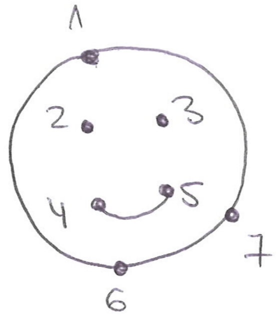
TEORIJA GRAFOVA

Kristina Škreb

Definicija: Graf je uređeni par skupova (V, E) gdje je V skup vrhova, a E skup bridova (dvočlani podskupovi od V).

• Primjer 1:



$G = (V, E)$

$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$E = \{\{1,6\}, \{1,7\}, \{4,5\}, \{6,7\}\}$

→ petlja (ovaj brid možemo označiti sa $\{2,2\}$)

- Vrhove $u, v \in V$ grafa G nazivamo SUSJEDNIMA ako $\exists e \in E$ t.d. $e = \{u, v\}$, tj. ako su ta dva vrha povezana bridom. (SUSJEDNI ili INCIDENTNI vrhovi)
- Bridove nazivamo INCIDENTNIMA ako imaju zajednički vrh.
- Graf koji nema petlji ni višestrukih bridova nazivamo JEDNOSTAVNIM.

Definicija: KOMPLEMENTARNI graf G^c jednostavnog grafa G je jednostavni graf s istim brojem vrhova kao i G, a dva vrha u G^c su spojena bridom ako i samo ako nisu spojeni u G.

- KONAČAN graf je graf u kojem su $|V|$ (broj vrhova) i $|E|$ (broj bridova) konačni.

Definicija: STUPNJEM VRHA $v \in V$ grafa $G = (V, E)$ zovemo broj bridova koji su incidentni s njim („izlaze iz njega") i označavamo sa $d(v)$. IZOLIRANI VRH je vrh stupnja 0.

U Primjeru 1:

v	1	2	3	4	5	6	7
$d(v)$	2	0	0	1	1	2	2

Lema o rukovanju:

U svakom je grafu zbroj svih stupnjeva vrhova jednak dvostrukom broju bridova.

$$G=(V,E) \Rightarrow \sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot|E|$$

• Primjer 2: Dokaži da u skupini ljudi, broj ljudi koji poznaju neparan broj ljudi je paran. (Ako A poznaje B, onda B poznaje A).

Rj:

Skup vrhova su osobe. Ako se dvije osobe poznaju, povezuje ih brid.

V_1 = skup vrhova neparnog stupnja (osobe koje poznaju neparan broj ljudi)

V_2 = skup vrhova parnog stupnja (osobe koje poznaju paran broj ljudi)

Lema o rukovanju

$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_1} d(v) + \underbrace{\sum_{v\in V_2} d(v)}_{\text{djeljivo sa 2 jer su svi } d(v) \text{ parni za } v\in V_2} = 2\cdot|E|$$

$$\Rightarrow 2 \mid \sum_{v\in V_1} d(v)$$

kada bi $|V_1|$ bio neparan $\Rightarrow \sum_{v\in V_1} d(v)$ neparno ↯

$\Rightarrow |V_1|$ je paran, tj. paran je broj osoba koje poznaju neparno ljudi.

• Zad 1: Ako iz svakog vrha konveksnog poliedra izlaze po 4 brida, dokažite da svaka ravnina koja ne prolazi kroz niti jedan vrh poliedra, siječe taj poliedar po mnogokutu s parnim brojem vrhova.

• Zad 2: Neka je $n\in\mathbb{N}$ i $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ podskupovi nekog skupa B. Pretpostavimo da

(a) svaki A_i ima točno $2n$ elemenata

(b) svaki $A_i \cap A_j$ $(1\le i<j\le 2n+1)$ sadrži samo 1 element i

(c) svaki element od B sadržan je u bar dva skupa A_i.

Za koje vrijednosti od n možemo svakom elementu od B pridružiti jedan od brojeva 1 ili 0 na takav način da za svaki skup A_i broj njegovih elemenata kojima je pridružena 0 iznosi točno n.

• Zad 3: Neka je S skup koji se sastoji od m parova (a,b) pozitivnih cijelih brojeva, sa svojstvom da je $1 \leq a < b \leq n$. Dokaži da postoji barem $4m \cdot \frac{m - \frac{n^2}{4}}{3n}$ trojki (a,b,c) takvih da (a,b), (b,c) i (a,c) pripadaju S.

