Pregled tema i literature za matematička natjecanja

Matija Bašić, mbasic@math.hr

Dodatna literatura

U nadi da ćemo mentorima i učenicima pomoći u postavljanju očekivanja i olakšati pripremu godišnjeg plana za dodatnu nastavu, donosimo pregled osnovnih tema po područjima uz naputke o poželjnim ishodima. U pripremi tema može poslužiti raznovrsna literatura, a baza materijala nastalih na temelju priprema međunarodnih ekipa nalazi se na stranici

natjecanja.math.hr

Sljedeće knjige obuhvaćaju teme iz svih područja. Većinom su podijeljene prema temama (nejednakosti, princip ekstrema...) ili strategijama rješavanja. Obiluju primjerima i uputama za rješavanje problema, te zadacima za samostalno rješavanje s rješenjima.

1. Arthur Engel, *Problem Solving Strategies*
2. Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving*
3. Loren C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*
4. Svetoslav Savchev, Titu Andreescu, *Mathematical Miniatures*
5. Babinskaja, *Zadaci s ruskih matematičkih olimpijada*
6. Dušan Djukić et al., *IMO Compendium*
7. Željko Hanjš, *Međunarodne matematičke olimpijade*
8. George Polya, *Kako riješiti matematički zadatak?* (*How to solve it?*)
9. George Polya, *Matematičko otkriće*
10. Yufei Zhao, http://yufeizhao.com/olympiad.html
11. Titu Andreescu et al., *Problems Around the World* (zbirke 1996-97, 1997-98, 1998-99, 1999-2000, 2000-01)

U sklopu pregleda tema po područjima donosimo dodatnu literaturu.

Pregled tema po područjima

Tradicionalno, na natjecanjima iz matematike koristimo podjelu na četiri područja: algebra, kombinatorika, geometrija, teorija brojeva. U pripremi za natjecanje vrlo je korisno znati da su sva četiri područja zastupljena na svim razinama u podjednakoj mjeri.

Za usporedbu s NOK-om, možemo navesti da je domena algebra i funkcije ono što opisujemo područjem algebra, domene oblik i prostor te mjerenja opisujemo područjem geometrija, a domenu brojevi područjima teorija brojeva i kombinatorika. Teme iz domena podatci i inifinitezimalni račun se tradicionalno ne pojavljuju na natjecanjima zbog male zastupljenosti u kurikulumu (na nacionalnom i međunarodnom nivou).

Naravno, kao što smo već obrazložili svi procesi navedeni u NOKu su vrlo važni u rješavanju natjecateljskih zadataka i razvijaju se kroz sve teme svih područja. Posebnu pažnju želimo skrenuti na područje kombinatorika koje u najmanjem opsegu ima preklapanja s redovnim gradivom, a koje je najpogodnije za razvoj svih matematičkih procesa. Zbog toga kombinatorno-logički zadaci postaju sve zastupljeniji na natjecanjima.

U ovom pregledu za svako područje donosimo popis osnovnih tema, te primjere zadataka koji su proteklih godina bili zadani na školskoj razini natjecanja. Takvi zadaci mogu poslužiti nastavnicima u poticanju rješavanja problema i oplemenjivanju nastavnog programa i u dodatnoj i u redovnoj nastavi.

Algebra

Ovo područje u najvećoj mjeri sadrži teme povezane sa školskim gradivom, posebno one teme koje su u NOKu nevedene pod domenom algebra i funkcije . Za razliku od zadataka s redovne nastave, u zadacima na natjecanjima pojavljuje se više tema istovremeno. Učenike treba poticati da uče s razumijevanjem tako da prisjećanje i izvođenje svojstava elementarnih funkcija temelje na definicijama i nekoliko osnovnih svojstava (npr. na temelju adicijske formule za sinus mogu izvesti formulu za sinus dvostrukog kuta ili umnožak sinusa i kosinusa, na temelju eksponencijalne formule mogu izvesti formulu za logaritam zbroj itd.)

Najveću pažnju potrebno je posvetiti vještini manipuliranja algebarskim izrazima jer se koristi u gotovo svim algebarskim zadacima. Uz to, ističemo važnost razumijevanja pojma funkcije i koncepta dokazivanja nejednakosti. Treba imati na umu da u zadacima u kojima treba dokazati neku nejednakost težina zadatka leži u logičkim koracima i algebarskim manipulacijama, a ne primjeni teorema.

