MALE TAJNE IZ GEOMETRIJE

Matija Bašić

Zadatak 1. Neka su A i B bilo koje dvije točke, te $k \neq 1$ pozitivan realan broj. Dokaži da je geometrijsko mjesto točaka P takvih da je

$$\frac{PA}{PB} = k$$

kružnica čije središte leži na pravcu AB.

Zadatak 2. Neka su nad stranicama konveksnog četverokuta konstruirani kvadrati. Dokaži da su spojnice središta nasuprotnih kvadrata okomite i jednake duljine.

Zadatak 3. Neka su BE i CF visine u trokutu ABC, a H njegov ortocentar. Dokaži da je $AH \sin \alpha = EF$.

Zadatak 4. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $AB = BC = CA$, te da je $\angle CDA = 120°$. Dokaži da je $BD = AD + CD$.

Zadatak 5. Neka su dijagonale četverokuta $ABCD$ okomite, a točka D' takva da je $AD = AD'$ i $CD = CD'$. Dokaži da je D' ortocentar trokuta ABC ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.

Zadatak 6. Neka su E, F odabrane na stranicama BC i AC ($BC \neq AC$) redom takve da je

$$BE \cdot CF \cdot AC = BC \cdot CE \cdot AF.$$

Neka je S presjek AE i BF. Dokaži da je $FS = ES$ ako i samo ako je četverokut $SECF$ tetivan.

Zadatak 7. Neka je $AEBD$ tetivan četverokut takav da je $\angle E + \angle B < 180°$, a točka F na pravcu BE takva da je $FD = ED$. Neka je C presjek pravaca BD i AE, a G presjek pravaca CE i FD, te neka vrijedi $BA^2 = BD \cdot BC$. Dokaži da su trokuti EFC i EGB slični.

Zadatak 8. Neka je H ortocentar tokuta ABC, te neka je točka A' presjek kružnice opisane polovištima trokuta ABC (P_1, P_2, P_3) i pravca AH koja je bliža točki A. Dokaži da je $A'P_2 = \frac{1}{2}HC$, te da je $\angle P_3A'H = \angle ACB$.

Zadatak 9. Neka su P, Q redom polovišta baza AB i CD trapeza $ABCD$. Dokaži da se pravci AD, BC i PQ sijeku u jednoj točki, te da su P, Q i sjecište dijagonala trapeza kolinearne točke.

Zadatak 10. Dokaži da su u svakom trokutu ortocentar, središte opisane kružnice i težište kolinearne točke.

Male tajne iz geometrije - rješenja

Matija Bašić

Zadatak 1. *Neka su A i B bilo koje dvije točke, te $k \neq 1$ pozitivan realan broj. Dokaži da je geometrijsko mjesto točaka P takvih da je*

$$\frac{PA}{PB} = k$$

*kružnica čije središte leži na pravcu AB (**Apolonijeva kružnica**).*

Dokazat ćemo da je središte tražene kružnice točka S, koja je polovište dužine UV, gdje su U i V na pravcu AB takve da je $AU : UB = AV : VB = k$.
Neka je P proizvoljna točka koja zadovoljava dani uvjet. Budući da je $AP : PB = AU : UB$ slijedi da je PU simetrala kuta $\angle BPA$. Neka je Q presjek pravca AP i paralele sa BP kroz V. Tada zbog sličnosti i ***Talesovog teorema proporcionalnosti*** imamo $AQ : QV = AP : PB = AV : VB = AQ : PQ$, pa slijedi $QV = PQ$.
Sada je $\angle QPV = \angle QVP = \angle BPV$, pa je PV simetrala kuta $\angle BPQ$. Odavdje vidimo da je $\angle UPV = \frac{1}{2}(\angle APB + \angle BPQ) = 90°$, pa P leži na kružnici promjera UV.
S druge strane, ako P leži na kružnici promjera UV, onda je $\angle UPV = 90°$. Neka je B' na UV takva da je $\angle UPB' = \angle APU$ (tada je $AP : PB' = AU : UB'$).
Za točku V' na AB takvu da je $AU : UB' = AV' : V'B'$ mora biti $\angle UPV' = 90°$ (prema prvom dijelu rješenja), pa je $V' = V$. Dakle, $AU : AV = UB' : VB'$. No, $AU : AV = UB : VB$, pa je $B = B'$. Zato je $AP : PB = AU : UB$, pa P zadovoljava traženi uvjet.