• Za dva vrha a,b grafa G kažemo da su povezana ako postoji neki put između njih (niz $a v_1 v_2 \dots v_k b$ susjednih različitih vrhova koji počinje s a i završava s b). Graf je POVEZAN ako su povezana svaka 2 vrha.

Teorem:
Ako su u grafu G vrhovi a i b neparnog stupnja i svi ostali vrhovi parnog stupnja, onda su vrhovi a i b povezani.

Dokaz:
p.p. suprotno. Graf možemo razbiti na 2 nepovezana podgrafa G_a i G_b. U G_a se nalaze svi vrhovi (i njima incidentni bridovi) koji su povezani sa vrhom a, a u G_b oni povezani s b.
G_a i G_b nemaju zajedničkih vrhova (inače bi a i b bili povezani). Neka su $a, v_2, v_3, \dots, v_k$ vrhovi u G_a i m broj bridova u G_a. Tada je d(a) neparan broj i $d(v_i)$ paran za $i = 2, \dots, k$.
Lema o rukovanju: $\underbrace{d(a) + d(v_2) + \dots + d(v_k)}_{\text{neparno}} = 2m$ ↯

$\Rightarrow$ a i b su povezani

Zad 4: Pokažite da je jednostavan graf G s n vrhova i strogo više od $\binom{n-1}{2}$ bridova povezan.

Zad 5: Pokažite da je jednostavan graf s p vrhova gdje svi vrhovi imaju stupanj $\geq \frac{1}{2}(p-1)$ povezan.

Zad 6: U nekoj zemlji postoji barem 101 grad. Glavni grad te zemlje spojen je sa 100 gradova izravnim (dvosmjernim) zrakoplovnim linijama. Svaki grad osim glavnog spojen je s 10 drugih gradova. Poznato je da se iz bilo kojeg grada može doći u bilo koji grad (drugi) unutar te države. Dokaži da je moguće zatvoriti polovicu zrakoplovnih linija glavnog grada tako da se čuva svojstvo da se iz svakog grada može doći u bilo koji drugi grad.

Definicija: Put $v_0 v_1 v_2, \dots v_k$ se zove ciklus ako je $v_0 = v_k$.

Teorem:
U Grafu G s n vrhova i barem n bridova postoji ciklus za $n \geq 3$.

Dokaz:

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

$n=3$ ✓

P.p. da tvrdnja vrijedi za $n=k \geq$ vrhova

Promatrajmo graf s $k+1$ vrhom. Ako postoji vrh stupnja 0 ili 1, promatramo graf bez tog vrha (i njemu pripadajućeg brida, ako je stupanj 0 izbacimo bilo koji brid) te tvrdnja slijedi po pretpostavci indukcije. Ako ne postoje vrhovi stupnja 0 ili 1 tada svi vrhovi imaju stupanj barem 2, a zbog leme o rukovanju imaju stupanj točno 2.

Tada put $v_1 v_2 v_3$ zamijenimo sa bridom $v_1 v_3$ i opet se tvrdnja svodi na pretpostavku indukcije.

• Zad 7: Tijekom predavanja svaki od 5 učenika (Goran, Nina, Marko, Ivan, Marin) zaspao je točno 2 puta. Svaka dva su u nekom trenutku spavala istovremeno. Dokaži da je u nekom trenutku barem troje učenika spavalo istovremeno.

• Zad 8: Selo je napravljeno u obliku kvadrata koji se sastoji od 9 blokova (manjih kvadrata) duljine l, u formaciji 3X3. Oko svakog bloka ide cesta. Koliku najmanju duljinu moramo preći, ako želimo proći svakom ulicom i na kraju završiti na istom mjestu?

• Zad 9: Dana je tablica oblika $n x n$ u koju su upisani različiti brojevi takva da su svi redovi različiti (oni su različiti ako se ne podudaraju u jednom unosu). Dokaži da postoji stupac kojeg možemo ukloniti, a da preostali redovi ostanu različiti.

Definicija: Staza je niz $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k e_k v_{k+1}$ (ne nužno različitih) vrhova i različitih bridova. EULEROVA STAZA je staza koja sadrži svaki brid, dok je EULEROVA TURA zatvorena Eulerova staza (ona kojoj je prvi i zadnji vrh isti).