Osnovne teme iz algebre:

- skupovi - korištenje i razumijevanje oznaka za skupove i osnovne skupovne operacije (unija, presjek, komplement)

- brojevi - osnovne računske operacije i karakteristična svojstva skupova racionalnih i realnih brojeva (decimalni brojevi, aproksimacije, uređaj, od 1.r.) te kompleksnih brojeva (konjugiranje, algebarska zatvorenost, od 2.r.)

- algebrski izrazi - korištenje nepoznanica, parametara i općih brojeva, manipuliranje algebarskim izrazima, rješavanje (ne)jednadžbi i sustava, uključujući ideju supstitucije

- nejednakosti (dodatna tema na svim razinama osim školske razine u 1.r.) -

  školska razina: razumijevanje pojma nejednakosti i dokazivanje korištenjem činjenice da je kvadrat realnog broja nenegativan broj (ili ekvivalentno korištenje AG–nejednakosti s dva člana)

  županijska i državna razina: složeniji zadaci koji koriste nejednakosti među sredinama s proizvoljno mnogo članova, nejednakost Schwarz-Cauchy-Buniakowski

- računanje konačnih zbrojeva (Gaussova dosjetka, rastav na parcijalne razlomke, teleskopiranje, od 1.r.)

- korištenje matematičke indukcije u dokazivanju algebarskih tvrdnji, nizovi i redovi (4.r.)

- pojam funkcije, svojstva elementarnih funkcija i njihovih *grafova* -

  - funkcija najveće cijelo (od 1.r.),
  - linearna funkcija, (veza s proporcionalnošću, 1.r.),
  - kvadratna funkcija i polinomi višeg stupnja (značenje diskriminante, traženje nultočaka, Vieteove formule, 2.r.),
  - eksponencijalna i logaritamska funkcija (eksponencijalna formula, monotonost, pojam inverza, od 3.r. na natjecanjima),
  - trigonometrijske funkcija (adicijske formule, izvođenje ostalih formula, periodičnost, ograničenost 3.r.)

- funkcijske jednadžbe (4.r.)

Dodatna literatura iz algebre:

- Kiran Kedlaya, *A < B (A is less than B)*
- Titu Andreescu, Zuming Feng, *101 Problems in Algebra*
- B. J. Venkatachala, *Functional Equations: A Problem Solving Approach*
- Radmila Bulajich Manfrino et al., *Topics in Algebra and Analysis*

Primjeri laganih zadataka iz algebre za školsku razinu:

1. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a + b)$.

   Odredi $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}$. *(školsko 2015, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: manipuliranje algebarskim izrazima (formule za kvadrat binoma i zbroj kubova), matematička preciznost koja se ogleda u komentiranju situacija u kojima dijelimo s izrazom koji je potencijalno 0.

2. Anja i Vanja su sudjelovale u utrci. Broj trkača koji su završili utrku prije Anje jednak je broju trkača koji su završili nakon nje. Broj trkača koji su završili utrku prije Vanje je tri puta veći od broja trkača koji su završili nakon nje. Točno 10 trkača završilo je utrku između Anje i Vanje. Ako su svi trkači završili utrku, te nikoja dva trkača nisu završila u isto vrijeme, odredi ukupan broj trkača. *(školsko 2016, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, uvođenje dodatnih oznaka, matematičko modeliranje, manipuliranje algebarskim izrazima, rješavanje linearne jednadžbe ili sustava dvije linearne jednažbe.

3. Odredi sve realne brojeve c za koje je jedno rješenje kvadratne jednadžbe

   $$27x^2 - 12x + c = 0$$

   kvadrat drugog rješenja.

   (školsko 2016, 2.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, Vieteove formule za kvadratnu funkciju, rješavanje kvadratne jednadžbe.

4. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

   $$|z^2 - i| = 1 \quad , \quad |z| = \sqrt{2}.$$

   (školsko 2014, 2.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: zapis kompleksnog broja preko njegovog realnog i imaginarnog dijela, rješavanje sustava koji se svodi na kvadratnu jednadžbu.

