IMO pripreme 2015 – Kombinatorika

sastavio: Matija Bašić

1. zadatak: (Italija 1999) Albert i Barbara igraju sljedeću igru. Na stolu se nalazi 1999 štapića: svaki igrač u jednom potezu uklanja sa stola barem jedan štapić, a najviše pola preostalih štapića. Igrač koji ostavi samo jedan štapić na stolu gubi igru. Barbara igra prva. Odredi koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Gledamo pobjedničke i gubitničke pozicije počevši od kraja.

Rješenje. Kažemo da je broj *beznadan* ako igrač koji igra s k štapića na stolu nema **pobjedničku strategiju**. Ako je k beznadan, onda je i $2k+1$: igrač koji na stolu ima $2k+1$ štapića može ostaviti samo hrpu od $k+1$, $k+2, \dots$ ili $2k$ štapića, od kojih drugi igrač može ostaviti k štapića. Budući da je 2 beznadan, slijedi da su beznadni i brojevi 5, 11, 23, $\dots$, $3 \cdot 2^n - 1$ za sve $n \geq 0$. Obratno, ako je $3 \cdot 2^n - 1 < k < 3 \cdot 2^{n+1} - 1$, onda igrač koji igra s k štapića može ostaviti $3 \cdot 2^n - 1$ štapića i tako osigurati pobjedu. Budući da 1999 nije oblika $3 \cdot 2^n - 1$, slijedi da nije beznadan i zato Barbara ima pobjedničku strategiju.

2. zadatak: (Kina 2011) Kažemo da je podskup $M \subseteq \{1, 2, \dots, 2011\}$ sjajan ako zadovoljava sljedeće svojstvo: Među bilo koja tri elementa u M postoje dva, a i b, takvi da a dijeli b ili b dijeli a. Odredi maksimalan broj elemenata u sjajnom podskupu M.

Rješenje. Lako je provjeriti da je skup

$$M = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}, 3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, \dots, 3 \cdot 2^9\}$$

sjajan i ima 21 element. Uočite da smo M **konstruirali** koristeći dvije familije brojeva unutar kojih za svaka dva elementa a i b vrijedi $a|b$ ili $b|a$.

Pretpostavimo da sjajan skup M ima barem 22 elementa i neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ njegovi elementi. Primijetimo da vrijedi $a_{n+2} \geqslant 2a_n$ za sve n. Zaista, pretpostavimo li suprotno, dobivamo $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < 2a_n$ za neko $n < k+2$ i zato među brojevima a_n, a_{n+1} i a_{n+2} nikoji ne dijeli niti jednog drugog, što je kontradikcija s uvjetom u zadatku.

Ovo je ključni dio!

Iz toga slijedi

$$a_4 \geqslant 2a_2 \geqslant 4, \quad a_6 \geqslant 2a_4 \geqslant 8, \quad \ldots \quad a_{22} \geqslant 2a_{20} \geqslant 2^{11} > 2011,$$

što je kontradikcija. Dakle, maksimalan broj elemenata u sjajnom podskupu je 21.

3. zadatak: (Bugarska 1999) Na natjecanju 8 sudaca ocijenjuje natjecatelje jednom od dvije ocjene: *prošao* ili *pao*. Poznato je da su za svaka dva natjecatelja, dva suca ocijenila oba natjecatelja s prošao; dva suca su ocijenila prvog natjecatelja s prošao i drugog s pao; dva suca su ocijenila prvog natjecatelja s pao i drugog s prošao; te konačno dva suca su oba natjecatelja ocijenila s pao. Odredi najveći mogući broj natjecatelja.

Rješenje. Označimo suce brojevima 1, 2, …, 8. Ako je o ocjena (prošao ili pao) koju je neki sudac dao natjecatelju, onda ćemo sa $\overline{o}$ označiti suprotnu ocjenu.

Definirajte što ćete brojati!

Ako par sudaca ocijeni nekog natjecatelja istom ocjenom to ćemo nazivati *slaganje*. Dokažimo prvo da bilo koja dva suca mogu imati najviše tri slaganja. Pretpostavimo suprotno da se suci 1 i 2 slažu oko 4 natjecatelja A, B, C, D, te neka su a, b, c, d redom ocjene koje su dali tim natjecateljima. Pretpostavimo nadalje da je su suci 3 i 4 ocijenili natjecatelja A s a, a natjecatelja B s $\overline{b}$; da su suci 5 i 6 ocijenili A i B redom s $\overline{a}$ i $\overline{b}$; te da su suci 7 i 8 ocijenili A i B redom s $\overline{a}$ i b.

