Zimske pripreme 2016 – Geometrija

sastavio: Matija Bašić

Polarno preslikavanje

Neka je dana kružnica $k(O,r)$. Za proizvoljnu točku P *inverzna točka obzirom na* k je točka P' na polupravcu OP takva da vrijedi

$$|OP|\cdot|OP'|=r^2.$$

Neka je p pravac koji je okomit na OP i prolazi kroz točku P'. Kažemo da je p *polara* točke P (obzirom na k) i da je P *pol* pravca p (obzirom na k). U projektivnoj ravnini možemo definirati da je polara točke O *pravac u beskonačnosti*. Pol pravca kroz točku O je pripadna *točka u beskonačnosti*.

U primjerima će nam biti korisne sljedeće činjenice koje se lako dokazuju:

- Kut između polara p i q točaka P i Q jednak je $\sphericalangle POQ$.
- Ako je točka P izvan kružnice k, onda je njena polara p pravac na kojem leže dirališta tangenti iz P na k.
- Prisjetite se *kriterija ortogonalnosti*: pravci OP i RQ su okomiti ako i samo ako je
  $$|OR|^2-|OQ|^2=|PR|^2-|PQ|^2.$$
  Dokažite ovu tvrdnju i uočite da iz nje slijedi sljedeća *karakterizacija točaka na polari*: točka M leži na polari točke P ako i samo ako vrijedi
  $$|MO|^2-|MP|^2=2r^2-|OP|^2.$$
- Teorem (de la Hire). Ako točka P leži na polari q točke Q, onda točka Q leži na polari p točke P.

  Dokaz:
  $$P\in q\Leftrightarrow|OP|^2+|OQ|^2=2r^2+|PQ|^2\Leftrightarrow Q\in p.$$
- Neka su p i q polare točaka P i Q. Presjek polara p i q je pol pravca PQ.
- Točke A, B i C su kolinerne ako i samo ako su njihove polare a, b i c konkurentne.
- Pridruživanje koje svakoj točki ravnine pridružuje njenu polaru, a svakom pravcu njegov pol je involucija na skupu točaka i pravaca u projektivnoj ravnini. To pridruživanje zovemo *polarno preslikavanje* ili *dualnost*.

Posebnu pažnju posvetite sljedećim činjenicama.

- Prisjetite se vrlo korisnog načina za računanje dvoomjere. Neka je točka P izvan pravca p na kojem redom leže točke A, B, C i D, te neka je točka E na pravcu AP takva da je P između A i E. Tada je

$$\frac{|AB|}{|AD|} \cdot \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{\sin \sphericalangle APB}{\sin \sphericalangle APD} \cdot \frac{\sin \sphericalangle CPD}{\sin \sphericalangle BPC}.$$

Dokaz: primjena poučka o sinusima na trokutu ABP, BCP, CDP i ADP.

- Ako pravac kroz točku P siječe kružnicu k u točkama A i B, te neka je točka Q na tom pravcu. Točka Q leži na polari p točke P ako i samo ako je (A, P, B, Q) harmonijska četvorka, tj. ako i samo ako vrijedi

$$(A, B; P, Q) = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}} : \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{BQ}} = -1.$$

Dokaz: Neka su C i D dirališta tangenti iz P na k i neka je točka Q presjek pravaca CD i p. Tada prema prethodnoj tvrdnji slijedi

$$\frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|QB|}{|QA|} = \frac{\sin \sphericalangle PCA}{\sin \sphericalangle PCB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle QCB}{\sin \sphericalangle QCA}.$$

Analogno vrijedi

$$\frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|QB|}{|QA|} = \frac{\sin \sphericalangle PDA}{\sin \sphericalangle PDB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle QDB}{\sin \sphericalangle QDA}.$$

Tvrdnja slijedi jer prema teoremu o tetivi i tangenti vrijedi

$$\sphericalangle PCA = \sphericalangle QDA, \quad \sphericalangle QCA = \sphericalangle PDA,$$

$$\sphericalangle QCB = 180^\circ - \sphericalangle PDB, \quad \sphericalangle PCB = 180^\circ - \sphericalangle QDB,$$

pa dobivamo

$$\frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|QB|}{|QA|} = \frac{|QA|}{|QB|} \cdot \frac{|PB|}{|PA|}.$$

Dakle, $(A, B; P, Q) = -1$. Obrat sliedi jer je, uz fiksne točke P, A i B, točka koja zadovoljava dani dovoomjer na pravcu p jedinstvena.