5. Dokaži da je

   $$\log_2\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log_2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \log_2\left(1 + \frac{1}{2014}\right) < 11.$$

   (školsko 2014, 3.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: poznavanje formule o logaritmu produkta, korištenje teleskopiranja (ne nužno pod tim imenom), razumijevanje koncepta nejednakosti, korištenje monotonosti logaritamske funkcije.

6. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

   $$\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

pri čemu je x realni broj.

(školsko 2015, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: manipuliranje algebarskim izrazima, korištenje standardnih svojstava funkcija sinus i kosinus i veze sinusa i kosinusa istog argumenta, ideja o transformaciji izraza (svođenje na funkciju u jednoj varijabli npr. $\sin 2x$), razumijevanje koncepta slike funkcije (ne nužno pod tim imenom) i poznavanje slike funkcije sinus.

7. Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je -2, a peti je 6. Prva četiri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio? *(školsko 2014, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: definicija artimetičkog i geometrijskog niza, korištenje oznaka, čitanje s razumijevanjem i zapisivanje uvjeta zadanih riječima matematičkim formulama, rješavanje kvadratne jednadžbe.

8. Neka je n prirodni broj i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$. Izračunaj $\dfrac{S_n+1}{(n+1)!}$.

   (školsko 2015, 4.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: poznavanje oznaka za zbroj i faktorijel, postavljanje hipoteze, dokazivanje tvrdnje matematičkom indukcijom.

Kombinatorika

U području kombinatorika metode dokazivanja su mnogo važnije od bilo kakvih teoretskih rezultata. Zadaci ne zahtijevaju nikakvo posebno predznanje, već prvenstveno logičko razmišljanje. Takvi zadaci vrlo izraženo razvijaju sve matematičke procese (opisane NOK-om). Zato je za zadatke ovakvog tipa posebno važan popis strategija za rješavanje problema koje smo naveli ranije u tekstu. Učenicima je u ovom području najteže formulirati svoje misli i opažanja, pa teme koje navodimo treba prepoznati i podučavati kao alate koji omogućavaju precizno matematičko izražavanje i formuliranje valjanih dokaza.

Prema načinu na koji su postavljeni, zadatke možemo neformalno podijeliti u tri kategorije. Prvi tip zadataka su oni u kojima je potrebno pokazati da je neka situacija moguća. U nekim zadacima možemo dati ekplicitnu konstrukciju ili konstrukciju napraviti manje direktno koristeći matematičku indukciju. U nekim drugim zadacima postojanje pokazujemo na nekonstruktivan način, npr. koristeći Dirichletov princip možemo pokazati da objekt s traženim svojstvom postoji, iako ga ne možemo opisati eksplicitno.

U drugom tipu zadataka pokazujemo da neka situacija nije moguća. Osim eksplicitne konstrukcije kontraprimjera kojim pokazujemo da tvrdnja ne vrijedi, nemogućnost dokazujemo koristeći invarijante. Invarijante ili stalne veličine su svojstva koja se ne mijenjaju dok vršimo određeni proces. Koristimo ih kako bismo pokazali da uz zadane pretpostavke (početno stanje) nije moguće ispuniti tražene uvjete (završno stanje). Učenici uspješno koriste invarijante već u osnovnoj školi iako ih ne zovu tako. Na primjer, bojaju ploču na šahovski način ili promatraju parnost neke veličine.

Treći tip su zadaci u kojima je potrebno odrediti broj načina da se ostvari neka situacija, tj. to su zadaci iz prebrojavanja. Osnovne principe prebrojavanja velik broj učenika savlada već u osnovnoj školi. Kod zahtjevnijih zadataka učenici dobivaju pogrešna rješenja zbog logičkih grešaka u većoj mjeri nego kod zadataka iz drugih područja. Takve pogreške su jako dobar poticaj za diskusiju, te će ih mentor iskoristiti za razgovor o različitim pristupima rješavanju zadatka.

Iskustvo govori da učenicima treba posebnu pažnju osvrnuti na zadatke u kojima se traži neka optimalna situacija (najmanji ili najveći broj takav da...). U tim zadacima rješenje uvijek ima dva bitno različita dijela. U jednom dijelu rješenja pokazujemo da se odgovor može postići (npr. primjerom), dok u drugom dijelu pokazujemo da odgovor ne možemo poboljšati (npr. dvostrukim prebrojavanjem, Dirichletovim principom ili nekom drugom metodom).