Prema kriteriju za natjecatelje A i C, suci 3 i 4 su oba dali C ocjenu $\overline{c}$, te su natjecatelju D dali ocjenu $\overline{d}$. Slično iz kriterija za natjecatelje B i C, slijedi da su suci 5 i 6 dali C ocjenu c i D ocjenu d. No, tada kriterij nije ispunjen za natjecatelje C i D, što je kontradikcija.

Dakle, svaki par sudaca ima najviše tri slaganja, pa je ukupan broj slaganja najviše $3 \cdot \binom{8}{2} = 84$. S druge strane, svakom natjecatelju je točno četiri suca dalo ocjenu prošao, te četiri suca ocjenu pao, pa broj slaganja po natjecatelju iznosi $\binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 12$. Iz ovoga zaključujemo da je broj natjecatelja najviše $\frac{84}{12} = 7$. Sljedeća tablica pokazuje da je moguće zadovoljiti uvjete zadatke ako je broj natjecatelja 7.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	0	1
6	0	1	0	0	1	1	0
7	0	0	1	1	0	1	0
8	0	0	1	0	1	0	1

4. zadatak: (Japan) Dan je prirodan broj $n \geqslant 3$. Dokaži da postoji skup A_n s n elemenata takav da za svaki $a \in A_n$ produkt ostalih elemenata iz A_n daje ostatak 1 pri dijeljenju s a.

Nemojte zaboraviti na indukciju! Ako ne možete dokazati traženu tvrdnju, možda možete malo modificiranu.

Rješenje. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_k$ niz različitih prirodnih brojeva većih od 1 takvih da je $a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_k \equiv -1 \pmod{a_i}$, za $1 \leqslant i \leqslant k$. Neka je $b \in \{-1, 1\}$ i definirajmo $a_{k+1} = a_1 \cdots a_k - b$.

Tada je $a_{k+1} \geqslant 2a_i - 1 > a_i$ za $1 \leqslant i \leqslant k$, te vrijedi

$$a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_k a_{k+1} \equiv b \pmod{a_i}$$

za sve $1 \leqslant i \leqslant k+1$. Za $i = k+1$ prema definiciji a_{k+1}, a za $i < k$ jer je

$$(a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_k)a_{k+1} \equiv (-1)(-b) = b \pmod{a_i}.$$

Konstrukciju skupa A_n sad možemo napraviti tako da krenemo od $a_1 = 2$ i $a_2 = 3$, te izvršimo opisanu konstrukciju $n - 3$ puta sa $b = -1$, te još jednom sa $b = 1$. Dobivenih n brojeva čini A_n.

5. zadatak: (Kina 1999) Dano je 99 svemirskih stanica. Svaki par stanica je povezan tunelom. Postoji 99 dvosmjernih glavnih tunela, a svi ostali tuneli su isključivo jednosmjerni. Grupu od 4 stanice nazivamo povezanom ako se u svaku stanicu te grupe može doći iz bilo koje druge stanice iz grupe tako da se koristi samo 6 tunela koji povezuje te 4 stanice. Odredi najveći mogući broj povezanih grupa.

Rješenje. U grupi od 4 stanice, kažemo da je stanica *problematična* ako tri jednosmjerna tunela vode u nju ili tri jednosmjerna tunela vode iz nje. U svakoj grupi može postojati najviše jedna problematična stanica svakog tipa, tj. najviše dvije problematične stanice. Također, ako je stanica problematična u nekoj grupi, onda ta grupa nije povezana.

Analizirajući uvjet povezanosti grupe, dolazimo do problematičnih vrhova.

Označimo stanice brojevima 1, 2, ..., 99. Za $i = 1, 2, \ldots, 99$ neka je a_i broj jednosmjernih tunela koji vode u stanicu i, a b_i broj jednosmjernih tunela koji vode iz stanice i. Budući da postoji 99 dvosmjernih tunela vrijedi

$$\sum_{i=1}^{99} a_i + b_i = 2 \cdot \left[\binom{99}{2} - 99\right] = 99 \cdot 96.$$

Uvedimo oznaku $f(x) = \binom{x}{3} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$ za sve realne brojeve x. Stanica i je problematična u $f(a_i) + f(b_i)$ grupa od 4 stanice. Zbrojimo li to po svim stanicama dobivamo vrijednost

Definirajte što ćete brojati!

