# RMM pripreme 2015 – Geometrija

sastavio: Stipe Vidak

**1. zadatak:** (Kina 2007, TST) Neka je $ABCD$ tetivni četverokut s opisanom kružnicom $\omega$. Neka je $\omega_1$ druga kružnica koja iznutra dira kraći luk $\widehat{\mathrm{AB}}$ u točki $P$, a pravce $BC$ i $AD$ u točkama $M$ i $N$, redom. Neka su $I_1$ i $I_2$ redom središta kružnica upisanih trokutima $ABC$ i $ABD$. Dokaži da su točke $M, N, I_1, I_2$ kolinearne.

Sljedeći niz zadataka odnosi se na istu konfiguraciju kao u prethodnom zadatku.

a) Ako je $R$ polumjer kružnice $\omega$, a $r$ polumjer kružnice $\omega_1$, dokaži da vrijedi
$$\frac{|AN|}{|AP|} = \frac{|BM|}{|BP|} = \frac{|CM|}{|CP|} = \frac{|DN|}{|DP|} = \sqrt{\frac{R-r}{r}}.$$

b) Ako je točka $E$ presjek pravaca $AC$ i $MN$, dokaži da je pravac $PE$ simetrala kuta $\sphericalangle APC$.

c) Ako je točka $E$ presjek pravaca $AC$ i $MN$, dokaži da su četverokuti $APEI_2$ i $BPEI_1$ tetivni.

d) Ako je $P'$ polovište kraćeg luka $\widehat{\mathrm{AB}}$, dokaži da se pravci $PP'$, $AB$ i $MN$ sijeku u istoj točki.

e) (Sveruska matematička olimpijada) Ako je $E = AC \cap MN$, $F = BD \cap MN$ i $S = AC \cap BD$, dokaži da vrijedi $|SE| = |SF|$.

[Rješenja većine prethodnih zadataka mogu se pronaći na `http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h170192p943936`.]

**2. zadatak:** (*"poznata" lema*) Neka je $D$ točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta $ABC$. Kružnica $\omega$ iznutra dodiruje kružnicu opisanu trokutu $ABC$ te pravce $BC$ i $AD$ redom u točkama $E$ i $F$. Ako je $I$ središte kružnice upisane trokutu $ABC$, dokaži da su točke $E$, $F$ i $I$ kolinearne.

[Rješenje prethodnog zadatka uvelike sliči rješenju prvog zadatka, jer se dobiva jako slična konfiguracija. Taj zadatak je ujedno i bitna lema u dokazu *Sawayama-Thébault* teorema. Detaljnije na linku `http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf`.]

**3. zadatak:** (*Sawayama-Thébault teorem*) Neka je $D$ točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta $ABC$. Kružnica $\omega_1$ iznutra dodiruje kružnicu opisanu trokutu $ABC$ te dužine $\overline{DC}$ i $\overline{AD}$. Kružnica $\omega_2$ iznutra dodiruje kružnicu opisanu trokutu $ABC$ te dužine $\overline{BD}$ i $\overline{AD}$. Ako su $P$ i $Q$ redom središta kružnica $\omega_1$ i $\omega_2$, dokaži da su točke $P$, $I$ i $Q$ kolinearne.

**4. zadatak:** (Sharygin 2014) Neka je $A, B, C, D$ *triharmonička* četvorka točaka u ravnini, tj. takva četvorka točaka u ravnini za koju vrijedi

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

Neka je $A_1 \neq A$ točka takva da je četvorka $A_1, B, C, D$ triharmonička. Točke $B_1, C_1, D_1$ definirane su analogno. Dokaži:

a) Točke $A, B, C_1, D_1$ leže na istoj kružnici.

b) Četvorka $A_1, B_1, C_1, D_1$ je triharmonička.

[Rješenje se može pronaći na `http://artofproblemsolving.com/community/c6h613899p3706852`.
Za razumijevanje je potrebno poznavanje **inverzije** i **izodinamičkih točaka** trokuta.]