Osnovne teme iz kombinatorike:

- logički zadaci (osnovna škola);
- Dirichletov princip (osnovna škola);
- prebrojavanje – osnovni principi (1.r. školsko), dvostruko prebrojavanje (županjska i državna razina);
- invarijante (stalne veličine)

  školska razina: jednostavne invarijante koje učenici sretnu već u osnovnoj školi, poput parnosti, ostataka pri dijeljenju i bojanja;

  županijska i državna razina: složenije invarijante algebarskog tipa;
- princip ekstrema (u što ubrajamo i metodu beskonačnog spusta);
- zadaci optimizacije - dokazivanje ograde i konstrukcija primjera
- matematička indukcija (kao dodatna tema 3. r. na županijskoj razini i od 4. r. na školskoj razini).

Dodatna literatura iz kombinatorike:

- Mario Krnić, *Dirichletov princip*
- Maja Cvitković, *Kombinatorika*
- Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*
- skripte za predavanja i vježbe iz kolegija *Diskretna matematika*, PMF-MO
- Titu Andreescu, Zuming Feng, *102 Combinatorial Problems*
- Jiri Herman et al., *Counting and Configurations*
- Pablo Soberón, *Problem-Solving Methods in Combinatorics*

Primjeri laganih zadataka iz kombinatorike:

1. Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9. Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici? *(školsko 2016, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: razlikovanje slučajeva, konstrukcija primjera, korištenje parnosti kao invarijante

2. U kutiji se nalazi po k loptica s oznakom k za sve $k = 1, 2, \ldots, 50$. Iz kutije se izvlače loptice bez gledanja. Koliko je najmanje loptica potrebno izvući da bismo bili sigurni da je izvučeno barem 10 loptica s istom oznakom? *(školsko 2014, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: primjena Dirichletova principa, konstrukcija primjera

3. Jednog jutra, 11 prijatelja odlučilo je obojati veliku ogradu. Bojanje je počelo u 9 sati i završilo u 17 sati. Svatko je započeo na puni sat i radio točno dva sata. Možemo li biti sigurni da je u nekom periodu istovremeno radilo barem četvero prijatelja? *(školsko 2016, 2.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, grafičko reprezentiranje vremena, primjena Dirichletova principa

4. Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$. *(školsko 2014, 2.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: primjena osnovnih principa prebrojavanja (princip bijekcije ili princip uzastopnog prebrojavanja)

5. Šahovska ploča je ploča s 8 redaka i 8 stupaca čija su polja obojana naizmjence crno-bijelo tako da je polje u prvom retku i prvom stupcu obojano crno. U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26, a zbroj svih brojeva u neparnim stupcima jednak 43.

   Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim redcima nakon te promjene? *(školsko 2014, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: zapisivanje uvjeta zadanih riječima na algebarski način, povezivanje

6. Gornja desna četvrtina šahovske ploče (dimenzija 8×8) je prekrivena papirom. Koliko najviše topova možemo postaviti na preostali dio šahovske ploče tako da se međusobno ne napadaju? Na koliko načina se to može napraviti? *(školsko 2013, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: konstrukcija primjera, korištenje osnovnih principa prebrojavanja

7. Na ploči dimenzija 5×7 kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralnosimetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za $180°$ oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti? *(školsko 2014, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: osnovni principi prebrojavanja, binomni koeficijent, korištenje simetrije

8. U kutiji se nalazi jedna crvena i pet bijelih kuglica označenih brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Ne gledajući, Domagoj izvlači jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvuče crvenu kuglicu, nakon čega prekida izvlačenje. Izvučene kuglice se ne vraćaju u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama barem 10? *(školsko 2015, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: računanje uvjetne vjerojatnost, razlikovanje slučajeva

Geometrija

Geometrijsko područje obuhvaća teme opisane u NOK-u u domenama oblik i prostor te mjerenje. Trenutni školski kurikulum sadrži mnoge teme iz geometrije, ali nažalost rezultati natjecanja pokazuju da na redovnoj nastavi učenici savladaju definicije geometrijskih pojmova i osnovna svojstva (npr. formule za površinu), ali ne i vještinu rješavanja geometrijskih zadataka u kojima je ta svojsta potrebno samostalno prepoznati i povezati. Iako je broj geometrijskih pojmova i teorema koji se obrade na redovnoj nastavi poprilično velik, oni se vrlo uspješno usvajaju. No, to nije dovoljno za uspješno rješavanje zadataka. Zato je pregled koji donosimo sažet, a veći naglasak želimo dati napomenama za rješavanje problema.