- EULEROV GRAF je graf u kojem postoji Eulerova tura.

Teorem:
Povezani graf ima Eulerovu turu akko su svi vrhovi grafa G parnog stupnja.

(*) Ako su u povezanom grafu točno 2 vrha neparnog stupnja, onda postoji Eulerova šetnja koja počinje u jednom, a završava u drugom vrhu neparnog stupnja.

- Zad 10: Dan je povezan graf G s k bridova. Dokazati da se njegovi bridovi mogu označiti brojevima 1, 2, .., k tako da za svaki vrh v grafa G koji je spojen s barem 2 druga vrha, vrijedi: najveća zajednička mjera svih brojeva kojima su označeni bridovi incidentni s v je 1.

- Zad 11: Neka je domino uređeni par različitih prirodnih brojeva. Pravilnim nizom domina zovemo lanac različitih domina za koje je prva koordinata svih domina iza prvog jednaka drugoj koordinati prethodnog domina. Za svake prirodne brojeve $i \neq j$ domina (i,j) i (j,i) ne mogu se obje pojaviti u lancu. Neka je D_{40} skup svih domina na kojima se pojavljuju brojevi ne veći od 40. Koliko domina sadrži najduži lanac domina u tom skupu?

Definicija: HAMILTONOV PUT je put koji prolazi kroz sve vrhove grafa točno jednom, a HAMILTONOV CIKLUS je zatvoren Hamiltonov put.

- Graf je HAMILTONOV ako sadrži Hamiltonov ciklus.

Teorem (Ore):
Neka je dan graf G s n vrhova. Ukoliko za svaka dva nesusjedna vrha u G vrijedi da je suma njihovih stupnjeva barem n, onda je G Hamiltonov.

Korolar (Dirac):

Neka je dan graf s n vrhova. Ukoliko svaki vrh ima stupanj $\geq \frac{n}{2}$, graf je Hamiltonov.

- Zad 12: Neka je k-klika skup od k ljudi t.d. se svakih dvoje međusobno poznaje. Na nekoj zabavi, svaki par 3-klika ima najmanje jednu zajedničku osobu, i ne postoje 5-klike. Dokaži da postoje [redacted] 2 osobe ili manje na zabavi čiji odlazak uzrokuje raspad svih 3-klika.

- Zad 13: Za konačan graf G, neka je $f(G)$ broj trokuta, a $g(G)$ broj tetraedara (K_4) koji se sastoje od bridova od G. Nađite najmanju konstantu c takvu da vrijedi

$$g(G)^3 \leq c \cdot f(G)^4 \quad \text{za svaki graf } G.$$

Rješenja zadataka:

(1.) m – broj vrhova dobivenog mnogokuta

Ravnina siječe dani poliedar na dva poliedra

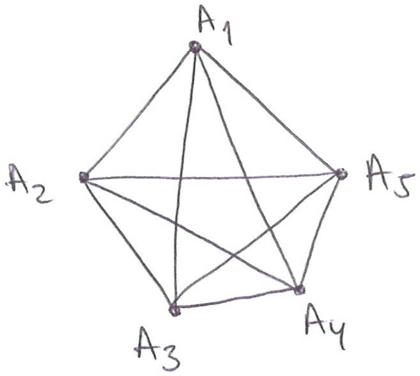
Označimo sa P prvi poliedar, neka on osim ovih m vrhova ima još n vrhova od početnog poliedra. Svaki od tih n vrhova ima stupanj 4. Iz svakog od m vrhova mnogokuta izlaze po 2 brida mnogokuta i još jedan brid poliedra P, znači oni su stupnja 3.

Lema o rukovanju: $4n+3m=2b$, gdje je b broj bridova od P

$\Rightarrow$ m je paran

(2) Dokažimo da se svaka točka nalazi u točno 2 skupa A_i. Napišemo li A_j kao uniju skupova $A_j \cap A_i$ za sve i različite od j, napisali smo jedan $2n$-člani skup kao uniju $2n$ jednočlanih skupova koji su onda svi međusobno disjunktni, tj. različiti. Znači da se točka iz A_j nalazi u točno 2 skupa. Kako je A_j proizvoljan, tvrdnja je dokazana.

Neka su skupovi A_i vrhovi grafa, a elementi su spojnice (bridovi) onih vrhova koji ih sadrže. Dobit ćemo $2n+1$ vrhova i sve njihove spojnice.



slika za $n=2$.

