Polinomi

Srđan Maksimović

1 Nultočke polinoma

Posebnost polinoma jest u tome što su potpuno određeni svojim nultočkama. Stoga se njima pri proučavanju polinoma pridaje iznimno velika važnost.

Teorem 1. *Neka je* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *polinom s koeficijentima iz* $\mathbb{R}$ *(ili* $\mathbb{C}$*). Tada vrijedi* $p(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ *(ili* $\mathbb{C}$*) ako i samo ako je* $a_i = 0$ *za sve* $i = 0, \ldots, n$.

Iz toga teorema automatski slijedi

Teorem 2. *Polinomi* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *i* $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *su jednaki ako i samo ako je* $m = n$ *i* $a_i = b_i$ *za sve* $i = 0, 1, \ldots, n$.

Poznato je da polinomi neparnoga stupnja uvijek imaju barem jednu realnu nultočku. Za polinome parnog stupnja takvo što ne mora vrijediti (npr. $x^2 + 1$). No sljedeći teorem kaže kako ćemo u skupu kompleksnih brojeva uvijek moći naći broj koji poništava polinom bez obzira na njegov oblik pa čak i ako ima kompleksne koeficijente.

Teorem 3 (Osnovni teorem algebre)**.** *Svaki* ***nekonstantni*** *polinom s kompleksnim koeficijentima ima barem jednu nultočku u* $\mathbb{C}$.

Teorem 4. *Neka je* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ *polinom s* ***realnim*** *koeficijentima. Ako je* $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *nultočka od* p *tada je i* $\overline{z} = \alpha - \beta i$ *nultočka od* p.

Teorem 5. *Polinom stupnja* $n \geq 1$ *ima točno* n *nultočaka (računajući i njihovu kratnost). Jedini polinom koji ima beskonačno mnogo nultočaka jest* $p(x) = 0$.

Ovaj teorem nam je koristan u slučajevima kad poznajemo dovoljno mnogo nultočaka polinoma. Na primjer, uspijemo li pokazati da neki polinom ima beskonačno mnogo nultočaka sigurni smo da se radi o polinomu $p(x) = 0$.

Teorem 6 (o dijeljenju polinoma)**.** *Neka su* f *i* g *polinomi. Tada postoje jedinstveni polinomi* q *i* r *takvi da je*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

i da je stupanj od r *manji nego stupanj od* f. r *zovemo ostatak pri dijeljenju* f *s* g. *Ako je* $r(x) = 0$ *kažemo da je* f *djeljiv s* g.

Teorem 7. $\alpha \in \mathbb{C}$ *je nultočka polinoma* p *ako i samo ako je* $p(x)$ *djeljiv sa* $(x - \alpha)$.

Teorem 8. *Neka je* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ *i neka su* $x_1, \ldots, x_n$ *sve njegove nultočke. Tada vrijedi*

$$p(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Primjer 9. Neka je p polinom stupnja n i neka vrijedi $p(k) = \frac{k}{k+1}$ za $k = 0, \ldots n$. Koliko je $p(n+1)$?

Rješenje. Neka je $q(x) = (x+1)p(x) - x$. Iz uvjeta zadatka slijedi da su $0, 1, \ldots, n$ nultočke od q. Kako je q stupnja $n+1$ zaključujemo da ga možemo pisati u obliku

$$q(x) = a(x-0)(x-1)\ldots(x-n).$$

Zadnji korak bi bio uvrštavanje $x = n+1$ u prethodnu relaciju odakle bismo izračunali $p(n+1)$. Međutim, da bi to bilo ostvarivo moramo odrediti vrijednost od a. Zbog $q(-1) = (-1+1)p(-1)+1 = a(-1-0)(-1-1)\ldots(-1-n) = a(-1)^{n+1}(n+1)!$ slijedi $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, a time i

$$p(n+1) = \frac{q(n+1)+n+1}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}. \qquad \square$$

Primjer 10. Neka je p polinom s realnim koeficijentima takav da je $p(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dokažite da postoje realni polinomi q i r takvi da je

$$p(x) = q(x)^2 + r(x)^2.$$

Rješenje. Označimo sa $x_1, \ldots, x_k$ realne , a sa $a_{k+1} \pm i\, b_{k+1}, \ldots, a_l \pm ib_l$ kompleksne nultočke (koje dolaze u konjugiranim parovima) i neka su $r_1, \ldots, r_l$ njihove kratnosti. Kada bi neka realna nultočka imala neparnu kratnost tada bi p u toj točki mijenjao predznak. Stoga su svi brojevi $r_1, \ldots, r_k$ parni.

Iz toga zaključujemo kako p možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} p(x) &= C\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{r_i}\prod_{i=k+1}^{l}(x-(a_i+ib_i))(x-(a_i-ib_i)) = \\ &= \left(\sqrt{C}\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{\frac{r_i}{2}}\right)^2\prod_{i=k+1}^{l}((x-a_i)^2+b_i^2)). \end{aligned}$$

Primijetimo da je iz uvjeta $p(x) \geq 0$ nužno $C \geq 0$ pa je $\sqrt{C}$ dobro definiran. Preostaje nam pokazati kako je drugi produkt prikaziv kao zbroj kvadrata dvaju polinoma. No za to nam je dovoljna sljedeća relacija

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2 = \\ &= (ac)^2+2abcd+(bd)^2+(bc)^2-2abcd+(ad)^2 = \\ &= (ac+bd)^2+(bc-ad)^2 \end{aligned}$$

koju zatim induktivno primijenimo na $\prod_{i=k+1}^{l}((x-a_i)^2+b_i^2))$. $\square$

Množenjem svih faktora u relaciji iz teorema 8 i izjednačavanjem koeficijenata dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 11 (Vietèove formule)**.** *Neka je $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinom i neka su $x_1, \ldots, x_n$ njegove nultočke. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(x_1+\ldots+x_n) \\ a_{n-2} &= \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \end{aligned}$$

$$a_{n-3} = -\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

U praksi su najkorisnije formule za a_{n-1}, a_{n-2}, a_1 i a_0. Ostale se zbog očite kompliciranosti rjeđe koriste.

