2. HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Zagreb, 18. lipnja 2017.

Zadatak 1.

Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je broj $(a+b)(a+3b)$ djeljiv sa 4, ali nije djeljiv sa 8. Dokaži da je tada broj $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ djeljiv sa 8, ali nije djeljiv sa 16.

Rješenje.

Ako su a i b različite parnosti, onda su brojevi $a+b$ i $a+3b$ oba neparni, pa je i njihov produkt neparan, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $(a+b)(a+3b)$ djeljiv sa 4.

Dakle, brojevi a i b su iste parnosti, te su brojevi $a+b$, $a+3b$ i $a+5b$ parni. Zato je $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ djeljiv sa 8.

Ako bi a i b bili oba neparni, onda ne mogu davati različite ostatke pri dijeljenju sa 4 jer bi $a+b$ bio djeljiv sa 4 (i $a+3b$ bi bio paran), a ne mogu ni davati iste ostatke pri dijeljenju sa 4 jer bi $a+3b$ bio djeljiv sa 4 (i $a+b$ bi bio paran). Stoga je ovaj slučaj nemoguć.

Dakle, a i b su oba parni. Ne mogu davati isti ostatak pri dijeljenju sa 4 jer bi $a+b$ bio djeljiv s 4 i $a+3b$ bi bio paran, te bi $(a+b)(a+3b)$ bio djeljiv sa 8. No, ako su a i b parni i daju različite ostatke pri dijeljenju sa 4, onda su brojevi $a+b$, $a+3b$ i $a+5b$ parni, ali nisu djeljivi sa 4. Dakle, $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ nije djeljiv sa 16.

Zadatak 2.

Izračunaj zbroj

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}+\dots+\frac{99^2+100^2}{99\cdot 100}.$$

Rješenje.

Promotrimo zbrojeve prvih nekoliko članova:

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}=\frac{5}{2}=\frac{1\cdot 5}{2},$$

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}=\frac{14}{3}=\frac{2\cdot 7}{3},$$

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}=\frac{27}{4}=\frac{3\cdot 9}{4},$$

Naslućujemo da bi za prirodni broj n moglo vrijediti

$$\frac{1^2+2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^2+3^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{(n-1)^2+n^2}{(n-1)\cdot n}=\frac{(n-1)(2n+1)}{n}.$$

Ako je to točno, onda traženi odgovor za $n=100$ iznosi $\dfrac{99\cdot 201}{100}$.

Postavljanjem slutnje ne možemo reći da smo sigurni u svoj odgovor - nekoliko primjera ne čini dokaz. Tvrdnju da zbroj n pribrojnika iznosi $\frac{(n-1)(2n+1)}{n}$ možemo zvati $T(n)$.

Već smo provjerili da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Da bismo proveli dokaz do kraja dovoljno je pokazati da tvrdnja $T(n)$ povlači $T(n+1)$. Tada smo sigurni da vrijedi tvrdnja za $n = 2, 3, \ldots$, pa sve do $n = 100$.

Potrebno je provjeriti da uz pretpostavku da $T(n)$ vrijedi, zbroj $n+1$ pribrojnika iznosi $\frac{n(2n+3)}{n+1}$. Uz pretpostavku $T(n)$ zbroj prvih $n+1$ pribrojnika je

$$\frac{(n-1)(2n+1)}{n} + \frac{n^2+(n+1)^2}{n(n+1)}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)(2n+1)\cdot(n+1)+n^2+(n+1)^2}{n(n+1)} &= \frac{2n^3-2n+n^2-1+n^2+n^2+2n+1}{n(n+1)}\\ &= \frac{2n^3+3n^2}{n(n+1)} = \frac{n(2n+3)}{n+1}.\end{aligned}$$

Time je dokaz gotov. Ova metoda dokazivanja se naziva matematička indukcija.

Zadatak 3.

Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Kružnica k s promjerom $\overline{AC}$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a tangenta na kružnicu k u točki D siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Kružnica opisana trokutu CDE siječe stranicu $\overline{AB}$ u točkama D i F. Odredi omjer površina trokuta ABC i BEF.

Rješenje.