- Teorem (Brokard). Neka je $ABCD$ tetivan četverokut i neka se pravci AB i CD sijeku u točki P, pravci AD i BC u točki Q, a pravci AC i BD u točki R. Tada je središte kružnice opisane četverokutu $ABCD$ ortocentar trokuta PQR.

  Dokaz: Neka su točke E i F presjeci pravca QR s pravcima AB i CD, redom. Koristeći Menelajev i Cevin teorem dobivamo $(P, E; A, B) = -1$ i $(P, F; C, D)$. Prema prethodno dokazanim činjenicama slijedi da je EF polara od P, tj. RQ je polara od P. Zato je $OP \perp RQ$. Analogno vrijedi za točke R i Q umjesto P.

Primjeri

1. zadatak: (Hong Kong 2006) Neka je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu sa središtem O. Pravci AC i BD se sijeku u točki E. Neka je točka P unutar $ABCD$ takva da je $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PCB = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PDC = 90°$. Dokaži da su točke O, P i E kolinearne.

Rješenje 1. Upotpunimo dijagram kako bismo mogli primijeniti Brokardov teorem. Neka je $Q = AB \cap CD$ i $R = AD \cap BC$. Tada prema Brokardovom teoremu vrijedi $OE \perp RQ$. Preostaje nam dokazati da je $OP \perp RQ$.

Najteži dio zadatka je iskoristiti način na koji je zadana točka P kako bismo povezali tu točku s točkama Q i R. Potrebno je dobiti ideju (npr. gledajući precizno nacrtanu skicu) da bi PQ mogla biti tangenta na kružnice opisane trokutima ABP i CDP. Tu ćemo tvrdnju sada dokazati!

Neka je t tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABP koja prolazi kroz točku P. Neka je točka T na t u smjeru točke Q. Tada je $\sphericalangle TPB = \sphericalangle PAB$. Iz definicije točke P sad jednostavno računamo $\sphericalangle TPC = 180° - \sphericalangle BPT - \sphericalangle PCB - \sphericalangle PBC = 90° - \sphericalangle PBC = \sphericalangle PDC$. Zato je t tangenta i na kružnicu opisanu trokutu CDP. Točka Q je radikalno središte kružnice k i kružnica opisanih trokutima ABP i CDP. Iz toga zaključujemo da i zajednička tangenta t prolazi točkom Q, tj. PQ je ta zajednička tangenta. Analogno pokazujemo da je RP zajednička tangenta kružnica opisanih trokutima BCP i ADP.

Sad lako možemo pokazati da je $OP \perp RQ$. Potencija točke R obzirom na kružnicu ADP je $|PR|^2 = |RA| \cdot |RD|$, dok je potencija točke R obzirom na k jednaka $|RA| \cdot |RD| = |RO|^2 - r^2$. Analogno je $|PQ|^2 = |QA| \cdot |QB| = |QO|^2 - r^2$. Slijedi da je $|PR|^2 - |PQ|^2 = |OR|^2 - |OQ|^2$, što je uvjet ortogonalnosti za pravce OP i RQ. Time je dokaz završen.

Rješenje 2. Uočimo prvo da je

$$\sphericalangle APC = 360° - 90° - \sphericalangle ABC = 90° + \sphericalangle ADC = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle AOC.$$

U ovom trenutku možemo se pitati kako iskoristiti ovaj uvjet. Promotorimo kružnicu opisanu trokutu APC i odredimo njeno središte. Pažljivom analizom precizne skice možete naslutiti o kojoj se točki radi!

Neka je O_1 točka iz koje tangente na k imaju dirališta A i C. Drugim riječima, neka je O_1 pol pravca AC. Tada je $\sphericalangle O_1AO = 90° = \sphericalangle O_1CO$, pa je $\sphericalangle AO_1C = 180° - \sphericalangle AOC = 2\sphericalangle APC$. Ovime smo dokazali da je upravo O_1 središte kružnice opisane trokutu APC. Nazovimo tu kružnicu k_1.

Analogno možemo pokazati da je središte opisane kružnice trokutu BPD pol pravca BD. Nazovimo tu kružnicu k_2 i njeno središte O_2. Time smo pokazali da je točka P presjek kružnica k_1 i k_2, tj. leži na radikalnoj osi tih dviju kružnicu.

Kako bismo dokazali da su O, P i E kolinearne, pokazat ćemo da su točke O i E također na radikalnoj osi kružnica k_1 i k_2.