Primjer 12. Pronađite sve polinome koji imaju samo realne nultočke, a svi koeficijenti su im jednaki 1 ili -1.

Rješenje. Neka je p traženi polinom i $x_1, \dots, x_n$ njegove nultočke. Iz Vieteèovih formula slijedi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \pm 1$, $x_1 x_2 \dots x_n = \pm 1$ i $\sum_{i\neq j} x_i x_j = \pm 1$.

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + \ldots + x_n)^2 - 2\sum_{i\neq j} x_i x_j = 1 \pm 2 \le 3.$$

Primjenom $(G-K)$ nejednakosti imamo

$$1 = \sqrt[n]{|x_1|\dots|x_n|} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \le \sqrt{\frac{3}{n}}$$

odakle vidimo da je $n \le 3$ i jednakost vrijedi ako i samo ako je $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$.

Dakle ako je $n = 3$ prema zadnjoj primjedbi i $x_1 + x_2 + x_3 = \pm 1$ slijedi da su dvije nultočke jednake 1, a jedna -1 (ili obratno). Stoga su jedini izbor polinomi $\pm(x-1)^2(x+1)$ i $\pm(x-1)(x+1)^2$.

Za $n = 2$ polinomi koji dolaze u obzir su $\pm x^2 \pm x \pm 1$. Među njima realne nultočke imaju $\pm x^2 \pm x - 1$.

Za $n = 1$ uvjet zadovoljavaju polinomi $\pm x \pm 1$. □

Teorem 13. *Neka je $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Ako p ima racionalnu nultočku $\frac{a}{b}$, pri čemu je $(a, b) = 1$, tada je a_n djeljiv s b te je a_0 djeljiv s a. Ako je $c, d \in \mathbb{Z}$ i $c + id$ nultočka od p tada $c^2 + d^2$ dijeli a_0.*

Primjer 14. Nađite nultočke polinoma $p(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 5$.

Dokaz. Pokušajmo prvo s racionalnim korijenima. U obzir dolaze samo djelitelji slobodnog člana, a to su ± 1 i ± 5. Uvrštavanjem lako vidimo da niti jedan od njih nije korijen. Jedini način na koji možemo zapisati 5 kao zbroj dva kvadrata jest $2^2 + 1^2$. Stoga su kandidati za nultočke $\pm 2 \pm i$, $\pm 1 \pm 2i$. Uvrštavanjem vidimo da su $2 + i$ i $2 - i$ uistinu nultočke pa $(x - 2 - i)(x - 2 + i) = x^2 - 4x + 5$ dijeli $p(x)$. Dijeljenjem dobivamo $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 3x - 1) = p(x)$, odakle lako dobijemo da su $2 \pm i$, i $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ svi korijeni od p. □

Teorem 15 (Eisensteinov kriterij)**.** *Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Neka je p* ***prost*** *broj takav da $p \nmid a_0$, $p \mid a_1$, $p \mid a_2$, $\dots$, $p \mid a_n$, $p^2 \nmid a_n$. Tada se f ne može prikazati kao produkt dva nekonstantna polinoma s koeficijentima iz $\mathbb{Q}$ (kraće kažemo da je ireducibilan nad $\mathbb{Q}$).*

Primjer 16. Polinom $p(x) = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 12$ zadovoljava uvjete Eisensteinovog kriterija uz $p = 3$. Stoga je ireducibilan nad $\mathbb{Q}$.

Primjer 17. Dokažite da je polinom $p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$ ako je p prost.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} \implies p(x+1) &= \frac{(x+1)^p - 1}{x} = \\
&= x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-2} + \binom{p}{p-1}.
\end{aligned}
$$

Kako iz $p(x) = q(x)r(x)$ slijedi $p(x+1) = q(x+1)r(x+1)$ dovoljno je vidjeti da je $p(x+1)$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. No kako je p prost, vrijedi $p \mid \binom{p}{k}$ za $k = 1, \ldots, p-1$. Slobodni član od $p(x+1)$ jednak je p odnosno nije djeljiv s p^2. Sve navedeno opravdava uporabu Eisensteinovog kriterija, tj. p je zaista ireducibilan nad $\mathbb{Q}$. □

2 Simetrični polinomi

Polinom $P(x, y)$ u dvije varijable zovemo *simetričnim* ako vrijedi $P(x, y) = P(y, x)$, tj. ako su koeficijenti uz $x^k y^m$ i $x^m y^k$ jednaki za sve k i m.

Najjednostavniji primjer simetričnih polinoma jesu *elementarni simetrični polinomi*

$$\sigma_1(x, y) = x + y, \qquad \sigma_2(x, y) = xy$$

Osim njih često se promatraju i *Newtonovi polinomi*

$$s_k(x, y) = x^i + y^i.$$

s_k možemo prikazati pomoću σ_1 i σ_2 koristeći sljedeći izraz

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 s_{k-1} &= (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = \\
&= x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = \\
&= s_k + \sigma_2 s_{k-2}.
\end{aligned}
$$

Sada induktivno možemo odrediti s_k

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x + y = \sigma_1, \\
s_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2s_2, \\
s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, \ldots
\end{aligned}
$$

Pokazuje se da se svi simetrični polinomi mogu prikazati preko elementarnih, točnije vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 18. *Za svaki simetrični polinom $P(x, y)$ postoji jedinstven polinom $h(x, y)$ takav da je $f(x, y) = h(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y)) = h(x + y, xy)$.*