Napomena 1. Zadatak se vrlo lako rješava ***koordinatnom metodom***. Ako je $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $P(x, y)$, onda je dani uvjet ekvivalentan sa

$$x^2 + \frac{2k^2b - 2a}{1 - k^2}x + y^2 = \frac{k^2b^2 - a^2}{1 - k^2}.$$

Napomena 2. U slučaju da je $k = 1$ dobivamo simetralu dužine AB.

Zadatak 2. *Neka su nad stranicama konveksnog četverokuta konstruirani kvadrati. Dokaži da su spojnice središta nasuprotnih kvadrata okomite i jednake duljine. (**Van Aubelov teorem**)*

Neka je dan četverokut $ABCD$, te nad stranicama konstruirani kvadrati BAA_1B_1, CBB_2C_2, DCC_1D_1, ADD_2A_2, te P, Q, R, S redom njihova središta. Neka je O presjek RP i SQ, a X polovište od AC. Trokuti ADD_1 i D_2DC su sukladni (SKS), pa je $AD_1 = CD_2$ i $\angle DCD_2 = \angle DD_1A$. Ako je E presjek DD_1 i CD_2, onda je $\angle DEC = \angle DED_2$, pa slijedi da je $CD_2 \perp AD_1$.
SX je ***srednjica*** u trokutu CD_2A, pa je $D_2C = 2SX$ i $D_2C || SX$. Analogno, $D_1A = 2RX$ i $D_1A || RX$. Odavdje zaključujemo $SX \perp RX$ i $SX = RX$. Slično dokazujemo da je $QX = QP$, te $QX \perp PX$.

Iz ovih relacija zaključujemo da su trokuti SXQ i PXR sukladni (SKS), te odavdje slijedi $SQ = PR$. Ako je F presjek OP i QX zbog $\angle OQF = \angle FPX$ i $\angle XFP = \angle OFQ$ imamo $\angle QOF = \angle PXF = 90°$. Dakle, $PR \perp QS$.

Napomena. Zadatak se vrlo lako može riješiti smještanjem u ***kompleksnu ravninu*** i dokazivanjem identiteta $(p - r)i = q - s$.

Zadatak 3. *Neka su BE i CF visine u trokutu ABC, a H njegov ortocentar. Dokaži da je $AH \sin\alpha = EF$.*

Četverokut $AEHF$ je tetivan i AH mu je promjer. Prema ***teoremu o sinusima*** primjenjenom na trokut AEF je $EF = AH \sin\alpha$.

Zadatak 4. *Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $AB = BC = CA$, te da je $\angle CDA = 120°$. Dokaži da je $BD = AD + CD$.*

Četverokut $ABCD$ je tetivan, pa prema ***Ptolomejevom teoremu*** imamo da vrijedi $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, odakle slijedi $BD = AD + CD$.

Zadatak 5. *Neka su dijagonale četverokuta $ABCD$ okomite, a točka D' takva da je $AD = AD'$ i $CD = CD'$. Dokaži da je D' ortocentar trokuta ABC ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.*

Neka je D' ortocentar trokuta ABC. Tada je $\angle CBD = 90° - \gamma = \angle CAD' = \angle CAD$, pa je po ***teoremu o obodnom kutu***, četverokut $ABCD$ tetivan.
Neka je $ABCD$ tetivan četverokut, onda je $\angle AD'C = \angle ADC = 180° - \beta$, pa je D' sjecište kružnice koja nad tetivom AC zatvara kut od $180° - \beta$ i visine iz vrha B, što je jedinstvena točka i to upravo ortocentar trokuta ABC.

