(Ne)vjerojatna kombinatorika

Zadatak 1. Neka je F konačni skup brojeva u binarnom zapisu. Pretpostavimo da nijedan binarni zapis broja u F nije prefiks nekog drugog. Neka je l_i broj elemenata F koji imaju i znamenki u binarnom zapisu. Definiramo li $L = \max_i l_i$, dokažite da vrijedi:

$$\sum_{i}^{L} 2^{-l_i} \leq 1$$

Zadatak 2. Odigran je matematički turnir među n igrača u kojem su svi igrali sa svima točno jednom i nema neriješenih partija. Organizator je primijetio da za svaki podskup od k sudionika postoji sudionik koji ih je sve pobijedio, ali i da to ne bi bilo moguće, bez obzira na ishode, kada bi sudjelovalo samo $n-1$ igrača.

1. Dokažite da je moguće da vrijedi $\binom{n}{k} < \left(1 - 2^{-k}\right)^{k-n}$. *Ako znate relevante nejednakosti možete pokazati da to implicira $n < ck^2 2^k$ za neku konstantu c.*
2. Dokažite da vrijedi $n \geq 2^{k+1} - 1$.
3. Dokažite da postoji konstanta c takva da je $n < ck2^k$

Zadatak 3. Na konferenciji se nalazi nekoliko matematičara. Neki među njima se poznaju, a neki ne, poznanstva su uzajamna. Organizator je primijetio da ako se bilo koji par matematičara koji se prije nisu poznavali upozna na konferenciji svukupan broj 10 klika se poveća, 10-klika je podskup od 10 matematičara među kojima se svi međusobno poznaju. Odredite minimalni broj inicijalnih poznanstava.

Zadatak 4. Neka je $T = (A_i, B_i)_{i=1}^{n}$ familija parova podskupova danog skupa X. Za sve i imamo $|A_i| = k$ i $|B_i| = l$, $|A_i \cap B_i| = 0$ te za sve različite i, j takve da $1 \leq i, j \leq n$ vrijedi $|A_i \cap B_j| \neq 0$. Dokažite da vrijedi:

$$n \leq \binom{k+l}{l}.$$

Zadatak 5. Neka su $x_1, x_2, \cdots x_n$ realni brojevi različiti od nule te neka je a realan broj. Odredite maksimalan broj podskupova A od $\{1, 2, \cdots, n\}$ takvih da vrijedi $\sum_{i \in A} x_i = a$.

Zadatak 6. Neka je $\mathcal{A}$ kolekcija podskupova konačnog skupa X takva da za svaki par različitih skupova $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi $A \not\subset B$. Neka je $\mathcal{A}_i$ podkolekcija skupova koji sadrže točno i elemenata. Dokažite:

$$\sum_{i=0}^{|X|} \frac{|\mathcal{A}_i|}{\binom{|X|}{i}} \leq 1.$$

Hintovi

Zadatak 1. Razmislite što se dešava kada su svi brojevi iste duljine. Pokušajte razmisliti o tome ako postoji određeni string koje druge stringove sprječava da postoje.
Zadatak 2.

1. Vjerojatnosna metoda, ako znate što je to ne čitajte dalje, ako ne dat ću vam okvirnu ideju pa vi pokušajte odraditi detalje sami. Glavna ideja je da konstruiramo graf nasumično, zamislite da za svaki od $\binom{n}{2}$ edgeva bacimo novčić i nacrtamo edge ako dobijemo glavu a ne nacrtamo ako je pismo. Razmislite sada o tome koja je vjerojatnost da takav graf (ne)zadovoljava svojstva koja trazimo.

2. Za bilo koji node pokušajte razmisliti što mora vrijediti u podgrafu od svih onih ljudi koji su ga pobijedili i koristite indukciju.

3. Dokažite da bilo za koji skup (u minimalnom grafu koji zadovoljava svojstva) od $k-1$ ljudi postoji bar $k+1$ ljudi koji su svi pobijedili sve od tih $k-1$. Pa pokušajte izvesti nešto slično kao u prethodnom dijelu.

Zadatak 3. Prvo rješite Zadatak 4. pa ga koristite ovdje.
Zadatak 4. Opet vjerojatnosna metoda samo malo drugacija, pogledajte uniju X svih skupova i uzmite random sort elemenata te unije. *Možete i provući određenu prilično ružnu indukciju no mislim da je ova metoda ljepša i poučnija.*
Zadatak 5. Prvo rješite Zadatak 6 pa ga iskoristite, imajte na umu da možete redefinirati relaciju $\subset$ da znači nešto drugo.
Zadatak 6. Ima različitih načina kako možete rješiti, koristeći codimension-1 kompresije, ako znate što je to ili samo obična indukcija napravljena pametno (nađite relaciju između skupova veličine $r-1$ i r pa to iskoristite). No rješenje koje se meni najviše dopada je vrlo slično onome za zadatak 4. Uzmite niz skupova $C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n \equiv X$ takav da $|C_i| = i$ svaki sa jednakom vjerojatnošću, primijetite da ne dajemo nikakav uvjet da $C_i \in \mathcal{A}$ već zapravo želite gledati obratni smjer.