Primjer 19. Riješite jednadžbu

$$x^5 + y^5 = 33 \qquad x + y = 3.$$

Rješenje. Pomoću gore izvedene formule lako računamo $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$. Stoga sustav postaje

$$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33, \qquad \sigma_1 = 3.$$

Uvrštavanjem σ_1 u prvu jednadžbu dobivamo $\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0$ čija su rješenja $\sigma_2 = 2$ i $\sigma_2 = 7$. Preostaje riješiti sustave

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 7. \end{aligned}$$

Dakle sva rješenja su (2,1), (1,2), $\left(\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i, \frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{19}}{2}i\right)$. □

3 Lagrangeov interpolacijski polinom

Neka je u ravnini zadano $n+1$ točaka $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. Želja nam je 'provući' polinom kroz te točke i to po mogućnosti da njegov stupanj bude što je moguće niži. Jasno je da taj polinom ne može biti linearan ako sve navedene točke ne leže na istome pravcu.

Teorem 20 (Lagrangeov interpolacijski polinom)**.** *Neka su dani realni brojevi $x_0, \ldots, x_n$ i $y_0, \ldots, y_n$ pri čemu su y_i međusobno različiti. Tada postoji polinom stupnja najviše n koji prolazi kroz sve točke $(x_i, y_i)_{i=0,\ldots,n}$ i on je dan sljedećim izrazom*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i$$

Primjer 21. Neka je P polinom stupnja n takav da je $P(k) \in \mathbb{Z}$ za nekih n uzastopnih cijelih vrijednosti od k. Dokažite da $P(k)$ poprima cjelobrojne vrijednosti za sve $k \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. Neka je $j \in \mathbb{Z}$ takav da je $P(k+1), P(k+2), \ldots, P(k+n) \in \mathbb{Z}$. Označimo $y_i = P(k+i)$. Izraz za polinom koji prolazi kroz točke $k+i, y_i$ prema prethodnom teoremu glasi

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-k-1)\ldots(x-k-i+1)(x-k-i-1)\ldots(x-k-n)}{(k+i-k-1)\ldots 1 \cdot (-1)\ldots(k+i-k-n)} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{x-k-1}{i-1} \binom{x-k-n}{n-i} y_i, \end{aligned}$$

što je cjelobrojno za sve $x \in \mathbb{Z}$. □

4 Derivacija polinoma

Općenito se pojam derivacije funkcije definira na analitički način (koristeći limes) međutim za polinome se derivacije mogu definirati čisto algebarski. Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Derivacija polinoma p je polinom p' definiran kao

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

Dakle stupanj svakog člana se množi s koeficijentom i zatim se smanji za 1. Slobodni član pri tome nestaje. Induktivno definiramo derivacije višeg reda, npr. druga derivacija p'' je derivacija polinoma p' itd.

Na prvi pogled nije jasno čemu služi ovako definiran polinom. Neke njegove uloge su identifikacija kratnosti nultočke, ispitivanje toka polinoma (raste li ili pada u nekoj točki) kao i traženje ekstrema.

Teorem 22. *Neka je p polinom. $\alpha \in \mathbb{C}$ je nultočka od p kratnosti k ako i samo ako vrijedi*

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \ldots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0.$$

Primjer 23. Dokažite da polinom $1 + x/1 + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$ nema višestrukih nultočki.

Rješenje. Označimo gornji polinom s p. Kada bi x_0 bio višestruka nultočka od p tada bi vrijedilo $p(x_0) = p'(x_0) = 0$, odnosno $1 + x_0/1 + x_0^2/2! + \ldots + x_0^n/n! = 1 + x_0/1 + x_0^2/2! + \ldots + x_0^{n-1}/(n-1)! = 0$. No oduzimanjem tih dvaju jednakosti dobijemo $x_0^n/n! = 0$ odnosno $x_0 = 0$. No $p(0) = 1$ što znači da p nema višestrukih nultočki. □

Teorem 24. *Neka je p polinom i $x_0 \in \mathbb{R}$. Ako je $p'(x_0) > 0$ tada p raste u točki x_0. Ako je $p'(x_0) < 0$ tada p pada u točki x_0. Ako u točki x_0 p ima lokalni ekstrem tada je $p'(x_0) = 0$.*

Ovaj teorem nam kazuje kako su jedini kandidati za ekstreme one točke u kojima je derivacija jednaka nuli.

Primjer 25. Pronađimo ekstrem kvadratnog polinoma. Neka je $p(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je $p'(x) = 2ax + b$. Jedini kandidat za ekstrem je onda x_0 takva da je $0 = p'(x_0) = 2ax_0 + b$ odnosno $x_0 = -\frac{b}{2a}$, što potvrđuje poznatu činjenicu.

Primjer 26. Uvjet $p'(x_0) = 0$ nije dovoljan da bi p u x_0 imao ekstrem. Primjer za to su $p(x) = x^3$ i $x_0 = 0$. Naime, $p'(x) = 3x^2$ pa je $p'(x_0) = 0$, a očito p nema ekstrem u nuli.

Primjer 27. Ako polinom $p(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ima tri realne nultočke dokažite da mora biti $p^2 \geq 3q$.

Dokaz. $p'(x) = 3x^2 + 2px + q$. Da bi p imao tri realne nultočke p mora rasti pa padati pa opet rasti. To znači da je p' pozitivna pa negativna i na kraju pozitivna, tj. ima dvije realne nultočke. To je moguće jedino ako je diskriminanta od p' pozitivna tj. $4p^2 - 12q \geq 0$. □

Navedimo još neka svojstva derivacija.

Teorem 28. *Neka su p i q polinomi. Tada vrijedi*

(*i*) $(p + q)'(x) = p'(x) + q'(x)$,

(*ii*) $(p \cdot q)'(x) = p(x)q'(x) + p'(x)q(x)$,

(*iii*) $(p \circ q)'(x) = p'(q(x))q'(x) \quad ((p \circ q)(x) = p(q(x)))$.