$$S = \sum_{i=1}^{99} f(a_i) + f(b_i).$$

Iskoristit ćemo da je funkcija $f(x)$ konveksna za $x \geq 1$. Neka je među $a_1, \ldots, a_{99}, b_1, \ldots, b_{99}$ točno k brojeva koji iznose barem 1 (ostali su 0). Tada zbog konveksnosti funkcije f zaključujemo

$$S \geqslant k \cdot f\left(\frac{\sum_{i=1}^{99} a_i + b_i}{k}\right) = k \cdot f\left(\frac{99 \cdot 96}{k}\right).$$

Koristeći konveksnost još jednom zaključujemo

$$k \cdot f\left(\frac{99 \cdot 96}{k}\right) = 198 \cdot \frac{k}{198} f\left(\frac{198 \cdot 48}{k}\right) \geqslant 198 \cdot f(48).$$

Koristite razne nejednakosti u problemima optimizacije.

Budući da svaka grupa koja nije povezana sadrži najviše dvije problematične stanice, a S **je broj parova koji se sastoje od nepovezane grupe i njenog problematičnog vrha** slijedi da postoji barem $99 \cdot \binom{48}{3}$ grupa koje nisu povezane, tj. broj povezanih grupa može biti najviše

$$\binom{99}{4} - 99 \cdot \binom{48}{3}.$$

Pokažimo da se taj broj povezanih grupa može postići. Poredajmo stanice u krug i spojimo susjedne stanice dvosmjernim tunelima. Jednosmjernim tunelima spajama stanice A i B ako i samo ako se stanica A nalazi udaljena 3, 5, ..., ili 97 mjesta u smjeru kazaljke na satu od stanice B. U ovakvom rasporedu svaka stanica je problematična u $2 \cdot \binom{48}{3}$ grupa. Ako grupa od 4 stanice nije povezana, onda u toj grupi nema susjednih stanica.

Možete i prvo krenuti od konstrukcije kako bi dobili ocjenu - pažljivo ju opišite, konstruirajte na što simetričniji način!

Neka je A problematična stanica u grupi stanica A, B, C, D, tim redom u smjeru kazaljke na satu. Ako jednosmjerni tuneli vode iz stanice A u druge stanice, onda jednosmjerni tuneli moraju voditi u stanicu D iz ostalih stanica. Ako jednosmjerni tuneli vode u stanicu A iz ostalih stanica, onda jednosmjerni tuneli moraju voditi iz stanice B u druge stanice. Zato u svakoj grupi koja nije povezana postoje točno dvije problematične stanice. Dakle, vrijedi jednakost u nejednakosti koju smo izveli u prvom dijelu rješenja, tj. u konstruiranom primjeru postoji točno $\binom{99}{4} - 99 \cdot \binom{48}{3}$ povezanih grupa.

6. zadatak: (Counting and Configurations) Svaku od 1000 kartica na kojima su napisane sve trojke od 000 do 999 treba staviti u jednu od 100 kutija označenih parovima 00 do 99. Karticu abc mozemo staviti u bilo koju od tri kutije označene ab, ac ili bc. Odredi najmanji potreban broj kutija da bi se rasporedile sve kartice.

Rješenje. Neka je S_{ab} skup svih kartica koje smijemo staviti u kutiju s oznakom ab. Želimo odabrati što manje skupova S_{ab} tako da svaka kartica pripada jednom od tih skupova.

Kartica s oznakom aaa se nalazi samo u skupu S_{aa}, pa moramo odabrati skupove S_{aa} za $a = 0, 1, \ldots, 9$. Tim skupovima pripadaju sve kartice na kojima se ponavljaju znamenke.

Preostaje pronaći što manje skupova S_{ab}, $a \neq b$, tako da svaka od 720 kartica sa svim različitim znamenkama pripada nekom od njih. Neka je k najmanji potreban broj takvih skupova i promatrajmo skupove koji se pojavljuju u jednom takvom minimalnom odabiru.

Primijetimo da je presjek četiri ili više skupova S_{ab} prazan. Zato prema **formuli uključivanja-isključivanja** vrijedi

$$720 = \sum_{a\neq b} |S_{ab}| - \sum_{a\neq b, c\neq d} |S_{ab} \cap S_{cd}| + \sum_{a\neq b, c\neq d, e\neq f} |S_{ab} \cap S_{cd} \cap S_{ef}|$$

pri čemu promatramo sume samo po onim indeksima koji se pojavljuju u minimalnom odabiru skupova.

Budući da svaki skup S_{ab}, $a \neq b$ ima 24 elementa, slijedi da je

$$\sum_{a\neq b} |S_{ab}| = 24k.$$

Definirajte što ćete brojati.