Zaista, OA je tangenta na kružnicu k_1, pa je $|OA|^2$ potencija točke O obzirom na k_1. Analogno je $|OB|^2$ potencija točke O obzirom na k_2. Budući da je $|OA| = |OB|$ slijedi da je O na radikalnoj osi kružnica k_1 i k_2.

Potencija točke E obzirom na k_1 je $|AE| \cdot |EC|$, a obzirom na k_2 je $|BE| \cdot |ED|$. Budući da je $ABCD$ tetivni četverokut vrijedi $|AE| \cdot |EC| = |BE| \cdot |ED|$, pa je i E na radikalnoj osi kružnica k_1 i k_2. Time je dokaz završen.

Rješenje 3. Promotrimo inverziju ravnine obzirom na neku kružnicu sa središtem u P. Neka A' označava inverz točke A obzirom na P. Tada je prema definiciji inverzije i uvjeta zadatka

$$90^\circ = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PDC = \sphericalangle PC'B' + \sphericalangle PC'D' = \sphericalangle B'C'D'.$$

Analogno pokazujemo da su svi kutovi u četverokutu $A'B'C'D'$ pravi, pa je to pravokutnik.

Neka je S presjek dijagonala tog pravokutnika, pa je ujedno i središte kružnice opisane četverokutu $A'B'C'D'$.

Ako vam nije već poznata sljedeća činjenica dokažite da vrijedi: ako se kružnica k sa središtem T inverzijom obzirom na P preslikava u kružnicu k' sa središtem S, onda su točke P, S i T kolinearne. U našem slučaju to povlači da su točke O, P i S kolinearne. S druge strane, po definiciji inverzije točke P, O i O' su kolinearne.

Točka S je radikalno središte kružnice k i kružnica opisanih trokutima $PB'D'$ i $PA'C'$, pa je PE' radikalna os. Slijedi da E' leži na pravcu PO'. Time zaključujemo da su točke P, E' i O' kolinearne. No, inverzija čuva kolinearnost, pa su zato P, E i O kolinearne točke.

2. zadatak: (Koreja 2014) U jednakokračnom trokutu ABC vrijedi $|AC| = |BC|$. Neka je D točka na pravcu BA takva da je A između B i D. Neka je k_1 opisana kružnica trokuta DAC. Kružnica k_1 siječe BC u točki E. Na pravcu BC odabrana je točka F takva da je FD tangenta na k_1. Neka je k_2 kružnica opisana trokutu DBF i neka je G drugo sjecište kružnica k_1 i k_2. Neka je k opisana kružnica trokutu BEG i O njeno središte. Dokaži da je pravac FG tangenta na kružnicu k ako i samo ako je DG okomito na FO.

Rješenje. Promotrimo uvjete u ekvivalenciji koju moramo dokazati razmišljajući o polarama. Ako vrijedi da je FG tangenta na k, onda je G na polari točke F obzirom na k. Ako je i DG okomito na FO, onda je DG polara točke F, tj. D leži na polari točke F. Ovo nam daje ideju za rješavanje zadatke.

Prvo se uvjerite da tvrdnja zadatka slijedi ako D leži na polari točke F.

Drugo, prema teoremu La Hirea dovoljno je pokazati da F leži na polari točke D. Nacrtamo li pažljivo skicu nameće se da je pravac na kojem se nalaze točke E, B, C i F polara točke D jer uočavamo da bi pravci DB i DE mogli biti tangente na kružnicu k.

Budući da je FD tangenta na k_1 slijedi $\sphericalangle FDG = \sphericalangle GED$, a budući da je $FBGD$ tetivni četverokut slijedi $\sphericalangle FDG = \sphericalangle GBE$. Iz $\sphericalangle GED = \sphericalangle GBE$, slijedi da je DE tangenta na k.

Budući da je $ACED$ tetivni četverokut slijedi $\sphericalangle DEC = \sphericalangle BAC$, pa zbog $|AC| = |BC|$ slijedi $\sphericalangle DEC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle DBC$. Zaključujemo da je $|DB| = |DE|$, pa je i DB tangenta na k. Dakle, BE je polara točke D, pa F leži na polari točke D.

3. zadatak: (RMM 2013) Neka je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu k. Pravci AB i CD se sijeku u točki P, pravci AD i BC u točki Q, a pravci AC i BD u točki R. Neka je M polovište dužine $\overline{PQ}$ i neka je K presjek dužine $\overline{MR}$ i kružnice k. Dokaži da se opisana kružnica trokuta KPQ i kružnica k diraju.