Zadatak 6. *Neka su E, F odabrane na stranicama BC i AC ($BC \neq AC$) redom takve da je*

$$BE \cdot CF \cdot AC = BC \cdot CE \cdot AF.$$

Neka je S presjek AE i BF. Dokaži da je $FS = ES$ ako i samo ako je četverokut $SECF$ tetivan.

Neka je D presjek pravaca CS i AB. Prema ***Cevinom teoremu*** imamo $AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$. Iz danog uvjeta slijedi $AC : BC = AD : BD$, pa prema ***teoremu o simetrali kuta*** slijedi da je CD simetrala kuta $\angle ACB$. Ako je $SECF$ tetivan četverokut, onda je $\angle EFS = \angle ECS = \angle FCS = \angle FES$, pa je $FS = ES$. Ako je $FS = ES$, onda je S presjek simetrale kuta $\angle ECF$ i simetrale stranice EF što je točka ***na opisanoj kružnici*** trokuta ECF. Dakle, $SECF$ je tetivan.

Zadatak 7. *Neka je $AEBD$ tetivan četverokut takav da je $\angle E + \angle B < 180°$, a točka F na pravcu BE takva da je $FD = ED$. Neka je C presjek pravaca BD i AE, a G presjek pravaca CE i FD, te neka vrijedi $BA^2 = BD \cdot BC$. Dokaži da su trokuti EFC i EGB slični.*

Budući da je $BA^2 = BD \cdot BC$ prema ***potenciji točke B obzirom na kružnicu*** ADC je BA tangenta na tu kružnicu. Prema ***teoremu o kutu tetive i tangente*** slijedi da je $\angle ACB = \angle ACD = \angle BAD$. (Ovo smo mogli dobiti i promatrajući slične trokute BAD i BCA.)
No, budući da je $AEBD$ tetivan, te $DE = FD$ slijedi da je $\angle DAB = \angle DEB = \angle DFB$. Dakle dobivamo $\angle GCB = \angle GFB$, pa je $GBFC$ tetivan četverokut. No, sada je $\angle EGB = 180° - \angle BGC = \angle BFC$. Pa su trokuti EFC i EGB slični (KKK).

Zadatak 8. *Neka je H ortocentar tokuta ABC, te neka je točka A' presjek kružnice opisane polovištima trokuta ABC (P_1, P_2, P_3) i pravca AH koja je bliža točki A. Dokaži da je $A'P_2 = \frac{1}{2}HC$, te da je $\angle P_3A'H = \angle ACB$.*

Kružnica iz zadataka je ***Feuerbachova ili Eulerova kružnica, kružnica 9 točaka*** na kojoj leže polovišta stranica, nožišta visina, te polovišta spojnica vrhova s ortocentrom. Zato je točka A' polovište dužine AH. Dužina $A'P_2$ je srednjica u trokutu AHC, pa $A'P_2 = \frac{1}{2}HC$. Neka je N nožište visine AH. Dužina $A'P_3$ je srednjica u trokutu ABH, pa je $A'P_3 \parallel BH$, te je $\angle P_3A'H = \angle BHN = 90° - \angle HBC = \angle ACB$.

Zadatak 9. *Neka su P, Q redom polovišta baza AB i CD trapeza $ABCD$. Dokaži da se pravci AD, BC i PQ sijeku u jednoj točki, te da su P, Q i sjecište dijagonala trapeza kolinearne točke.*