Zadatak se svodi na pitanje da li je moguće bridove tog grafa označiti sa 0 ili 1 tako da iz svakog vrha izlazi točno n bridova s istom oznakom.

- Ako je to moguće, tada je takvih bridova (označenih s 0) $\frac{(2n+1)\cdot n}{2}$.
To je cijeli broj $\Rightarrow$ n je paran.

- Ako je $n=2k$, svakom vrhu pridružimo 0 sa svim spojnicama s k sljedećih i k prethodnih vrhova (fiksirimo ciklički uređaj vrhova), a ostalima 1. Takvo pridruživanje postoji, jer ako je A_j među k sljedećih vrhova za A_i, tada je A_i među k prethodnih vrhova za A_j i obratno. Znači da ćemo uvijek istom bridu pridružiti istu vrijednost bez obzira na to iz kojeg vrha gledamo.

3. G graf sa n vrhova koje označimo sa $1,2,\dots,n$. Ako par (x,y) ili (y,x) pripada skupu S, onda vrhove označene sa x i y spaja brid.
Trojke koje tražimo su vrhovi u G koji čine trokut.
Ako su x i y spojeni bridom, onda brid $\{x,y\}$ ima $d(x)+d(y)-2$ incidentnih bridova.
$\Rightarrow$ x i y imaju barem $d(x)+d(y)-2-(n-2)$ zajedničkih susjednih vrhova
$\Rightarrow$ broj trokuta u kojem se nalaze x i y je barem $d(x)+d(y)-n$
$\Rightarrow$ Ukupan broj trokuta je barem

$$\sum_{(x,y)\in S} \frac{d(x)+d(y)-n}{3}$$ jer smo svaki trokut računali 3 puta

$$\sum_{(x,y)\in S} (d(x)+d(y)) = \sum_{i=1}^{n} d(i)^2$$ zato što će se svaki $d(x)$ pojavljivati $d(x)$ puta (sa svojim susjedima)

$$\Rightarrow \sum_{(x,y)\in S} \frac{d(x)+d(y)-n}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} d(i)^2 - \frac{mn}{3}$$

Vrijedi $$\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} d(i)^2\right) \overset{A-K}{\geq} \frac{1}{3n}\left(\sum_{i=1}^{n} d(i)\right)^2$$

Znamo da je $$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

$\Rightarrow$ Ukupan broj trokuta je barem
$$\frac{4m^2}{3n} - \frac{mn}{3} = 4m \cdot \frac{m-\frac{n^2}{4}}{3n}$$

4. p.p. da graf nije povezan
$\Rightarrow \exists V_1,\dots,V_m$ komponente povezanosti od G
$V_1 := V'$, $V'' := V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_m$
$\Rightarrow$ takav graf sa najviše bridova je $K_x \cup K_{n-x}$
• K_m = potpun graf s m vrhova (znači da su svaka 2 vrha spojena bridom)

$$e(G) = e(V'\cup V'') \leq e(K_x \cup K_{n-x}) = e(K_x) + e(K_{n-x}) = \binom{x}{2} + \binom{n-x}{2}$$
$$= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(n-x)(n-x-1)}{2} = \underbrace{x^2 - nx + \frac{n^2-n}{2}}_{f(x):[1,n-1]\to\mathbb{R}} \leq (*)$$

$1 \leq x \leq n-1$

$\Rightarrow$ maximum se postiže na rubovima $x=1$ & $x=n-1$

$$\Rightarrow (*) \leq \binom{1}{2} + \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{2}$$

$\Rightarrow e(G) \leq \binom{n-1}{2}$ ↯ kontradikcija

(5.) p.p. suprotno tj. graf nije povezan
Neka su mu komponente povezanosti $V_1, \dots, V_n$

$\Rightarrow \exists V_i$ t.d. $|V_i| \le \frac{p}{2}$ (Dirichletov princip)

tj. $|V_i| \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$

$\Rightarrow x \in V_i$, tada $d(x) \ge \frac{1}{2}(p-1)$

Ali jer je $|V_i| \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, slijedi da x može imati najviše $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1$ susjeda

$\Rightarrow d(x) \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \frac{1}{2}(p-1)$ ↯