Označimo sa p_i broj skupova S_{ib}, a sa q_i broj skupova S_{ai} (među k odabranih) za $i = 0, 1, \ldots, 9$. Tada vrijedi $\sum_{i=0}^{9}(p_i + q_i) = 2k$ i vrijedi

$$\sum_{a\neq b, c\neq d} |S_{ab} \cap S_{cd}| = \sum_{i=0}^{9}(p_i^2 + q_i^2 + p_i q_i) - 2k$$

Naime, skupovi S_{ab} i S_{cd} imaju neprazan presjek ako i samo ako je ili $a = c$ (2 mogućnosti) ili $b = c$ (1 mogućnost) ili $b = d$ (2 mogućnosti).

Također, $\sum_{a\neq b, c\neq d, e\neq f} |S_{ab} \cap S_{cd} \cap S_{ef}|$ je broj trojki oblika (S_{ab}, S_{bc}, S_{ac}) između odabranih k skupova, pa vrijedi

$$\sum_{a\neq b, c\neq d, e\neq f} |S_{ab} \cap S_{cd} \cap S_{ef}| \leq \sum_{i=0}^{9} p_i q_i.$$

Vratimo li se formuli uključivanja-isključivanja, dobivamo

$$720 \leq 26k - \sum_{i=0}^{9}(p_i^2 + q_i^2).$$

Primijenimo li A–K nejednakost, dobivamo

$$720 \leq 26k - \frac{k^2}{5}.$$

Vidimo da k ne može biti manji od 40 i za $k = 40$ se postiže jednakost. Dakle, ukupno je potrebno barem 50 kutija. Budući da je 50 kutija kojima su znamenke iste parnosti dovoljno da se rasporede sve kartice, zaključujemo da je traženi broj kutija 50.

Krenite od primjera prvo, dobit ćete neki osjećaj za ocjenu.

7. zadatak: (Kina 2010) Na $n + 1$ pozicija označenih A_1, A_2, $\ldots$, A_n i O nalaze se kartice. Dozvoljeno je napraviti sljedeće poteze

- Ako su na poziciji A_i barem 3 kartice, onda smijemo uzeti 3 kartice s te pozicije i staviti po jednu karticu na pozicije A_{i-1}, A_{i+1} i O (pri čemu je $A_0 = A_n$ i $A_{n+1} = A_1$).
- Ako je na poziciji O barem n kartica, onda smijemo uzeti n kartica s te pozicije i staviti po jednu karticu na pozicije A_1, A_2, $\ldots$, A_n.

Ako je ukupan broj kartica barem $n^2 + 3n + 1$, dokaži da postoji niz poteza kojim možemo postići da se na svakoj poziciji nalazi barem $n + 1$ kartica.

Rješenje. Dovoljno je promatrati slučaj u kojem je ukupan broj kartica $n^2 + 3n + 1$. Opisat ćemo **algoritam** kojim možemo osigurati da se na svakoj poziciji nalazi barem $n + 1$ kartica.

Potrošite vrijeme na upoznavanje poteza, napravite barem parcijalni napredak ka cilj.

Prvo primijenimo dozvoljeni potez na svakoj poziciji A_i na kojoj možemo. Nakon konačno mnogo poteza postići ćemo da se na svakoj poziciji A_i nalaze najviše dvije kartice, a na poziciji O barem $n^2 + n + 1$ kartica.

Nakon toga primijenjujemo dozvoljeni potez na poziciji O točno $n+1$ puta. Tada je barem $n + 1$ kartica na svakoj poziciji A_i. Dokazat ćemo da je moguće povećati broj kartica na poziciji O na barem $n + 1$, a da pritom na svakoj poziciji A_i preostane barem $n + 1$ kartica.

Rasporedimo pozicije A_i u vrhove pravilnog n-terokuta redom, te stavimo poziciju O u središte opisane kružnice tom n-terokutu. Uvedimo i oznake $A_j = A_{j-n}$ za $n < j \leq 2n$. Skup uzastopnih vrhova

$$S = \{A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+k-1}\}$$

nazivamo *ekipom.* Za ekipu kažemo da je *dobra* ako nakon provođenja dozvoljenog poteza na svakoj poziciji u S broj kartica na svakoj poziciji u S je barem $n + 1$.

Ključna ideja!

Neka je a_i broj kartica na poziciji A_i za $i = 1, \ldots, n$. Pokazat ćemo da ako vrijedi $a_1 + \ldots + a_n \geqslant n^2 + 2n + 1$, tj. ako se na poziciji O nalazi najviše n kartica, onda postoji dobra ekipa. Primjenom poteza na sve pozicije dobre ekipe povećat ćemo broj kartica na poziciji O, a da pritom broj kartica na svim pozicijama A_i neće biti manji od $n + 1$. Zato nakon konačno mnogo koraka dolazimo do tražene raspodjele kartica.