Prema Talesovom teoremu je $\sphericalangle CDA = 90°$, tj. $\overline{CD}$ je visina na hipotenuzu $\overline{AB}$.

Neka je P polovište stranice $\overline{AC}$. Tada je $\overline{DP}$ polumjer kružnice k, pa je okomit na tangentu DE. Vrijedi $\sphericalangle PAE + PDE = 90° + 90° = 180°$, što pokazuje da je četverokut $APDE$ tetivan.

Dakle, na kružnici opisanoj trokutu CDE leži točka P, a leži i točka F. Stoga zaključujemo da je $\sphericalangle FEC = \sphericalangle FDC = 90°$, te je $\sphericalangle FPC = 180° - \sphericalangle FEC = 90°$. Dakle, četverokut $PFEC$ je pravokutnik.

Budući da je P polovište stranice $\overline{AC}$, a $PFEC$ pravokutnik, zaključujemo da su $\overline{PF}$ i $\overline{EF}$ srednjice, tj. E i F su redom polovišta dužina $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$.

Zato je površina trokuta BEF četvrtina površine trokuta ABC, tj. traženi omjer je 4.

Zadatak 4.

Svako polje ploče 9×9 je obojeno plavom ili crvenom bojom. Za redak kažemo da je *pretežno crven* ako ima više crvenih nego plavih polja, a za stupac kažemo da je *pretežno plav* ako ima više plavih nego crvenih polja. Neka je C broj pretežno crvenih redaka, a P broj pretežno plavih stupaca.

a) Može li biti $C + P = 18$?

b) Može li biti $C + P = 17$?

c) Može li biti $C + P = 16$?

Rješenje.

Ploča ima devet redaka, pa broj pretežno crvenih redaka ne može biti veći od 9, tj. vrijedi $C \leqslant 9$. Analogno je $P \leqslant 9$. Zbrajanje tih dviju nejednakosti dobivamo $C + P \leqslant 18$. Time nam je i jasniji odabir brojeva u pitanjima u zadatku.

Ako bi vrijedilo da je $C + P = 18$, onda bi moralo vrijediti $C = 9$ i $P = 9$.. To znači da bi svaki redak bio pretežno crven i svaki stupac pretežno plavi. Pretežno crveni retci imaju barem 5 crvenih polja. Ako su svi retci pretežno crveni, onda ukupno imamo barem 45 crvenih polja. Potpuno analogno, ako su svi stupci pretežno plavi, onda ukupno imamo barem 45 plavih polja. No, ukupan broj polja na ploči je $9 \times 9 = 81$, što je manje od $45 + 45$. Dakle, nije moguće da je $C + P = 18$.

Na isti način možemo zapravo odmah argumentirati da $C + P$ ne može biti 17. Naime, ako je $C + P = 17$, onda zbog $C \leqslant 9$ i $P \leqslant 9$, jedino može biti da je jedan od tih brojeva 9, a drugi 8. Sve u zadatku će biti isto ako zamijenimo retke i stupce ili imena boja, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C = 9$ i $P = 8$. Tada opet zaključujemo da imamo barem 45 crvenih i barem 40 plavih polja, što je u zbroju i dalje veće od 81.

Konačno, ako je $C + P = 16$, onda bi oba broja morala biti 8 ili je jedan 9, a drugi 7. Ponovimo li prethodni argument nećemo dobiti kontradikciju, pa možemo pokušati konstruirati primjer u kojem to vrijedi. Obojimo polja u gornje lijevom 8×8 dijelu ploče šahovski, naizmjenično u crvenu i plavu, te posljednji cijeli stupac u crvenu boju, a sva polja u zadnjem retku, osim zadnjeg, u plavu boju. Tada vidimo da je prvih 8 stupaca pretežno plavo, a prvih 8 redaka pretežno crveno.

Druga mogućnost je da u prva četiri retka stavimo 5 crvenih polja na početak, a u zadnja četiri retka na kraj, a preostala polja obojimo plavo. Tada dobivamo sliku koja ima svojevrsnu simetriju obzirom na rotaciju ploče za 90° oko središta ploče. Naravno, postoji još mnogo sličnih primjera.

Dakle, može biti $C + P = 16$.