Zadaci

1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoji polinom p stupnja n s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(0) = 0$ te $p(x_1) = p(x_2) = \ldots = p(x_n) = n$, gdje su $x_1, \ldots, x_n$ međusobno različiti cijeli brojevi.

2. Dani su polinomi s kompleksnim koeficijentima

$$\begin{aligned} P(x) &= x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{sa korijenima} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{i} \\ Q(x) &= x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \quad \text{sa korijenima} \quad x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2. \end{aligned}$$

   Ako su $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ i $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ realni brojevi, dokažite da je i $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ realan.

3. Neka je P nekonstantni polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Dokažite da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva m za koje je $|P(m)|$ složen broj.

4. Nađite najmanju vrijednost izraza $a^2 + b^2$, gdje su a i b realni brojevi, za koje jednadžba $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ ima bar jedno realno rješenje.

5. Za polinom $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ s realnim koeficijentima uvedimo oznaku

$$\Gamma(p) = a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2.$$

   Neka je $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Pronađite polinom g s realnim koeficijentima koji zadovoljava sljedeće uvjete

   (*i*) $g(0) = 1$;

   (*ii*) $\Gamma(f^n) = \Gamma(g^n)$.

6. Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i $a > 0$. Ako jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja u $\langle 0, 1\rangle$ dokažite da je $a \geq 5$.

7. Neka je $a \geq 3$ i neka je P polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima. Dokažite da je

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |a^i - P(i)| \geq 1.$$

8. Neka je P polinom oblika

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

   i neka je $|P(x)| \leq 1$ za sve $x \in [-1, 1]$. Koje sve vrijednosti može imati a?

9. Nađite polinom $P(x, y)$ s realnim koeficijentima koji poprima samo pozitivne vrijednosti, ali za svaki $c > 0$ postoje x i y za koje je $P(x, y) < c$ (ili drugačije rečeno $P(x, y) > 0$, $\inf_{x,y\in\mathbb{R}} P(x, y) = 0$).

10. Nađite nekonstantni polinom $P(x, y)$ takav da je $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$ za sve $a \in \mathbb{R}$.

11. Neka je p polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Definiramo niz (x_n) sa $x_0 = 0$, $x_n = p(x_{n-1})$, za $n \geq 1$. Ako je $x_n = 0$ za neki $n > 0$ dokažite da je tada $x_1 = 0$ ili $x_2 = 0$.

12. Neka su $a_j,\ b_j,\ j = 0, \dots n$ realni brojevi i $c_j = a_j + ib_j \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$. Pretpostavimo da se svi korijeni polinoma

$$P(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$$

nalaze u gornjoj poluravnini $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Dokažite da su sve nultočke polinoma

$$\begin{aligned} Q(z) &= a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \\ R(z) &= b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0 \end{aligned}$$

realne.

13. Postoje li racionalni brojevi $a_0, \dots a_{n-1}$ takvi da nisu svi jednaki nuli i da pri tome vrijedi?

$$a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} + a_{n-2}\sqrt[n]{2^{n-2}} + \ldots + a_1\sqrt[n]{2} + a_0 = 0.$$

14. Izračunajte

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

15. Neka je f polinom. Ako $f(x) = x$ nema realnih rješenja dokažite da ni $f(f(x)) = x$ nema realnih rješenja.

16. Pronađite sve polimome p takve da je $p(f(x)) = f(p(x))$ i $p(0) = 0$, gdje je f dana funkcija koja ima svojstvo $f(x) > x$.

17. Nađite polinom oblika $p(x) = x^2 + px + q$ za koji je $\max_{x \in [-1,1]} |p(x)|$ minimalan.

18. Neka je

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 - 2 \quad \text{i} \\ P_k(x) &= P_1(P_{k-1}(x)) \quad \text{za } k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Dokažite da su za svaki $n \in \mathbb{N}$ svi korijeni jednadžbe

$$P_n(x) = x$$

realni i međusobno različiti.

19. Odredite sve polinome P sa cjelobrojnim koeficijentima koji zadovoljavaju relaciju $16P(x^2) = P(2x)^2$.

20. Neka je $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, gdje je $n > 1$ prirodan. Dokažite da se $f(x)$ ne može prikazati kao produkt dva nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

21. Nađite sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje je polinom $P(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}$ djeljiv polinomom $Q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^m$.

22. Odredite sve polinome P stupnja n koji imaju samo racionalne korijene, a skup njihovih koeficijenata je $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Rješenja

1. Iz uvjeta zadatka slijedi da su $x_1, \ldots, x_n$ nultočke polinoma $p(x) - n$ pa vrijedi $p(x) - n = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Uvrštavanjem $x = 0$ slijedi $-n = (-1)^n a x_1 x_2 \ldots x_n$, odnosno $n = |a||x_1||x_2|\ldots|x_n|$. Kako su $x_1, \ldots, x_n$ međusobno različiti slijedi da su svi osim najviše dva među njima po apsolutnoj vrijednosti veći od 1. Stoga je $n \geq 2^{n-2}$, a to vrijedi samo za $n \leq 4$. Lako je vidjeti kako polinomi

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 4 - (x-1)(x+1)(x+2)(x-2) \\ p_3(x) &= 3 - (x-1)(x+1)(x-3) \\ p_2(x) &= 3 - (x-1)(x-2) \\ p_1(x) &= 1 - (x+1) \end{aligned}$$

zadovoljavaju uvjete zadatka. Konačno rješenje je 1, 2, 3 i 4.