Najveći broj zadataka iz geometrije možemo klasificirati kao zadatke iz klasične planimetrije. U manjoj mjeri, i to isključivo na nižim razinama natjecanja u 3. i 4. razredu, pojavljuju se zadaci iz stereometrije i geometrije krivulja drugog reda.

Pristupe u rješavanju dijelimo na sintetičke i analitičke. Za uspješno rješavanje zadataka korisno je poznavati oba pristupa, osobito s osjećajem koji od pristupa je pogodniji za koji tip zadatka. Zbog toga preporučujemo da se i na dodatnoj nastavi posebna pažnja posveti usporedbi različitih pristupa rješavanju pojedinog zadatka.

Sintetički pristup počiva na korištenju geometrijskog zora i logičkoj dedukciji, te je idealan je za uvođenja pojma dokaza u matematičkom obrazovanju. Učenici svoje prve dokaze naprave upravo kroz rješavanje geometrijskih zadataka i kroz takve zadatke tijekom cijele srednje škole poboljšavaju svoje sposobnosti rješavanja problema i dokazivanja. Zbog toga važnost geometrije u obrazovanju ne jenjava iako planimetrija već dugo nije u fokusu znanstvenika-matematičara.

S druge strane, analitički pristup je karakteriziran korištenjem formula, trigonometrije, vektora i koordinatne metode. Važno je naglasiti da je pogrešno analitički pristup prikazivati kao korištenje prečaca i formula, već ga treba podučavati s naglaskom na razumijevanju veza između geometrije i algebre čime jačamo sposobnost učenika za povezivanje, interdiciplinarno razmišljanje i matematičko modeliranje.

Obrazovni sustav s godinama sve više naginje analitičkom pristupu (npr. geometrijska svojstva krivulja drugog reda se uopće ne obrađuju, a ne obrađuju se ni složeniji planimetrijski zadaci), dok su natjecanja iz matematike na svim razinama zadržala veliki naglasak na sintetičkom pristupu. Kao posljedicu možemo uočiti da postoji velik broj natjecatelja koji izbjegavaju geometriju na natjecanjima.

Iskustva pokazuju da se geometrijski zor može uvježbati i da je geometrija (zbog činjenice da su ljudi vizualna bića) područje u kojem je najlakše napredovati (na svim razinama, od početničke do olimpijske). Još je neobičnije koliko učenika tih činjenica nije svjestan. Zbog toga smatramo da mentor može učiniti mnogo u poboljšanju rezultata svojih učenika za sintetičko rješavanje geometrijskih zadataka. Najvažniji ishodi dodatne nastave vezani uz geometriju su vezani uz vještine koje su najmanje zastupljene u redovnoj nastavi i koje su učenicima najteže. To su crtanje dodatnih elemenata sa svrhom, vještina lovljenja kutova (eng. *angle chasing*) i zapisivanje dokaza.

Osnovne teme iz geometrije:

- Pitagorin i Euklidov teorem
- sukladnost i sličnost - uočavanje i korištenje u složenim dokazima
- paralelnost - korištenje transverzale, zbroj kutova u trokutu, dijagonale paralelograma se raspolavljaju
- karakteristične točke trokuta - dokazivanje konkurentnosti pravaca, teorem o simetrali kuta, srednjica trokuta, težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1

- površine - rastavljanja likova i osnovne formule za površinu trokuta, metoda površine u dokazima iz planimetrije
- krug i kružnica (1.r. od državne razine, ostali razredi od školske razine) -

  tetivni četverokut: obodni i središnji kut, Talesov teorem, potencija točke obzirom na kružnicu

  tangencijalni četverokut: jednakost duljina odsječaka tangenti
- primjena trigonometrije - teorem o sinusima i teorem o kosinusu (3.r.)
- stereometrija (3.r.) - računanje obujma geometrijskih tijela, crtanje presjeka tijela ravninom
- vektori (3.r.)
- analitička geometrija - koordinatna metoda (od 1.r.), krivulje drugog reda (na natjecanjima od 4.r.)