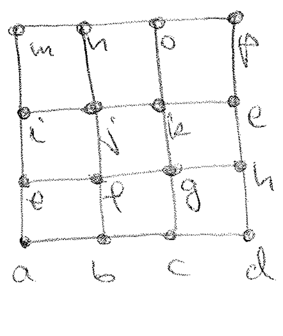
$\Rightarrow$ graf G je povezan

(6.) G = graf čiji su vrhovi gradovi, a bridovi zrakoplovne linije. Uklonimo vrh a koji predstavlja glavni grad i njemu incidentne bridove. Tada se novo dobiveni graf G' sastoji od vrhova stupnja 9 i 10. Svaki vrh stupnja 9 povezan je s barem još jednim vrhom istog stupnja (inače imamo podgraf s jednim vrhom neparnog stupnja). Tada svakom predstavniku povezanih vrhova stupnja 9 dodamo jednu liniju s glavnim gradom. Njih će biti najviše 50, što znači da možemo barem 50 (pola) od 100 linija s glavnim gradom ukinuti.

(7.) g_1, g_2 intervali u kojima je Goran spavao, h_1 i h_2 intervali u kojima je Nina spavala ... Ti intervali predstavljat će nam vrhove grafa, znači $V = \{g_1, g_2, h_1, h_2, m_1, m_2, m_1', m_2', i_1, i_2\}$
Intervale koji imaju zajednički presjek spojimo bridom. Bridova će biti $\binom{5}{2} = 10$. Dakle, postoji ciklus barem duljine 3. Znači da je u nekom trenutku stvarno troje ljudi spavalo istovremeno.

(8.) Kretanje je označeno bridovima. Čvorišta ceste su vrhovi grafa

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p\}$



Očito je da ćemo se nekim ulicama više puta kretati. Iz svakog čvorišta moramo isti broj puta ući i izaći $\Rightarrow$ stupanj svakog vrha je paran.

$\Rightarrow d(a) \geq 2, d(d) \geq 2, d(m) \geq 2, d(p) \geq 2$

Iz ostalih vrhova izlaze 3 ili 4 ceste, pa će oni imati stupanj barem 4.

$$\Rightarrow \frac{d(a)+d(b)+\dots+d(p)}{2} \geq \frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 4}{2} = 28$$

$\Rightarrow$ Najmanji broj bridova je 28. Po Eulerovom teoremu postoji Eulerova tura (jer su svi vrhovi parnog stupnja). Najkraća duljina je $28l$.

(9.) p.p. suprotno, tj. da svaki put kada uklonimo stupac postoje barem 2 ista reda.

Neka su $\{r_1, \dots, r_n\}$ redovi. G je graf takav da skup vrhova $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ predstavlja redove. ($v_i = r_i$). Ako uklanjanjem stupaca redovi r_i i r_j postaju isti, tada vrhove v_i i v_j spoji bridom. Po našoj pretpostavci koji god stupac uklonili uvijek će postojati barem 2 ista reda. Dakle, u grafu G postoji barem n bridova i točno n vrhova $\Rightarrow$ graf ima ciklus.

Neka niz $t_1, t_2, \dots, t_k, t_1$ predstavlja ciklus ($t_i \in V$, $i \neq j \Rightarrow t_i \neq t_j$)

Ako su t_1 i t_2 isti ako uklonimo stupac c_1 $\Rightarrow$ razlikuju se samo na c_1-om mjestu. Neka se na c_1-om mjestu u redu t_1 nalazi broj a, a u t_2 broj b.

t_2 i t_3 isti ako uklonimo stupac $c_2 \Rightarrow$ razlikuju se samo na c_2-om mjestu. $c_1 \neq c_2 \Rightarrow$ broj na mjestu c_1 u redovima t_2 i t_3 je isti.

t_i i t_{i+1} isti kada uklonimo stupac $c_i \Rightarrow$ razlikuju se samo na mjestu c_i

$c_1 \neq c_i \Rightarrow$ broj na mjestu c_1 u redovima t_i i t_{i+1} je isti

t_k i t_1 isti kada uklonimo stupac $c_k \Rightarrow$ razlikuju se samo na mjestu c_k

$c_1 \neq c_k \Rightarrow$ broj na mjestu c_1 u redovima t_1 i t_k je isti

$\Rightarrow$ Induktivno slijedi da se u redu t_2 i t_k na c_1-om mjestu nalazi isti broj (broj b), a vrijedi da se u redu t_k i t_1 na mjestu c_1 nalazi isti broj $\Rightarrow a = b$ ↯