Rješenje. Uočimo da nam je zbog Brokardovog teorema važna samo kružnica k, ali ne i točke A, B, C i D. Neka je točka O središte kružnice k. Tada je prema Brokardovom teoremu točka O ortocentar trokuta PQR, tj. točka R je ortocentar trokuta OPQ.

Neka je t tangenta na k u točki K i neka je U presjek pravaca t i PQ. Tada je K na polari točke U. Budući da je R pol pravca PQ zaključujemo da je U na polari točke R i (prema teoremu La Hirea) da je R na polari točke U. Budući da su R, K i M kolinearne, RM je polara točke U i zato je $RM \perp OU$.

Želimo pokazati da je t tangenta na kružnicu opisanu trokutu KPQ.

Neka je $V = RM \cap OU$ i neka je R' centralnosimetrična slika točki R obzirom na M. Točka R je ortocentar trokuta OPQ. Poznato je da točka R' leži na opisanoj kružnici tog trokuta i da je OR' promjer te kružnice. No, kako je $RM \perp OU$, slijedi da je $\sphericalangle OVR' = 90°$, tj. točka također V leži na kružnici opisanoj trokutu OPQ. Potencija točke U obzirom na tu kružnicu glasi $|UV| \cdot |UO| = |UP| \cdot |UQ|$, a prema Euklidovom teoremu za pravokutni trokut OUK slijedi $|UK|^2 = |UV| \cdot |UO|$. Time smo dokazali da je $|UK|^2 = |UP| \cdot |UQ|$, t je tangenta na kružnicu opisanu trokutu KPQ.

Zadaci za samostalan rad

Iskoristite teorem La Hirea ili uočite dijagram iz Brokardovog teorema!

1. zadatak: (Kina 2006) Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k sa središtem O. Neka je točka C na pravcu AB, te neka pravac kroz točku C siječe kružnicu k u točkama D i E. Neka je $\overline{OF}$ promjer kružnice k' opisane trokutu BOD sa središtem u O'. Pravac CF siječe kružnicu k' u točkama F i G. Dokaži da su točke O, A, E i G konciklične.

2. zadatak: (ML) Neka je $ABCD$ tetivni četveroku čije se dijagonale AC i BD sijeku u točki O. Pravci AB i CD se sijeku u točki E. Tangente na opisanu kružnicu u točkama A i D se sijeku u točki K, a tangentne u točkama B i C u točki L. Dokaži da su točke E, K, O i L kolinearne.

3. zadatak: (ML) Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Pravci AB i CD se sijeku u točki E, a pravci AC i BD u točki F. Opisane kružnice trokuta AFD i BFC se sijeku u točkama H i F. Dokaži da je $\sphericalangle EHF = 90°$.

4. zadatak: (Dualni Simpsonov teorem) Neka su A_1, B_1, C_1 redom presjeci okomica iz središta I upisane kružnice trokutu ABC na pravce AI, BI, CI s tangentom na upisanu kružnicu. Tada su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni.

Teorem o leptiru poznat je teorem koji nema kratko elementarno rješenje. Postoje razni dokazi, a dokaz koristeći projektivne transformacije možete pronaći u članku Tomislava Pejkovića *Afine i projektivne transformacije*. Iskoristite taj teorem za posljednji zadatak.

5. zadatak: (Teorem o leptiru) Dana je kružnica k sa središtem O i točka M koja ne leži na k. Neka je p pravac okomit na OM kroz točku M. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ proizvoljne tetive kroz M takve da su točke A i C s iste strane pravca p. Neka su X i Y sjecišta pravca p s pravcima $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, redom. Tada je M polovište dužine $\overline{XY}$.

6. zadatak: (Mathlinks) Neka je ABC trokut sa središtem opisane kružnice O i središtem upisane kružnice I. Neka upisana kružnica dira stranicu $\overline{BC}$ u točki D, te neka pravci AI i AO sijeku opisanu kružnicu u točkama M i S redom. Neka je su točke X i Y na pravcima DM i AO redom takve da I leži na pravcu XY. Ako je OI okomito na XY, dokaži da je I polovište dužine $\overline{XY}$. Vrijedi li obrat?

Izvori

- Tomislav Pejković, Afine i projektivne transformacije
- Milivoje Lukić, Projective geometry