Dodatni teoremi koji mogu poslužiti kao tema na dodatnoj nastavi i čije korištenje može pomoći u rješavanju natjecateljskih zadataka, ali nije nužno na školskoj, županijskoj ili državnoj razini

- Ptolomejev teorem, teorem o kutu tetive i tangente, Stewartov teorem, Cevin teorem, Menelajev teorem itd.

Dodatna literatura iz geometrije:

- Anđelko Marić, *Planimetrija*
- Evan Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad*
- Yufei Zhao (notes), *Lemmas in Euclidean Geometry*
- Arseniy Akopyan, *Geometry in Figures*
- Vladimir Prasolov, *Plane Geometry*
- Sotirios E. Louridas, Michael Th. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry*
- Mea Bombardelli, Dijana Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

Primjeri laganih geometrijskih zadataka:

1. Dan je kvadrat $ABCD$ stranice duljine a. Vrhovi A i C središta su dviju kružnica koje prolaze točkama B i D. Ako su sjecišta tih kružnica s dijagonalom $\overline{AC}$ točke M i N, odredi površinu četverokuta $BMDN$. *(školsko 2016, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: rastavljanje površina, računanje površine četverokuta s okomitim dijagonalama (tj. pravokutnog trokuta), korištenje simetrije

2. Dan je pravilni 2013-erokut $A_1A_2\ldots A_{2013}$. Neka je S sjecište dužina $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle A_3SA_4$. *(školsko 2013, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: unutarnji kutovi mnogokuta, zbroj kutova u trokutu

3. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$. *(školsko 2015, 2.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: karakteristične točke trokuta, obodni i središnji kut

4. Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredi $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE$. *(školsko 2016, 2.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: uočavanje tetivnih četverokuta, Talesov teorem

5. Neka je ABC pravokutan trokut i $\overline{CN}$ njegova visina. Ako je $|AC| = |BN| = 1$, kolika je duljina hipotenuze $\overline{AB}$? *(školsko 2013, 1.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: Euklidov i Pitagorin teorem, uvođenje vlastitih oznaka, rješavanje kvadratne jednadžbe

6. Neka je $ABCD$ tetraedar u kojem je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 90°$, $|AD| = 2\sqrt{2}$ te $|AB| = |AC| = 3$. Odredi polumjer sfere upisane tom tetraedru. *(školsko 2015, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: formule za obujam sfere i tetraedra, crtanje poprečnih presjeka, karakteristične točke trokuta

7. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$. Dokaži da je $|AC| < 2|BC|$. *(školsko 2014, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: primjena trigonometrije ili nejednakost trokuta

8. Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dužina $\overline{BE}$ siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki G, a dužinu $\overline{DF}$ u točki H. Ako je $|CG| = |HG| = 3$, $|BG| = |HD| = 2$ i $|HF| = 5$, odredi $|AC|$. *(školsko 2016, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: potencija točke obzirom na kružnicu (ili obodni kutovi i sličnost)

Teorija brojeva

Teorija brojeva je područje koje pokriva teme vezane uz prirodne brojeve i djeljivost obuhvaćene domenom brojevi u NOK-u. Ovo klasično područje je i danas vrlo živo područje istraživanja i obiluje otvorenim problemima. Samo mala modifikacija može jednostavno pitanje pretvoriti u dosad nerješivi problem i obratno.

Svi osnovni pojmovi potrebni za rješavanje zadataka na nižim razinama natjecanja obrade na redovnoj nastavi, a teme iz teorije brojeve su u Hrvatskoj tradicionalno sastavni dio dodatne nastave gotovo svakog mentora. S druge strane, opseg gradiva posvećen teoriji brojeva je jako malen i rezultati natjecanja pokazuju da učenici bez dodatne pripreme nemaju dovoljno iskustva za uspješno rješavanje ni najjednostavnijih zadataka. Uz nedostatak tema iz teorije brojeve u redovnom programu, jedan od uzroka za slabije rezultate na zadacima iz ovog područja mogao bi biti u prespecifičnom odabiru tema i metoda pri kreiranju programa dodatne nastave.