Jednočlana ekipa $S = \{A_i\}$ je dobra ako i samo ako vrijedi $a_i \geqslant n + 4$. Dvočlana ekipa $S = \{A_i, A_{i+1}\}$ je dobra ako i samo ako vrijedi $a_i, a_{i+1} \geqslant n + 3$. Nadalje, ekipa $S = \{A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+k-1}\}$ od k elemenata za $3 \leqslant k \leqslant n - 1$ je dobra ako i samo ako vrijedi

$$a_i, a_{i+k-1} \geqslant n + 3 \quad \text{i} \quad a_j \geqslant n + 2, i + 1 \leqslant j \leqslant i + k - 2.$$

Konačno, ekipa koja se sastoji od svih n pozicija je dobra ako i samo ako je $a_j \geqslant n + 2$ za $j = 1, \ldots, n$.

Pretpostavimo da ne postoji dobra ekipa i da vrijedi $a_1 + \ldots + a_n \geqslant n^2 + 2n + 1$. Zbog kriterija za jednočlane dobre ekipe zaključujemo da je $a_i \in \{n+1, n+2, n+3\}$ za sve i. Označimo redom sa x, y i z broj pojavljivanja broja $n+1$, $n+2$ i $n+3$ među brojevima $a_1, \ldots, a_n$. Pokazat ćemo $x \geqslant z$. Budući da je $n^2 + 2n + 1 > n(n + 2)$, mora vrijediti $z \geqslant 1$. Ako je $z = 1$, onda je mora vrijediti $x \geqslant 1$ jer bi inače ekipa $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ bila dobra. Ako je $z \geqslant 2$, onda z pozicija u kojima je $n + 3$ kartica dijele kružnicu na z lukova. Primijetimo da nikoje dvije takve pozicije nisu susjedne zbog kriterija za dvočlane dobre ekipe. Na svakom luku se mora nalaziti barem jedna pozicija u kojoj je $n + 1$ kartica zbog kriterija za dobre ekipe s 3 ili više elemenata. Dakle, $x \geqslant z$.

Sada zaključujemo da za ukupan broj kartica na svim pozicijama A_i vrijedi

$$x(n+1) + y(n+2) + z(n+3) \leq (x+y+z)(n+2) = n(n+2) < n^2 + 2n + 1,$$

što je kontradikcija. Time je dokaz završen.

8. zadatak: (Koreja 2003) Neka su m i n relativno prosti brojevi takvi da je $6 \leqslant 2m < n$. Promotrimo n različitih točaka na kružnici. Počevši od jedne od tih n točaka, recimo P, dužinom spajamo P s m-tom točkom Q u smjeru kazaljke na satu od P, nakon toga dužinom spajamo Q s m-tom točkom R u smjeru kazaljke na satu od Q, i tako dalje. Ponavljamo ovaj postupak sve dok više nije moguće povući novu dužinu. Neka je I broj presjeka povučenih dužina unutar kružnice.

(a) Odredi najveću moguću vrijednost za I u terminima m i n pri varijaciji položaja n točaka.

(b) Dokaži da vrijedi $I \geqslant n$ bez obzira na položaj n točaka.

Rješenje.

(a) Budući da su m i n relativno prosti, broj dužina koje su povučene je točno n. Svaka dužina dijeli kružnicu na dva dijela. Onaj dio kružnice koji ima manje točaka nazivamo *unutarnjim*, a drugi nazivamo *vanjskim*. Krajnje točke dužine ne pripadaju ni unutarnjem ni vanjkskom dijelu kružnice.

Ako se dvije dužine p_1 i p_2 sijeku unutar kružnice, onda jedna krajnja točka dužine p_2 leži na unutarnjem, a druga na vanjskom dijelu kružnice obzirom na p_1. Ista tvrdnja vrijedi ako zamijenimo p_1 i p_2. Neka je J broj svih parova dužina $\{p_1, p_2\}$ koje se sijeku. Broj uređenih parova (p_1, p_2) je jednak $2(m-1)n$ jer za svaku dužinu p_1 psotoji $m-1$ točaka na unutarnjem dijelu kružnice i svaka točka je krajnja točka dvjema dužinama. Dakle, $J = (m-1)n$.

