebnih jediničnih kvadrata paran.

Rješenje.

Definirajmo da je dužina *važna* ako su joj oba krajnja vrha iste boje.

Ukupan broj jediničnih kvadrata kojima su sva četiri vrha u S je jednak AB. Označimo te jedinične kvadrate indeksima od 1 do AB. Za svaki od tih kvadrata definirajmo b_i kao broj važnih dužina u i-tom jediničnom kvadratu. Očito je $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Nadalje, nemoguće je da vrijedi $b_i = 3$: ako su sva četiri vrha jediničnog kvadrata iste boje, tada je $b_i = 4$, a inače je nužno $b_i \leqslant 2$. Primijetimo da je kvadrat poseban ako i samo ako vrijedi $b_i = 1$.

Definirajmo broj $N \coloneqq b_1 + \cdots + b_{AB}$. U toj sumi jedini neparni pribrojnici su oni za koje je $b_i = 1$. Zato vrijedi: N je paran ako i samo ako je broj posebnih jediničnih kvadrata paran.

S druge strane, u definiciji broja N prebrojili smo sve važne dužine po svim jediničnim kvadratima u kojima se oni nalaze. Svaka važna dužina koja se nalazi na rubu pravokutnika pripada točno jednom jediničnom kvadratu, dok se sve ostale važne dužine nalaze u točno dva jedinična kvadrata.

Neka je a_u broj važnih dužina kojima se barem jedan vrh nalazi u unutrašnjosti pravokutnika, te a_v broj važnih dužina koje se nalaze na rubu pravokutnika. Zbog prethodnog pasusa zaključujemo da vrijedi $N = a_v + 2a_u$. Nadalje, sve dužine na rubu pravokutnika su važne (jer su im obje krajnje točke crvene), pa vrijedi $a_v = 2(A + B)$, odnosno $N = 2(A + B + a_u)$. Dakle, N je paran, iz čega zaključujemo da je broj posebnih jediničnih kvadrata paran, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-4.5.

Odredi sve parove (n, k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3^n = 5k^2 + 1.$$

Rješenje.

Promotrimo ostatke koje izrazi iz dane jednakosti mogu davati pri dijeljenju s 5. Vidimo da desna strana daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5. S druge strane, za sve nenegativne cijele brojeve l vrijedi:

$$3^{4l+1} \equiv 3 \pmod 5, \quad 3^{4l+2} \equiv 4 \pmod 5, \quad 3^{4l+3} \equiv 2 \pmod 5, \quad 3^{4l} \equiv 1 \pmod 5.$$

Stoga zaključujemo da 4 dijeli n. Neka je $n = 4a$. Iz početne jednadžbe sada slijedi

$$5k^2 = 3^n - 1 = 3^{4a} - 1 = (3^a - 1)(3^a + 1)(3^{2a} + 1).$$

Sva tri faktora na desnoj strani su parni brojevi, te su dodatno prva dva faktora dva uzastopna parna broja pa je jedan od njih djeljiv s 4. Zato je i cijeli umnožak djeljiv sa 16. Uvodeći $k = 4b$, imamo

$$80b^2 = 3^{4a} - 1 = (3^a - 1)(3^a + 1)(3^{2a} + 1).$$

Nadalje, kako se prva dva faktora na desnoj strani razlikuju za 2, te kako vrijedi

$$(3^{2a} + 1) = (3^a - 1)(3^a + 1) + 2,$$

zaključujemo da je najveća zajednička mjera svakog para faktora s desne strane jednaka 2, odnosno u izrazu

$$10b^2 = \frac{3^a - 1}{2} \cdot \frac{3^a + 1}{2} \cdot \frac{3^{2a} + 1}{2}$$

sva tri faktora na desnoj strani jednakosti su u parovima relativno prosti. Zato je svaki od tih faktora jednak kvadratu prirodnog broja pomnožen s 1, 2, 5 ili 10. Dodatni faktori ovise o parnosti broja a.

Ako je a paran broj, iz raspisa slučajeva za ostatke broja 3^n pri dijeljenju s 5 zaključujemo da $3^{2a} + 1$ nije djeljiv s 5. Također, nije ni djeljiv s 4, pa je nužno $3^{2a} + 1 = 2x^2$, za neki prirodan broj x. No, u ovom slučaju nema rješenja, budući da lijeva strana daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, dok desna daje 0 ili 2.

Ako je a neparan broj, tada je $2a$ oblika $4l+2$, pa zaključujemo da je $3^{2a}+1$ djeljiv s 5. Nadalje, 3^a za neparan a daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, pa zaključujemo da mora biti

$$\frac{3^a - 1}{2} = x^2, \qquad \frac{3^a + 1}{2} = 2y^2, \qquad \frac{3^{2a} + 1}{2} = 5z^2,$$

za neke prirodne x, y i z.

Iz druge jednakosti dobivamo $3^a = (2y - 1)(2y + 1)$. S desne strane imamo umnožak dva uzastopna neparna broja, pa su oni relativno prosti. Kako u umnošku daju potenciju broja 3, zaključujemo da je to moguće samo ako je manji od njih jednak 1, odnosno $y = 1$, pa je $a = 1$. U tom slučaju dobivamo da je $n = 4$ i $k = 4$, odnosno dobivamo jedino rješenje jednadžbe.

Dakle, jedino rješenje je $(n, k) = (4, 4)$.