Neka je T sjecište pravaca AD i BC, te neka je T' sjecište pravaca AD i PQ. Iz sličnosti trokuta $T'DQ$ i $T'AP$, te TDC i TAB slijedi

$$\frac{T'D}{T'A} = \frac{DQ}{AP} = \frac{DC}{AB} = \frac{TD}{TA}.$$

Odavdje slijedi da je $T \equiv T'$, što je i trebalo dokazati.
Neka je K sjecište dijagonala trapeza, te neka su M, N sjecišta pravca KT sa AB, CD redom. Tada iz sličnosti trokuta DNK i BMK, NCK i MAK, te DCK i BAK slijedi

$$\frac{DN}{MB} = \frac{DK}{KB} = \frac{CK}{AK} = \frac{CN}{AM}.$$

Dakle, $\frac{DN}{NC} = \frac{AM}{MB}$. S druge strane,

$$\frac{DN}{AM} = \frac{NT}{MT} = \frac{NC}{MB}.$$

Dakle, $\frac{DN}{NC} = \frac{MB}{AM}$. Odavdje slijedi $DN = NC$ i $AM = MB$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 10. *Dokaži da su u svakom trokutu ortocentar, središte opisane kružnice i težište kolinearne točke. (**Eulerov pravac**)*

Neka je dan trokut ABC. Ako povučemo paralele sa stranicama kroz nasuprotne vrhove dobit ćemo trokut $A'B'C'$. Tada su A, B, C polovišta stranica trokuta $A'B'C'$, te su visine u trokutu ABC simetrale stranica u trokutu $A'B'C'$. Zato je ortocentar trokuta ABC središte opisane kružnice trokutu $A'B'C'$. Nadalje, pravci AA', BB', CC' (težišnice u trokutu $A'B'C'$) su dijagonale paralelograma, pa raspolavljaju stranice trokuta ABC, tj. poklapaju se sa težišnicama u trokutu ABC. Zato trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju isto težište. Sada možemo zaključiti da homotetija sa središtem u težištu trokuta ABC s koeficijentom -2 preslikava trokut ABC u trokut $A'B'C'$, pa tako i središte opisane kružnice trokutu ABC preslikava u ortocentar trokuta ABC (jer je ta točka središte opisane kružnice trokutu $A'B'C'$). Dakle, težište, ortocentar i središte opisane kružnice trokuta ABC su ***kolinearne*** točke.

Napomena 1. Ovo smo mogli dokazati i koristeći sličnost trokuta OGP i HGC, gdje je H ortocentar, G težište, O središte opisane kružince, te P polovište dužine AB. Da bi se dokazala ta sličnost potrebno je malo trigonometrije te iskoristiti činjenicu da ***težište dijeli težišnicu u omjeru 1:2***.

Napomena 2. Neka je F središte kružnice 9 točaka. Tada F također leži na Eulerovom pravcu, te vrijedi

$$OG : GF : FH = 2 : 1 : 3$$

(u poretku O, G, F, H).

Napomena 3. Prema ***Eulerovom teoremu*** vrijedi $OI^2 = R^2 - 2Rr$, gdje je I središte upisane kružnice, R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice. Odavdje slijedi da je $R \geq 2r$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Napomena 4. Može se dokazati da je u svakom trokutu

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{R + r}{R}.$$

Koristeći Eulerov teorem, slijedi da je $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Zadaci za samostalno rješavanje

Odabrala Mea Bombardelli

1. Dokaži da simetrale vanjskih kuteva raznostraničnog trokuta sijeku produžetke nasuprotnih stranica trokuta u trima kolinearnim točkama.

2. Neka je ABC jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AB}$. Kružnica k dira njegove stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama P i Q, te opisanu kružnicu trokuta ABC (iznutra). Dokaži da je polovište dužine $\overline{PQ}$ središte kružnice upisane trokutu ABC.

3. Opisana kružnica trokuta ABC ima središte O. Visina AD trokuta siječe opisanu kružnicu u T. Dokaži da je Simsonov pravac točke T okomit na AO.

4. Kružnica sa središtem O prolazi vrhovima A i C trokuta ABC i siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u točkama K i L. Neka je M drugo sjecište kružnica (ABC) i (KBL). Dokaži da je kut $\angle OMB$ pravi.

Napomena. Ako je T točka na opisanoj kružnici trokuta, onda njene ortogonalne projekcije na stranice trokuta leže na istom pravcu, to je ***Simsonov pravac***.