S druge strane, svaki par $\{p_1, p_2\}$ određuje točno jedno sjecište, te je svako sjecište određeno s barem jednim parom. Zato vrijedi

$$I \leq J = (m-1)n.$$

Promotrimo primjer gdje je n točaka ravnomjerno raspoređeno po kružnici. U tom slučaju dovoljno je pokazati da se nikoje tri dužine ne sijeku u jednoj točki, jer to onda uspostavlja bijekciju između sjecišta i parova $\{p_1, p_2\}$ i pokazuje da se jednakost $I = (m-1)n$ može postići. No, primijetimo da je svih n dužina jednake duljine i na istoj udaljenosti r od središta kružnice. Zato je svaka dužina dio tangente na kružnicu polumjera r, a budući da za zadanu točku izvan kružnice postoje dvije tangente na tu kružnicu, nemoguće je da se tri dužine sijeku u jednoj točki.

(b) Za svaku točku a na kružnici, postoji dužina koja ulazi u tu točku i dužina koja izlazi iz te točke. Dužinu koja ulazi ćemo nazivati desni krak,a onu koja izlazi lijevi krak točke a. Neka je P_a najbliže sjecište točki a na desnom kraku od a (tj. sjecište desnog kraka od a i lijevog kraka točke koja je susjedna a u smjeru suprotnom od kazaljke na satu). Dovoljno je pokazati da je $P_a \neq P_b$ ako je $a \neq b$.

Uočite defincije koje omogućavaju formuliranje argumenta!

Svaka točka a dijeli kružnicu na tri dijela: unutar lijevog kraka, unutar desnog kraka i izvan oba kraka. Za točku b koja je različita od točke a promotrimo različite slučajeve:

Prvi slučaj: Neka je b krajnja točka lijevog ili desnog kraka točke a. Tada desni krak od b ne siječe desni krak od a unutar kružnice.

Drugi slučaj: Neka je b unutar lijevog kraka od a. Tada desni krak od b siječe lijevi krak od a prije nego što siječe desni krak od a.

Treći slučaj: Neka je b unutar desnog kraka od a. Tada je presjek lijevog kraka od b i desnog kraka od a bliži a nego presjek lijevog kraka od b i desnog kraka od b.

Četvrti slučaj: Neka je b izvan oba kraka od a. Tada desni krak od b ne siječe desno krak od a.

Svi slučajevi pokazuju da $a \neq b$ povlači $P_a \neq P_b$.

9. zadatak: (Koreja 2009) Na stolu se nalazi 2015 žetona koji su s jedne strane bijele, a s druge crne. Žetoni su složeni u niz. Na početku su svi osim jednog žetona okrenuti bijelom stranom prema gore. U svakom koraku odabiremo žeton koji je okrenut crnom stranom prema gore i preokrenemo susjedna dva žetona. Ako smo odabrali žeton na rubu, onda preokrenemo samo jedan susjedni žeton. Odredite sve pozicije na kojima se na početku može nalaziti žeton okrenut crnom stranom prema gore za koju je moguće nizom dozvoljenih poteza sve žetone okrenuti crnom stranom prema gore.

Rješenje. Pokažimo da ako je žeton okrenut crnom stranom prema gore $s = 1008.$ u nizu, onda možemo sve žetone okrenuti crnom stranom prema gore. Odaberemo li s, $s-1$, $s+1$ redom, onda će svih pet žetona na od $s-2$ do $s+2$ biti okrenuti crnom stranom prema gore. Pretpostavimo da su svi žetoni od $s-k$ do $s+k$ okrenuti crnom stranom prema gore. Ako je $k = 2l$ paran, onda možemo redom birati $s-2l$, $s+2l$, $s-2(l-1)$, $s+2(l-1)$, $s-2$, $s+2$, s; a ako je $k = 2l-1$, onda možemo redom birati $s-2(l-1)$, $s+2(l-1)$, $s-(2l-3)$, $s+(2l-3)$, $s-1$, $s+1$. Tako ćemo postići da su svi žetoni od $s-k-1$ do $s+k+1$ okrenuti crnom stranom prema gore.

Pretpostavimo sada da su žetoni koji su okrenuti crnom stranom prema gore na mjestima $t_1, \ldots, t_k$ u nizu. Promotrimo veličinu

Prisjetite se svih invarijanti koje ste ikad vidjeli!

$$M = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} t_i.$$

Direktno možemo provjeriti da se odabirom žetona na mjestu $j \neq 1, 2015$ vrijednost M neće promijeniti. Ako odaberemo žeton na mjestu $j = 1$, onda će se M promijeniti u $-M$ pod uvjetom da je $t_2 = 2$. Konačno, ako je $j = 2015$, onda će se M promijeniti u $M + (-1)^{k+1}2016$. Dakle, ostatak r ili $2016 - r$ pri dijeljenju M s 2016 se ne mijenja pri dozvoljenoj operaciji.