2. Prema zadanome P i Q možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \\ Q(x) &= (x - x_1^2)(x - x_2^2)\ldots(x - x_n^2). \end{aligned}$$

Osim korijena jedino što nam je zadano tiče se zbroja koeficijenata. Stoga je prirodno uvrstiti $x = 1$ jer je vrijednost polinoma u točki 1 jednaka upravo zbroju njegovih koeficijenata.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots \\ Q(1) &= (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)\ldots(1 - x_n^2) = 1 + b_1 + b_2 + \ldots \end{aligned}$$

Uvrstimo li još $x = -1$ u P imamo

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1 - x_1)\ldots(-1 - x_n) = (-1)^n(1 + x_1)\ldots(1 + x_n) = \\ &= 1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \end{aligned}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi da su $P(1)$ i $P(-1)$ realni brojevi. No $Q(1) = (-1)^n P(1)P(-1)$ pa je i $Q(1) \in \mathbb{R}$, a time i $b_1 + b_2 + \ldots \in \mathbb{R}$.

3. Odaberimo m takav da je $|P(m)| \neq 1$. Kako za cijele a i b vrijedi $a - b | P(a) - P(b)$ slijedi $kP(m) = (kP(m) + m) - m | P(kP(m) + m) - P(m)$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Otuda vidimo da je $P(kP(m) + m)$ djeljiv s $P(m)$ za sve $k \in \mathbb{N}$. To znači da je $|P(kP(m) + m)|$ prost samo ako je jednak $|P(m)|$ i pri tome je $|P(m)|$ prost. No $P(kP(m) + m) = \pm P(m)$ može vrijediti za samo konačno mnogo $k \in \mathbb{N}$ čime je zadatak riješen.

4. Neka je x realno rješenje jednadžbe iz zadatka. Očito je $x \neq 0$. Relaciju

$$0 = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = x^2\left(x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

smijemo dijeliti sa x^2 pa nakon uvođenja supstitucije $t = x + \frac{1}{x}$ imamo

$$0 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = t^2 + at + b - 2,$$

tj. $at + b = 2 - t^2$. Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti (ili težinske A-K) slijedi

$$(2 - t^2)^2 \leq (a^2 + b^2)(t^2 + 1)$$

odnosno

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(2-z)^2}{z+1},$$

gdje je $z = t^2 = (x + \frac{1}{x})^2$. Očito je $z \geq 4$, a kako je funkcija $f(z) = \frac{(2-z)^2}{z+1}$ rastuća za $z \geq 4$ (lako se pokazuje; recimo promatrajući $f(z) - f(w)$ za $z > w \geq 4$) slijedi

$$a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}.$$

Uzmemo li $a = \frac{4}{5}$ i $b = \frac{2}{5}$ dobijemo $a^2 + b^2 = \frac{4}{5}$, a jednadžba $x^4 + \frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + 1 = 0$ ima rješenje $x = -1$. Tražena vrijednost je $\frac{4}{5}$.

5. Kako se u $\Gamma(p)$ pojavljuju kvadrati koeficijenata prirodno bi bilo polinom p kvadrirati. Međutim, na taj način nećemo dobiti nekakvu pravilnost jer će se a_i^2 pojaviti uz član x^2 pa ih ne možemo sve zajedno skupiti. Poželjno bi bilo naći takav polinom kod kojeg će svi oni biti uz istu potenciju od x. Promotrimo 'polinom'

$$p(x)p(1/x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(a_0 + a_1/x + \ldots + a_n/x^n).$$

U prvoj zagradi se a_i pojavljuje uz član x^i, a u drugoj uz x^{-i}. Stoga će kad izmnožimo obje zagrade a_i^2 biti uz x^0. To znači da je slobodan koeficijent u $p(x)p(1/x)$ jednak upravo $\Gamma(p) = a_0^2 + a_1^2 + \ldots a_n^2$.

Dakle za rješenje zadatka je dovoljno naći takav g za koji će biti $g(0) = 1$ $f(x)^n f(1/2)^n = g(x)^n g(1/x)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, a to je opet ekvivalentno sa $f(x)f(1/x) = g(x)g(1/x)$. f možemo faktorizirati kao $f(x) = (3x+1)(x+2)$. Ako uzmemo $g(x) = (3x+1)(2x+1)$ tada je

$$\begin{aligned}
f(x)f(\frac{1}{x}) &= (3x+1)(x+2)(\frac{3}{x}+1)(\frac{1}{x}+2) = \\
&= \frac{1}{x^2}(3x+1)(x+2)(3+x)(1+2x) \\
g(x)g(\frac{1}{x}) &= (3x+1)(2x+1)(\frac{3}{x}+1)(\frac{2}{x}+1) = \\
&= \frac{1}{x^2}(3x+1)(2x+1)(3+x)(2+x),
\end{aligned}$$

dakle zaista je $f(x)f(1/x) = g(x)g(1/x)$, a trivijalno je za vidjeti da je i $g(0) = 1$.

6. Neka su $x_1, x_2 \in \langle 0, 1\rangle$ nultočke polinoma $p(x) = ax^2 + bx + c$, tj. $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. $f(0)$ i $f(1)$ su pozitivni cijeli brojevi pa je stoga

$$\begin{aligned}
1 \leq p(0)p(1) = a^2 x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2) &\overset{(A-G)}{<} \\
< a^2 \left(\frac{x_1 + x_2 + 1 - x_1 + 1 - x_2}{4} \right)^4 &= \frac{a^2}{16},
\end{aligned}$$

što znači $a^2 > 16$ odnosno $a > 4$, a kako je a cijeli ujedno je i $a \geq 5$.

7. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je P takav da je $|a^i - P(i)| < 1$ za $i = 0, \dots, n+1$. Neka je $P(i) = a^i + \varepsilon_i$ i pri tome je $|\varepsilon_i| < 1$. Iz teorema 20 znamo da je P određen točkama $(0, P(0))$, $(1, P(1))$, $\dots$, $(i, P(i))$ (tu nam točka $(i+1, P(i+1))$ nije potrebna već ćemo preko nje doći do kontradikcije). Izraz za P glasi

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-0)\dots(x-(i-1))(x-(i+1))\dots(x-n)}{(i-0)\dots(i-(i-1))(i-(i+1))\dots(i-n)} P(i).$$

Uvrštavanjem $x = n+1$ dobivamo

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)\dots(n+1-(i-1)))(n+1-(i+1))\dots 1}{(i-0)\dots(i-(i-1))(i-(i+1))\dots(i-n)} P(i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{(n+1)!}{(n+1-i)i!(n-i)!)} (a^i + \varepsilon_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n+1}{i} (a^i + \varepsilon_i). \end{aligned}$$

Ovo nas podsjeća na binomni razvoj.

$$\begin{aligned} P(n+1) &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-a)^i + a^{n+1} + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \varepsilon_i = \\ &= (-1)^n (1-a)^{n+1} + a^{n+1} + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \varepsilon_i, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} |P(n+1) + (a-1)^{n+1} - a^{n+1}| &\le \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} |\varepsilon_i| < \\ &< \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Konačno je $P(n+1) < a^{n+1} - (a-1)^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \le a^{n+1} - 1$. Kontradikcija.

Drugo rješenje.

Indukcijom. Za konstantan polinom $p(x) = c$ mora biti $|c-1| \ge 1$ ili $|c-a| \ge 1$ jer je u suprotnome $2 \le |a-1| \le |c-a| + |c-1| < 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve polinome stupnja manjeg od n. Neka je p polinom n-tog stupnja. Definiramo

$$q(x) = \frac{p(x+1) - p(x)}{a-1}.$$

q je očito stupnja $n-1$ pa prema induktivnoj pretpostavci vrijedi

$$\begin{aligned} 1 \le \max_{i=0,\dots,n} |q(i) - a^i| &= \max_{i=0,\dots,n} \left| \frac{p(i+1) - p(i)}{a-1} - a^i \right| = \\ &= \max_{i=0,\dots,n} \left| \frac{p(i+1) - a^{i+1}}{a-1} - \frac{p(i) - a^i}{a-1} \right| \le \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{a-1}\left(\max_{i=0,\ldots,n}|p(i+1)-a^{i+1}|+\max_{i=0,\ldots,n}|p(i)-a^{i}|\right)\le\\
&\le \frac{2}{a-1}\max_{i=0,\ldots,n+1}|p(i)-a^{i}|\le\\
&\le \max_{i=0,\ldots,n}|p(i)-a^{i}|.
\end{aligned}
$$

8. Uvrštavanjem $x = 1$ i $x = -1$ dobijemo

$$
\begin{aligned}
-1 \le a+b+c+d \le 1\\
-1 \le -a+b-c+d \le 1
\end{aligned}
$$

te oduzimanjem $-1 \le a+c \le -1$. Analogno za $x = 1/2$ i $x = -1/2$ dobijemo $-1 \le \frac{a}{8}+\frac{c}{2} \le 1$. Iz tih nejednakosti slijedi $-4 \le a \le 4$. Pokažimo da polinom $p(x) = 4x^3 - 3x$ zadovoljava uvjete zadatka. Na taj način ćemo pokazati da a mora biti u skupu $[-4, 4]$ jer će tada i polinomi $\frac{4}{\alpha}x^3 - \frac{3}{\alpha}x$ za $|\alpha| \le 1$ imati traženo svojstvo. Za $x \le 1$ vrijedi

$$
4x^3-3x-1 = 4x(x^2-1)+(x-1) = (x-1)(2x+1)^2 \le 0,
$$

odakle vidimo $4x^3 - 3x \le 1$. Analogno se pokazuje i $-1 \le 4x^3 - 3x$.

9. $P(x, y) = (xy - 1)^2 + y^2$. Primijetimo kako $P(x, y) = 0$ povlači $y = 0$ i $xy = 1$ što je nemoguće. S druge strane, $P(x, y) < c$ možemo postići uz $y = \sqrt{c}/2$ i $x = 1/y$.

10. $\lfloor 2x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + \lfloor 2\{x\}\rfloor$ odakle vidimo da je $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \in \{0, 1\}$, što znači da uzimanjem $P(x, y) = (y - 2x)(y - 2x - 1)$ dobijemo traženi polinom.

11. Neka je $x_n = 0$ i pretpostavimo da je $x_1 \ne 0$. Tada je $x_{n+1} = x_1$. Iz $x_k - x_{k-1} \mid P(x_k) - P(x_{k-1}) = x_{k+1} - x_k$ slijedi

$$
(x_1-x_0)\mid(x_2-x_1)\mid\ldots\mid(x_n-x_{n-1})\mid(x_{n+1}-x_n) = x_1-x_0,
$$

a kako su prvi i zadnji član u tom nizu djeljivosti jednaki zaključujemo da je $x_k - x_{k-1} = \pm(x_1 - x_0)$ za sve $k \ge 1$. Među njima neki moraju biti pozitivni, a neki negativni jer je $(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) = 0$. To onda znači da postoji k takav da je $x_{k+1} - x_k = -(x_k - x_{k-1})$ odnosno $x_{k+1} = x_{k-1}$. No tada je $x_{k+2} = p(x_{k+1}) = p(x_{k-1}) = x_k$ i induktivno $x_{n+2} = x_n = 0$. Međutim $x_{n+2} = x_2$ čime smo dokazali tvrdnju.