Mentorima bismo preporučili da učenike usmjere na savladavanje osnovnih principa djeljivosti i njihove primjene kroz velik broj zadataka, te podsjetiti da za niže razine natjecanja nije potrebno obrađivati veći broj naprednih tema (poput Eulerovog teorema). Osnovne teme treba pripremiti već za školsko natjecanje i to od 1.razreda.

Najčešći tip zadataka iz teorije brojeva su diofantske jednadžbe, no treba primijetiti da je ta tema vrlo široka i da ju ne navodimo u pregledu iz teorije brojeva jer smatramo da je potrebno osvjestiti da u rješavanju koristimo razne metode. Diofantske jednadžbe razlikujemo prema metodama rješavanja pri čemu te metode koristimo i u drugim zadacima. Kao u kombinatorici, te metode možemo podijeliti na one kojima dobivamo rješenja (faktorizacija, metoda kvocijenta) i one kojima pokazujemo da nema rješenja (promatranje ostataka).

Nekoliko vrlo elementarnih aspekata bismo posebno izdvojili. Jedna od najvažnijih vještina u rješavanju laganih zadataka iz teorije brojeva je korištenje vlastitih oznaka na način koji omogućava redukciju problema na jednostavniji. Primjeri su uvođenje mjere (tj. zapisivanje prirodnih brojeva n i m u obliku $n = d \cdot u$ i $m = d \cdot v$ pri čemu je $d = M(n, m)$ i $M(u, v) = 1$) ili zapisivanje prirodnog broja n u obliku $n = 2^k \cdot m$, pri čemu je m neparan broj.

Drugi aspekt koji bismo željeli istaknuti je korištenje osnovnog teorema aritmetike koji kaže da svaki prirodni broj možemo na jedinstven način (do na poredak faktora) prikazati kao produkt prostih brojeva. Ta netrivijalna činjenica je učenicima poznata od osnovne škole. Ističemo ju jer najčešći primjer tvrdnji koje učenici prepoznaju kao očite i nedovoljno ili neispravno argumentiraju su upravo one koje u svojem dokazu koriste taj teorem. Takva je, na primjer, tvrdnja: ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $a^2 = b^3$, onda postoje prirodni brojevi c i d takvi da je $a = c^3$ i $b = d^2$. Mnogi učenici tvrde da je ta činjenica očita, a mali broj njih osjeća da ju trebaju dokazati i još manje ih to zna učiniti.

Osnovne teme iz teorije brojeve:

- zadaci sa znamenkama, kriterij djeljivosti za 3 i 9, korištenje dekadskog zapisa
- djeljivost – djelitelji (broj, sparivanje), mjera, rastav na proste faktore
- Euklidov algoritam i linearne diofantske jednadžbe
- metoda faktorizacije (nelinearne diofantske jednadžbe i drugi zadaci)
- metoda kvocijenta
- periodičnost ostataka potencija modulo n, sustavi ostataka kvadrata/kubova modulo n (nelinearne diofantske jednadžbe i drugi zadaci)

Dodatna literatura iz teorije brojeva:

- Peter Vandendriessche, Hoojoo Lee, *Problems in Elementary Number Theory*
- Michael Th. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory*
- Naoki Sato, *Number Theory*
- Dolinka, *Elementarna teorija brojeva*
- Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

Primjeri laganih zadataka:

1. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.
   (školsko 2015, 1.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: ideja sparivanje djelitelja, zapisivanje uvjeta zadanog riječima formulom

2. Koji broj ima više djelitelja u skupu prirodnih brojeva, 2013^2 ili 20480 ?
   (školsko 2013, 2.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: prebrojavanje djelitelja prirodnog broja koristeći rastav na proste faktore

3. Dokaži da zbroj svih troznamenkastih brojeva čiji se dekadski zapis sastoji od tri različite znamenke različite od nula ima barem tri različita prosta djelitelja. *(školsko 2013, 2.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, dekadski zapis prirodnog broja, korištenje vlastitih oznaka, dokaz djeljivosti na temelju faktorizacije

4. Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (m, n) zadovoljava jednadžbu $m^2 - n^2 = 2^{2013}$? *(školsko 2013, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: metoda faktorizacije, razlikovanje slučajeva, prebrojavanje djelitelja

5. Ako su p i $p^2 + 8$ prosti brojevi, dokaži da je i broj $p^3 + 4$ prost. *(školsko 2014, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: razlikovanje slučajeva, ostaci kvadrata pri dijeljenju brojem 3

6. Odredi najveći prirodni broj n takav da

$$n + 5 \mid n^4 + 1395.$$

   (školsko 2015, 3.r.)