Rješenja

Zadatak 1. Let L be the longest codeword, than there are 2^L possible codewords of length L we also note that any codeword of length i covers 2^{L-i} of the word of length L and by the prefix free condition no two words can cover the same L-length word so we get $\sum_{i=1}^{L} N_i \cdot 2^{L-i} \leq 2^L$ dividing through by 2^L gives the desired inequality. *The same inequality is true on alphabets of size k as opposed to 2 by the same proof.*

□

Zadatak 2.

1. Među grafovima pogledamo koja je vjerojatnost da neki specifični podskup veličine k i da ga nitko ne pobjeđuje je $(1-2^{-k})^{n-k}$. Neka je A_i event da i-ti podskup veličine k nema nikog ko ga pobjeđuje. Dakle $\mathbb{P}(A_i) = (1-2^{-k})^{n-k}$ a $\mathbb{P}\left(A_1 \cup \cdots \cup A_{\binom{n}{k}}\right) \leq \binom{n}{k}\mathbb{P}(A_i) = \binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$. Prva nejednakost slijedi iz takozvanog union bounda, npr za dva skupa A, B vrijedi $|A \cup B| \leq |A| + |B|$. Dok je zadnja nejednakost dana kao uvjet zadatka. Sada možemo zaključiti da komplement tih događaja - Dakle slučaj kada za svaki skup od k elemenata postoji netko tko ih pobjeđuje, ima pozitibnu vjerojatnost dakle postoji takav graf.

2. Let $f(k)$ be the minimum possible number of vertices of a tournament with property S_k. Let us assume G is such minimal tournament. Let $I(x)$ denote the induced subgraph of the in-neighbourhood of vertex x. We note that $I(x)$ must have property S_{k-1} as for any subset of size $k-1$ of its vertices, by adding x to it its dominating vertex must be in $I(x)$ as it needs to dominate x as well. This gives us $|I(x)| \geq f(k-1)$ and by counting the number of edges it gives us $f(k) \geq 2f(k-1)+1$ which combined with $f(1) = 3$ gives us $f(k) \geq 2^{k+1} - 1$.

3. This shows that any vertex needs to be dominated by $f(k-1)$ vertices. Similarly 2 vertices need to be dominated by at least $f(k-2)$ vertices and so on. In particular we have a stronger claim for $k-1$ vertices, in particular they need to be dominated by at least $k+1$ vertices. This follows as if $v_1, v_2, \cdots v_{k-1}$ are dominated by $x_1, x_2, \cdots, x_l$ for $l \leq k$ then there exists a vertex y which dominates all x_i but then $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, y$ also need to be dominated by some z which needs to be among x_i but the edge yz is bidirectional, contradiction.

   Let's define the graph to have a property P_l if any l size subset is dominated by $k+1$ other vertices. So our G has P_{k-1}. It is trivial to notice as before that $I(x)$ needs to have P_{k-2} as well as S_{k-1}. If we now define $F(i)$ as the minimal number of vertices of a graph satisfying both S_i and P_{i-1}. Now the same inequality as before applies but $F(2) \geq k+2$ so $f(k) = F(k) \geq k2^{k-1} = \Omega(k2^k)$

□

Zadatak 3. The answer is $8n-36$. To show this is indeed optimal we take 8 vertices having all possible edges and no other edges, adding an edge to this graph clearly constructs a K_{10} and there are none to start with, also it has $8(n-8)+8\cdot 7/2 = 8n-36$ edges.

For each non-edge $e_i = (v_j, v_k)$ we construct a pair $A_i = \{v_j, v_k\}$, let S_i be the set of vertices of K_{10} constructed by adding edge e_i, we let $B_i = V - S_i$. We claim (A_i, B_i) make a $(2, n-10)$ system (kao u zadatku 4) which is because only non-existing edge between vertices of S_i is e_i so no other e_j can be disjoint from B_i.

This gives us $\binom{n}{2} - E(G) \leq \binom{n-8}{2}$ which in turn implies $E(G) \geq 8n-36$ as desired.

$\square$

Zadatak 4. U "vjerojatnosnom prostoru" kakav je dan u hintu definiramo event X_i da se cijeli skup A_i našao ispred skupa B_i u sortu, vjerojatnost za to je $1/\binom{k+l}{k}$, a uvjeti na skupove isključuju mogućnost da se X_i i X_j oba dogode za različite i, j, to implicira da vrijedi $1 \geq \mathbb{P}(X_1 \cup \cdots \cup X_n) = n\mathbb{P}(X_1) = n\binom{k+l}{k}$ što nam daje traženi rezultat.

$\square$

Zadatak 5. Podijelimo x_i-jeve na pozitivne - skup P i negativne - skup N redefiniramo $\subset$ tako da vrijedi $A \subset B$ ako i samo ako $A \cap P$ is contained in $B \cap P$ i da je $A \cap N$ disjunktan od $B \cap N$. Sada primijenimo tvrdnju sljedećeg zadatka 6 i primijetimo da prema konstrukciji nije moguće da dva podskupa koji se sumiraju u isti broj sadrže jedan drugog prema novoj definicji $\subset$.

$\square$

Zadatak 6. Vjerojatnost da neki r elementni skup izabran u C_r je $\frac{1}{\binom{n}{r}}$ s obzirom da točno jedan od C_i može biti u $\mathcal{A}$ pa vrijedi $1 \geq \mathcal{P}(\text{Some } C_i \text{ is in } \mathcal{A}) = \sum_{r=0}^{n} \frac{|\mathcal{A}_i|}{\binom{n}{r}}$