(jer bi onda t_1 i t_2 bili isti u početnoj tablici)

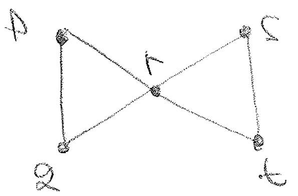
$\Rightarrow \exists$ stupac koji možemo ukloniti tako da preostali redovi ostanu različiti

(10.) Pretp. da su svi bridovi u G obojani crno. Broj vrhova neparnog stupnja je paran. Poredajmo vrhove neparnog stupnja u parove i svaki par spojimo crvenim bridom (mogući su višestruki bridovi – crni i crveni). G' je novonastali graf. U G' svi vrhovi imaju paran stupanj $\Rightarrow$ postoji Eulerova šetnja. Obilazeći sve bridove prvi crni brid označimo sa 1, a svaki idući brojem više nego prethodni. Crvene bridove ne označujemo. ~~Za~~ Svaki vrh postojat će dva brida označena s nekim prirodnim brojem i njegovim sljedbenikom, pa je najveća zajednička mjera svih brojeva kojima su označeni bridovi incidentni sa svakim vrhom jednaka 1.

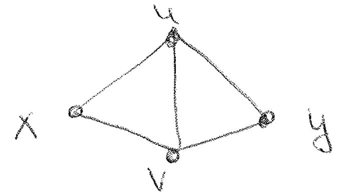
(11.) Niz domina se može zapisati t.d. se zajedničke koordinate piši samo jednom. Npr. niz (1,2),(2,3),(3,9) možemo zapisati kao 1,2,3,9. Označimo sada vrhove pravilnog n-terokuta sa 1,2,...,n. Svaki domino predstavlja brid grafa. Svaki put kada put dođe u vrh koji nije početni niti krajnji vrh tog puta, on mora i izaći iz tog vrha. Kada je n paran nije moguće da u put budu uključeni svi bridovi grafa, jer iz svakog vrha izlazi neparan broj bridova. Uklanjanjem $\frac{1}{2}(n-2)$ bridova iz potpunog grafa, može se dobiti graf kojem će iz n-2 vrha izlaziti po n-2 bridova, a neparan broj bridova će izlaziti iz točno 2 vrha. U toj situaciji se može naći Eulerova šetnja koja počinje na jednom i završava u drugom od vrhova koji imaju neparan stupanj, tako da svakim bridom dobivenog grafa prođe jedanput. Taj put će imati duljinu $\binom{n}{2} - \frac{1}{2}(n-2)$, i to iznosi 761 kada je $n=40$.

(12.) Osobe predstavljaju vrhove grafa, a poznanstva bridove. m-klika je tada skup od m vrhova, od kojih su svaka dva povezana bridom. Postojanje klike (m-klike) znači da graf sadrži potpun graf K_m kao podgraf.
3-klike predstavljaju trokute u grafu (K_3).
Želimo dokazati da u grafu u kojem svaka dva trokuta imaju barem jedan zajednički vrh i ne sadrži K_5 kao podgraf, postoje [redacted] 2 vrha ili manje čije uklanjanje eliminira sve trokute.

Neka je G takav graf. Ako G sadrži najviše jedan trokut, tvrdnja je očita. Inače se pojavljuje jedan od sljedećih slučajeva:



(i)

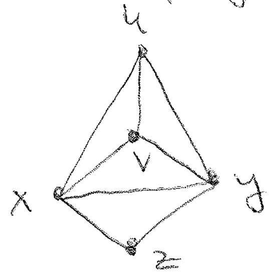


(ii)

- p.p. da se pojavljuje (i), neka je $T_1 = \{p, q, r\}$, $T_2 = \{r, s, t\}$. Ako brisanje r uništava sve trokute, gotovi smo. Inače postoji treći trokut T_3 koji nije uništen brisanjem vrha r, a mora imati zajednički vrh i sa T_1 i sa T_2. Svaki takav trokut dovodi do pojave (ii) sa $x = r$, $u \in T_1$, $v \in T_2$.