12. Dokazat ćemo da Q ima samo realne nultočke. Za R se tvrdnja analogno dokazuje.

    Pretpostavimo da je $\zeta \notin \mathbb{R}$ kompleksna nultočka od Q. Znamo da je tada i $Q(\overline{\zeta}) = 0$. Neka su $z_1, \ldots, z_n$ nultočke od P. Prema uvjetu zadatka svi z_i su u gornjoj poluravnini, tj. $\operatorname{Im} z_i > 0$. P možemo pisati kao

$$
P(z) = c_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) = Q(z)+iR(z).
$$

Uvrstimo $z = \zeta$, a zatim $z = \overline{\zeta}$

$$
P(\zeta) = Q(\zeta)+iR(\zeta) = iR(\zeta)
$$

$$P(\overline{\zeta}) = Q(\overline{\zeta}) + iR(\overline{\zeta}) = i\overline{R(\zeta)}$$

Stoga je $|P(\zeta)| = |P(\overline{\zeta})|$ odnosno

$$|c_n(\zeta - z_1)\dots(\zeta - z_n)| = |c_n(\overline{\zeta} - z_1)\dots(\overline{\zeta} - z_n)|.$$

BSO pretpostavimo da je ζ u gornjoj, a $\overline{\zeta}$ u donjoj poluravnini. No tada je $|\zeta - z_i| > |\overline{\zeta} - z_i|$ jer su ζ i $\overline{\zeta}$ smješteni simetrično obzirom na realnu os, a z_i je u istoj poluravnini kao i ζ_i. Time smo dobili kontradikciju s $|P(\zeta)| = |P(\overline{\zeta})|$. Dakle Q i R zaista imaju samo realne nultočke.

13. Zadatak je ekvivalentan pitanju postoji li polinom f s racionalnim koeficijentima stupnja strogo manjeg od n takav da je $f(\sqrt[n]{2}) = 0$. Pokazat ćemo da takav ne postoji. Neka f ima navedeno svojstvo i pretpostavimo da je f najmanjeg mogućeg stupnja. Neka je $g(x) = x^n - 2$. Podijelimo polinom g sa f

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x),$$

gdje je stupanj od r manji od stupnja od f. Prema pretpostavci je $g(\sqrt[n]{2}) = f(\sqrt[n]{2}) = 0$ pa uvrštavanjem $x = \sqrt[n]{2}$ u zadnju relaciju dobijemo $r(\sqrt[n]{2}) = 0$. Kako je f polinom najmanjeg stupnja koji poništava $\sqrt[n]{2}$, a stupanj od r je manji od stupnja od f slijedi da je nužno $r(x) = 0$. Dakle g se može prikazati kao produkt dva nekonstantna polinoma s koeficijentima iz $\mathbb{Q}$ (tj. reducibilan je nad $\mathbb{Q}$). Međutim, na g možemo primijeniti Eisensteinov kriterij uz $p = 2$ (teorem 15) koji dokazuje kako je g ireducibilan. Kontradikcija.

14. S navedenim produktom je teško išta izvesti pomoću adicijskih formula. Ideja koja bi nam mogla pasti na pamet su Vietèove formule. Kada bismo mogli konstruirati polinom čiji bi korijeni bili $\sin\frac{k\pi}{n}$ tada bi njihov produkt bio jednak slobodnom članu tog polinoma. Krenimo u tom smjeru.

Znamo da su n-ti korijeni od jedinice jednaki $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Iskoristimo tu činjenicu. Označimo $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Tada su $1, \omega, \omega^2, \dots, w^{n-1}$ korijeni polinoma $x^n - 1$, tj.

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\dots(1-w^{n-1}).$$

Podijelimo tu relaciju s $x - 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = (x-\omega)(x-\omega^2)\dots(x-w^{n-1}),$$

uvrstimo $x = 1$

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

i uzmimo apsolutnu vrijednost

$$n^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{n} = \left(2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2.$$

Kako su svi $\sin\frac{k\pi}{n}$ pozitivni zaključujemo

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Primijetimo kako ipak nismo koristili Vietèove formule, no ta ideja nas je odvela na dobar put.

15. BSO uzmimo $f(x)-x>0$ za sve x (to slijedi iz uvjeta $f(x)\neq x$, $\forall x\in\mathbb{R}$). Tada je $f(f(x))>f(x)>x$ za sve x pa ni $f(f(x))=x$ nema realnih rješenja.

16. Vrijedi $p(f(0))=f(p(0))=f(0)$, tj. $f(0)$ je fiksna točka od p. Definiramo niz $x_0=0$, $x_n=f(x_{n-1})$. Iz uvjeta $f(x)>x$ slijedi da je x_n rastući. Pokažimo indukcijom da su svi x_n fiksne točke od p. Baza je već pokazana. Pretpostavimo da je $p(x_{n-1})=x_{n-1}$. Tada je $p(x_n)=p(f(x_{n-1}))=f(p(x_{n-1}))=f(x_{n-1})=x_n$. Dakle dokazali smo kako p ima beskonačno mnogo fiksnih točaka, tj. $p(x)-x$ ima beskonačno mnogo nultočaka odnosno $p(x)=x$ je jedino moguće rješenje. Očito p zadovoljava sve postavljene uvjete.

17. Rješenje je više opisnoga tipa. Uz malo truda moglo bi se i formalno zapisati

    Maksimum od $|p(x)|$ se može postići samo na rubovima intervala $[-1,1]$ ili u točki u kojoj p ima ekstrem. Primijetimo da translatiranjem parabole određene s p lijevo-desno postavljajući tjeme na y-os nećemo povećati maksimalnu vrijednost od $|p(x)|$. Stoga je $p(x)$ oblika x^2+c. Na jednak način sada parabolu pomičemo u smjeru osi y tako da se vrijednosti $|p(1)|$ i $|p(0)|$ podudaraju. To nam daje $|c+1|=|p(1)|=|p(0)|=|c|$ odnosno $c=-1/2$. Dakle, rješenje je $p(x)=x^2-1/2$.