Ako bi svi žetoni bili okrenuti crnom stranom prema gore, onda bi imali $M = 1 - 2 + \ldots + 2013 - 2014 + 2015 = 1008$. Dakle, jedino ako je žeton okrenut crnom stranom na 1008. u nizu je moguće sve žetone okrenuti crnom stranom prema gore.

10. zadatak: (Koreja 2011) Na zabavi je n dječaka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i n djevojčica $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Nijedan dječak se nije rukovao s drugim dječakom, te se niti jedna djevojčica nije rukovala s drugom djevojčicom. Također, dječak a_i se nije rukovao s djevojčicom b_i za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Želimo podijeliti svih $2n$ ljudi u grupe tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(a) U svakoj grupi je broj dječaka jednak broju djevojčica.

(b) Ni u kojoj grupi ne postoje dva čovjeka koja su se rukovala.

Neka je m broj parova (a_i, b_j) za koje se dječak a_i rukovao s djevojčicom b_j. Dokaži da je moguće ljude podijeliti u $\dfrac{2m}{n} + 1$ ili manje grupa.

Rješenje. Modelirajmo problem u terminima teorije grafova pri čemu su osobe vrhovi, a bridom su povezane osobe koje su se rukovale.

Razdvajanje na slučajeve je ključno! Jedan slučaj se koristi za drugi.

Promotrimo prvo slučaj $m < n$. Potrebno je pokazati da je ljude moguće podijeliti u dvije grupe. Neka su C_1,..., C_k komponente povezanosti promatranog grafa. Broj vrhova je $2n$, a broj bridova je manji od n. Zato je $k > n$. Promotrimo broj elemenata u uniji $A_i = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_i$ za $i = 1, \ldots, k$. To su različiti brojevi od kojih neka dva moraju biti jednaka modulo n (jer ih ima barem $n+1$), a svi su manji od $2n$. Neka su to A_i i A_j uz $i < j$. Tada unija $A = C_{i+1} \cup \ldots C_j$ ima točno n elemenata. Broj dječaka u A je jednak broju djevojčica koje nisu u A, pa njih stavimo u jednu grupu. Ostale osobe čine drugu grupu.

U slučaju da je $m \geq n$ ćemo koristiti ono što smo već dokazali. Neka je r najmanji broj grupa na koje možemo podijeliti ljude i neka su te grupe G_1, G_2, ..., G_r. Budući da je r najmanji mogući nikoje tri grupe ne možemo spojiti u dvije grupe. Prema prethodno dokazanom to znači da je za bilo koje tri grupe G_i, G_j i G_k broj bridova u tim grupama barem $\dfrac{|G_i| + |G_j| + |G_k|}{2}$. Neka je S broj bridova u svim trojkama $\{G_i, G_j, G_k\}$. Tada je

$$S \geqslant \frac{1}{2}\binom{r-1}{2}\sum_{i=1}^{r}|G_i| = \frac{1}{2}\binom{r-1}{2} \cdot 2n.$$

S druge strane, $S = (r-2)m$ jer se svaki brid nalazi u točno $r-2$ trojke. Slijedi

$$(r-2)m = S \geqslant \frac{(r-1)(r-2)}{2} \cdot n, \quad \text{tj.} \quad r \leqslant \frac{2m}{n} + 1.$$

11. zadatak: (Kina 2009) Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $4 < m < n$ i neka je $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ pravilan $(2n+1)$-terokut. Odredi broj konveksnih m-terokuta koji imaju točno dva šiljasta unutarnja kuta i čiji vrhovi su u skupu $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}\}$.

Rješenje. Ako konveksan m-terokut ima točno dva šiljasta kuta, onda ti kutovi moraju biti u uzastoppnim vrhovima jer bi inače dva disjunktna para stranica sadržavala više od pola kružnice svaki. Pretpostavimo da je zadnji vrh, u smjeru kazaljke na satu, od ta četiri vrha koja čine šiljaste kutove fiksan; to smanjuje broj konveksnih m-terokuta $2n+1$ puta.

Pretpostavimo da se na duljem luku (kojem su prvi i četvrti od tih četiri vrhova krajnje točke) nalazi k točaka, dok drugi luk sadrži $2n-1-k$ točaka. Za svaki k, vrhovi m-terokuta koji se nalaze na manjem luku se mogu odabrati na $\binom{2n-1-k}{m-4}$ načina, a dva vrha na većem luku se mogu odabrati na $(k-n-1)^2$ načina (tako da dva kuta odsijecaju više od pola kružnice). Klasično prebrojavanje.