- promatrajmo slučaj (ii). $T_1 = \{u, v, x\}$, $T_2 = \{u, v, y\}$. Ako brisanje u i v uništava sve trokute, gotovi smo. Inače, za neki $z \notin \{u, v, x, y\}$ mora postojati trokut $T_3 = \{x, y, z\} \Rightarrow x$ i y su spojeni bridom.

$\Rightarrow$ G sadrži sljedeći podgraf



(T:) Brisanje x i y uništava sve trokute.

p.p. suprotno $\Rightarrow \exists\, T$ trokut $T \cap \{x, y\} = \emptyset$. T dijeli vrh sa $\{x, y, z\}$ $\Rightarrow T$ sadrži z. Slično, T dijeli vrh i sa $\{x, y, v\} \Rightarrow T$ sadrži v i T mora dijeliti vrh sa $\{x, y, u\} \Rightarrow T$ sadrži u

$\Rightarrow T = \{z, u, v\}$, a to je nemoguće jer G ne smije sadržavati K_5

$\Rightarrow$ uvijek postoje dva ili manje vrhova čije uklanjanje uništava sve trokute

13. Neka je $v_1, \dots, v_n$ vrhovi danog grafa G i neka je E skup njegovih bridova.

$\Rightarrow$ Nađimo vezu između $f(G)$ i $|E|$:

p.p. da je vrh v_i stupnja $x_i \Rightarrow x_i$ bridova izlazi iz njega. Označimo skup krajnjih vrhova tih bridova sa $A_i \Rightarrow |A_i| = x_i$

Neka su y_i i z_i broj trokuta, odnosno tetraedara koji sadrže vrh v_i.

Tada vrijedi

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i = 2|E|}_{\text{Lema o rukovanju}}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 3f(G), \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = 4g(G)$$

Neka je E_i skup svih bridova čije su obje krajnje točke (oba krajnja vrha) u A_i. Svaki od tih bridova na jedinstven način odgovara jednom trokutu koji sadrži vrh v_i. $\Rightarrow y_i = |E_i|$

Kako je $|A_i| = x_i$, to znači da E_i sadrži najviše $\binom{x_i}{2}$ bridova

$$\Rightarrow y_i \le \binom{x_i}{2}$$

$$\Rightarrow y_i = \sqrt{|E_i|} \cdot \sqrt{y_i} \le \sqrt{|E|} \cdot \sqrt{\binom{x_i}{2}} \le \sqrt{|E|} \cdot \frac{x_i}{\sqrt{2}} \quad \left(E_i \subseteq E \text{ i } \binom{x_i}{2} \le \frac{x_i^2}{2} \right)$$

Sumacijom po i dobijemo:

$$3f(G) \le \sqrt{|E|} \cdot \frac{2|E|}{\sqrt{2}} \quad \text{tj.} \quad f(G)^2 \le \frac{2}{9}|E|^3 \qquad (1)$$

(1) vrijedi za svaki graf, pa posebno i za graf G_i sa skupom vrhova A_i i skupom bridova E_i

$$\Rightarrow f(G_i)^2 \le \frac{2}{9}|E_i|^3 \qquad i = 1, \dots, n$$

- Svaki od $f(G_i)$ trokuta u G_i na jedinstven način odgovara jednom tetraedru koji sadrži vrh $v_i \Rightarrow z_i = f(G_i)$

$$\Rightarrow z_i = f(G_i)^{\frac{1}{3}} \cdot f(G_i)^{\frac{2}{3}} \le f(G_i)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot |E_i| \le f(G)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} y_i \quad \Big/ \sum_{i=1}^{n}$$

$$\Rightarrow 4g(G) \le f(G)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 3f(G)$$

$$\Rightarrow g(G)^3 \le \frac{3}{32} f(G)^4$$

$\boxed{C = \frac{3}{32}}$ Dokažimo da je to najmanja konstanta.

Promatrajmo potpuni graf K_n.

$$\frac{g(K_n)^3}{f(K_n)^4} = \frac{\binom{n}{4}^3}{\binom{n}{3}^4} = \frac{n^3 \cdot (n-1)^3 \cdot (n-2)^3 \cdot (n-3)^3 \cdot 6^4}{24^3 \cdot n^4 \cdot (n-1)^4 \cdot (n-2)^4} =$$

$$= \frac{3}{32} \cdot \frac{(n-3)^3}{n(n-1)(n-2)} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{3}{32}$$

$\Rightarrow \frac{3}{32}$ je zbilja najmanja konstanta