18. Ako je $|x|>2$ tada je $x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$ tj. $x^2-2>x$. Stoga je $|x|\leq 2$ pa smijemo uvesti supstituciju $x=2\cos t$, $t\in[-\pi,\pi]$. Vrijedi $P_1(x)=2(2\cos^2 t-1)=2\cos 2t$ i induktivno zatim $P_k(x)=2\cos 2^k t$. $P_n(x)=x$ je ekvivalentno sa $\cos 2^n t=\cos t$, odnosno $2^n t=\pm t+2k\pi$. Dakle, rješenja dobivamo uz sljedeće vrijednosti od t

    $$t=\frac{2k\pi}{2^n-1},\qquad t=\frac{2k\pi}{2^n+1}.$$

    Lako je vidjeti da na taj način dobijemo 2^n različitih vrijednosti od $x=2\cos t$, tj. našli smo sva rješenja dane jednadžbe

19. Neka je $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$, $a_n\neq 0$. Izjednačavanjem vodećih koeficijenata od $16P(x^2)$ i $P(2x)^2$ dobijemo $16a_n=2^{2n}a_n^2$ ili $16=2^{2n}a_n\geq 2^{2n}$, odakle zaključujemo $n\leq 2$. Uzimanjem $P(x)=ax^2+bx+c$ i izjednačavanjem koeficijenata dođemo do rješenja $p(x)=0$, $p(x)=16$, $p(x)=4x$ i $p(x)=x^2$.

20. Neka je $f(x)=g(x)h(x)=(a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0)(b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_0)$. Iz $a_0b_0=3$ slijedi $|a_0|=3$ ili $|b_0|=3$ (ali ne može vrijediti oboje). Određenosti radi uzmimo $|a_0|=3$. Neka je l najmanji prirodan broj takav da je $a_l\nmid 3$. Zbog $|a_m|=1$ slijedi $1<l\leq m$. Broj $a_lb_0+a_{l-1}b_1+a_{l-2}b_3+\ldots$ jednak je koeficijentu uz x^l u f, a iz definicije a_l slijedi da nije djeljiv s 3. To znači da l mora biti jednak n ili $n-1$. Pošto je h nekonstantan vrijedi da je stupanj od g jednak točno 1. Tada je h linearan polinom oblika $\pm x\pm 1$ pa

je njegova nultočka x_0 jednaka 1 ili -1. No, tada mora biti i $f(x_0) =$, što je nemoguće jer je su brojevi $f(1)$ i $f(-1)$ iz skupa $\{-1, 7\}$.

21. Vrijedi

$$P(x) = \frac{(x^n)^{m+1} - 1}{x^n - 1} \qquad Q(x) = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

Da bi P bio djeljiv s Q nužno je i dovoljno da svi korijeni od Q budu ujedno i korijeni od P (jer su svi različiti). Neka su $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, w^m$ svi korijeni od Q. Vidimo da će svaki ω^k biti ujedno i korijen od P ako i samo ako je $\omega^{kn} \neq 1$, $1 \leq k \leq m$. Dokažimo da je to ekvivalentno sa $(m+1, n) = 1$.

Pretpostavimo da je $\omega^{kn} \neq 1$ za sve $1 \leq k \leq m$. Neka je $d \mid m+1, n$. Tada je $w^{\frac{m+1}{d}n} = w^{(m+1)\frac{n}{d}} = 1$, što znači $\frac{m+1}{d} > m$, tj. $d = 1$, a time i $(m+1, n)$.

Ako je $\omega^{kn} = 1$ za neki $1 \leq k \leq m$ slijedi $kn \mid m+1$, tj. $n \mid m+1$. Dakle, $(m+1, n) = n$, a kako je $k \leq m$ mora biti $n > 1$ pa je $(m+1, n) \neq 1$.

22. Neka je $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Označimo nutočke od P s $x_1, \ldots, x_n$. Kako su koeficijenti od P pozitivni slijedi da su svi x_i negativni. Iz Vietèovih formula vidimo da jedna nultočka mora biti jednaka nuli jer bi u suprotnome i svi koeficijenti bili različiti od nule. Dakle, $a_0 = 0$ i stavimo $x_n = 0$. Ostale nultočke su sve različite od nule jer je $a_1 \neq 0$. Neka je $y_i = -x_i$. Prema Vietèovim formulama je

$$\prod_{i=1}^{n-1} y_i = \frac{a_1}{a_n}$$

$$\Big(\prod_{i=1}^{n-1} y_i\Big)\Big(\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_{n-1}}\Big) = \frac{a_2}{a_n}$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Iz $A - G$ nejednakosti slijedi

$$\frac{a_1}{a_2}(n-1) = \frac{n-1}{\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_{n-1}}} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n(n-1)}$$

ili

$$(n-1)^2 \leq \frac{a_{n-1}a_2}{a_n a_1}.$$

Ako bi bilo $n > 3$ tada su brojevi a_n, a_{n-1}, a_2, a_1 međusobno različiti te je

$$(n-1)^2 \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

a otuda $n \leq 2$, što je kontradikcija. Za $n = 1$ jedini polinom koji dolazi u obzir je x. Za $n = 2$ su to $x(2x+1)$ i $x(x+2)$. Za $n = 3$ mora biti

$$(3-1)^2 \leq \frac{a_2^2}{a_1 a_3},$$

a to je izvedivo samo ako je $a_2 = 3$. Sada u obzir dolaze polinomi $x(2x^2+3x+1)$ i $x(x^2+3x+2)$. Lako je provjeriti da oba imaju racionalne nultočke.

Uvjet zadatka zadovoljavaju polinomi $1x + 0$, $2x^2 + 1x + 0$, $1x^2 + 2x + 0$, $2x^3 + 3x^2 + 1x + 0$ i $1x^3 + 3x^2 + 2x + 0$.