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: metoda kvocijenta, manipuliranje algebarskim izrazima (formula za razliku kvadrata)

7. Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki 1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj. *(školsko 2015, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: dokaz korištenjem obrata po kontrapoziciji, dokz djeljivost na temelju faktorizacije

8. Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj. *(školsko 2014, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: razlikovanje slučajeva, periodičnost ostataka kvadrata pri dijeljenju brojem 10

Interdisciplinarne teme

Natjecateljski zadaci vrlo često zahtjevaju znanja iz raznih područja. Dapače, jedna od najvažnijih vještina koja se na natjecanjima promiče je povezivanje različitih dijelova matematike i primjena matematičkih alata na razne nestandardne probleme. Na školskoj razini ovakvi zadaci ne zahtjevaju poznavanje posebnih metoda, već povezivanje osnovnih činjenica i vještina.

Neke interdisciplinarne teme:

- kombinatorna geometrija
- primjena trigonometrije u geometriji
- analitička geometrija
- kombinatorna teorija brojeva
- geometrijska vjerojatnost

Primjeri laganih zadataka mješovitog tipa:

1. U ravnini je nacrtano sto kružnica s istim središtem polumjera $1, 2, \ldots, 100$. Najmanji krug obojan je crvenom bojom, a svaki od 99 kružnih vijenaca omeđenih dvjema kružnicama crvenom ili zelenom

bojom tako da su susjedna područja različitih boja.

Odredi ukupnu površinu zeleno obojanih područja. *(školsko 2015, 1.r)*

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: formula za površinu kruga (odn. kružnog vijenca), korištenje formule za razliku kvadrata, računanje zbroja prvih 100 prirodnih brojeva

2. U koordinatnom sustavu označene su sve cjelobrojne točke (x, y) pri čemu je $1 \leqslant x \leqslant 200$ i $1 \leqslant y \leqslant 100$, ukupno 20000 točaka. Koliko ima dužina duljine $\sqrt{5}$ čiji su krajevi označene točke? *(školsko 2013, 2.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: računanje udaljenosti točaka u koordinatnom sustavu, reprezentiranje pravokutnika dijagonalom, prebrojavanje pravokutnika u cjelobrojnoj mreži, razlikovanje slučajeva

3. Neka je ABC trokut s težištem T u kojem su točke D i E redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Ako je trokut ATE jednakostraničan, odredi kosinus kuta $\sphericalangle DAB$. *(školsko 2016, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, primjena teorema o kosinusu (ili o sinusima)

4. Odredi najmanji prirodni broj n takav da u svakom skupu koji se sastoji od n cijelih brojeva postoje tri međusobno različita elementa a, b i c takva da je $ab + bc + ca$ djeljivo sa 3. *(školsko 2015, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: određivanje optimalne vrijednosti, dokaz za gornju ogradu na temelju razlikovanje slučajeva u ovisnosti o ostacima pri dijeljenju brojem 3, konstrukcija primjera

5. Iz intervala $[0, 1]$ na slučajan način biraju se brojevi a i b. Kolika je vjerojatnost da jednadžba $ax^2 + bx + a = 0$ nema realnih rješenja? *(školsko 2015, 3.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: korištenje diskriminante, geometrijska vjerojatnost, računanje površine trokuta

6. Za realni broj a, neka je $\mathcal{P}_a$ parabola s jednadžbom $y = x^2 + ax + (2014 - a)$.

   Dokaži da sve parabole $\mathcal{P}_a$ prolaze istom točkom. *(školsko 2014, 4.r.)*

   Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: povezivanje geometrijske i algebarske interpretacije krivulje drugog reda