Ukupan broj mnogokuta za dani k je zato $(k-n-1)^2 \cdot \binom{2n-1-k}{m-4}$. Zbrojimo li po svim k dobivamo da je ukupan broj poligona (bez faktora $2n+1$)

$$\sum_{k\geqslant 0} k^2 \cdot \binom{n-k-2}{m-4} = \binom{n}{m-1} + \binom{n+1}{m-1}.$$

Dakle, konačno rješenje iznosi

$$(2n+1)\left(\binom{n}{m-1} + \binom{n+1}{m-1}\right).$$

12. zadatak: (St. Petersburg 1996) Aztečki dijamant reda n je lik koji se sastoji od jediničnih kvadratića cjelobrojne mreže u ravnini koji u potpunosti leže unutar kvadrata

$$\{(x,y) : |x| + |y| \le n+1\}.$$

Za svako popoločavanje aztečkog dijamanta dominama (tj. pravokutnicima dimenzija 1×2), možemo rotirati bilo koji kvadrat dimenzija 2×2 kojeg pokrivaju točno dva domina. Dokaži da je dovoljno $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ rotacija (poteza) da bi se proizvoljno popločavanje pretvorilo u popločavanje u kojem su sva domina horizontalna.

Rješenje. Primijetimo prvo da **ako u popločavanju postoji barem jedan vertikalni domino, onda postoji par vertikalnih domina koje se nalaze u istim retcima i između kojih se nalaze samo horizontalna domina**. Zaista, promotrimo vertikalni domino koji se nalazi u najvišem retku. Budući da svaki redak aztečkog dijamanta ima parno mnogo, u tom istom retku mora postojati parno mnogo domina (dakle, barem još jedan domino). Odaberimo dva vertikalna domina, A i B, koji su najbliži, tj. između kojih su u gornjem od dva retka u kojima se nalaze samo horizontalna domina. Tada između A i B mora biti parno mnogo stupaca. Ako sva polja između A i B nisu popločana horizontalnim dominama, onda se u donjem od dva retka između njih nalazi gornje polje neke vertikalne domine. Zbog parnosti broja polja između A i B, broj takvih vertikalnih domina mora biti također paran (dakle, postoje barem dvije takve) i među njima opet možemo odbrati dvije, A' i B' tako da u gornjem od dva retka u kojima se nalaze između njih nema horizontalnih domina. Budući da je horizontalni razmak između A' i B' strogo manji od razmaka između A i B, slijedi da ovaj postupak ne možemo ponavljati unedogled te ćemo u konačno mnogo koraka doći do traženih vertikalnih domina. Metoda ekstrema!

Ovaj zaključak omogućava sljedeći **algoritam** za okretanje svih domina u horizontalni položaj: u svakom koraku pronalazimo par vertikalnih domina

A i B između kojih se nalaze samo horizontalna domina, okrećemo sva horizontalna domina, te onda sva ta domina zajedno s dominama A i B okrenemo iz vertikalnog u horizontalni položaj.

Ovaj dio možete uočiti na primjeru: pitajte se kako bih popravio neki proizvoljni raspored.

Ako se između domina A i B nalazi $2k$ stupaca, onda je broj poteza koje ćemo upotrijebiti $2k + 1$.

U svakom koraku odabiremo dvije domine A i B između kojih se nalazi paran broj stupaca, a pritome isti par domina nećemo odbarati dvaput, pa je najveći potreban broj poteza upravo jednak broju poteza koji je potreban da primijenimo korak algoritma na sve parove domina između kojih je parno mnogo stupaca, tj. da primijenimo algoritam na popločavanje u kojem su sva domina vertikalna.

Ako su sva domina vertikalna, onda ćemo prvo okrenuti domina koja se nalaze u srednja dva stupca. Nakon toga provodimo korak algoritma na vertikalna domina koja se nalaze u sljedeća dva stupca koja su najbliža sredini, te nakon toga nastavljamo dalje od sredine prema rubu.
Ukupan broj poteza koje ćemo tako napraviti je

Razmislite kako poseban slučaj dovodi do rješenja.

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(2i-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Broj poteza je upravo toliki jer indeks i označava u kojim stupcima brojeći od sredine provodimo korake, $n - i + 1$ je broj (parova) vertikalnih domina u i-tom stupcu od sredine, a $2i - 1$ je broj poteza koji je potreban u jednom koraku za par vertikalnih domina koji se nalaze u i-tom stupcu od sredine.