3. HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Zagreb, 30. travnja 2019.

Zadatak 1.

Odredi sve parove (a, b) realnih (ne nužno pozitivnih) brojeva takve da je $a^2 + b^2 = 25$ i da

$$ab + a + b$$

poprima najmanju moguću vrijednost.

Rješenje.

Transformirajući nejednakost $(a + b + 1)^2 \geqslant 0$ dobivamo $a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b \geqslant 0$, odakle slijedi $2(ab + a + b) \geqslant -(a^2 + b^2) - 1$, tj. $ab + a + b \geqslant -13$.

Jednakost se postiže ako i samo ako je $a+b+1 = 0$, tj. $b = -a-1$. Uvrštavanjem u $a^2+b^2 = 25$ dobivamo

$$\begin{aligned} a^2 + (-a - 1)^2 &= 25, \\ 2a^2 + 2a + 1 &= 25, \\ a^2 + a - 12 &= 0, \\ (a + 4)(a - 3) &= 0, \end{aligned}$$

odakle slijede dva simetrična rješenja: $(a, b) = (-4, 3)$ i $(a, b) = (3, -4)$.

Zadatak 2.

Prirodni broj n je *dobar* ako svaku stranicu i dijagonalu pravilnog n-terokuta možemo obojiti u neku boju tako da za svaka dva vrha A i B postoji točno jedan vrh C, različit od A i B, takav da su dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ obojene istom bojom.

Odredi koji su od brojeva 7, 8, 9, 10, 11 i 12 dobri, a koji nisu.

Rješenje.

Brojevi 8, 10, 11 i 12 nisu dobri, a 7 i 9 jesu.

Prvo pokažimo da parni brojevi nisu dobri. Pretpostavimo da je n dobar broj i promatrajmo fiksni vrh A pravilnog n-terokuta obojenog na propisani način. Za svaki drugi vrh B postoji jedinstveni vrh C takav da su stranice trokuta ABC istobojne. Odnosno, sve vrhove različite od A možemo podijeliti u parove. Stoga je n neparan, a brojevi 8, 10 i 12 nisu dobri.

Nadalje, pokažimo da ni svi brojevi oblika $n = 3k + 2$ nisu dobri. Pretpostavimo da je n dobar broj i da je pravilni n-terokut obojen na propisani način. Neka je t broj trokuta ABC u kojima su sve stranice istobojne. Za svaki takav trokut imamo po tri para istobojnih stranica, dok za svaki par vrhova n-terokuta imamo jedinstveni trokut istobojnih stranica. Zato je

$$3t = \frac{n(n-1)}{2},$$

pa 3 dijeli n ili $n - 1$, tj. brojevi oblika $n = 3k + 2$ (među njima i 11) nisu dobri.

Konačno, konstrukcijom ćemo pokazati da su 7 i 9 dobri brojevi. Vrhove pravilnog n-terokuta označit ćemo brojevima 1, 2, ..., n i popisati trojke koje određuju trokute istobojnih stranica. Ukupno mora biti $t = \frac{n(n-1)}{6}$ trojki, a za svaki par različitih brojeva $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ mora postojati točno jedna trojka čiji su a i b članovi.

Za $n = 7$ imamo $t = 7$ trojki: $(1,2,3)$, $(1,4,5)$, $(1,6,7)$, $(2,4,6)$, $(2,5,7)$, $(3,4,7)$ i $(3,5,6)$.

Za $n = 9$ imamo $t = 12$ trojki: $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$, $(1,4,7)$, $(2,5,8)$, $(3,6,9)$, $(1,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,4,8)$, $(1,6,8)$, $(2,4,9)$ i $(3,5,7)$.

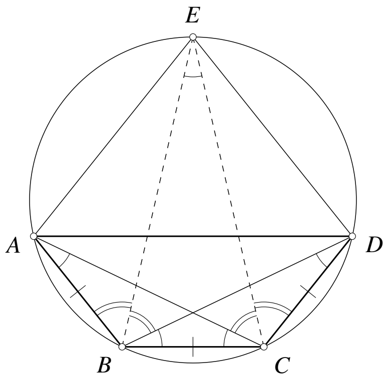
Zadatak 3.

Na kružnici su dane točke A, B, C i D takve da je $|AB| = |BC| = |CD|$. Neka se simetrale kutova $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle ABD$ sijeku u točki E.

Ako su pravci AE i CD paralelni, odredi $\sphericalangle ABC$.

Rješenje.

Zbog simetrije, jednakokračni trokuti ABC i BCD su sukladni, a tetivni četverokut $ABCD$ je jednakokračan trapez.



Označimo s x veličinu kutova uz osnovice trokuta ABC i BCD. Tada je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 180° - 2x$ i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 180° - 3x$, odakle je $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ECB = 90° - \frac{x}{2}$ i $\sphericalangle BEC = x$. Zato točka E leži na istoj kružnici kao A, B, C i D.

Dodatno je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BDC = x + x = 2x$ i $\sphericalangle ECD = \frac{1}{2}\sphericalangle ACD = 90° - \frac{3}{2}x$.

Budući da je $AE \parallel CD$, tetivni četverokut $ACDE$ je također jednakokračan trapez i imamo $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ECD$, odakle je $7x = 180°$. Konačno je $\sphericalangle ABC = \frac{5}{7} \cdot 180°$.

Zadatak 4.

Neka su m i n prirodni brojevi različite parnosti. Dokaži da broj

$$\frac{3m^2 + 5mn}{3n^2 + mn}$$

nije prirodan.

Rješenje.

Neka je d najveći zajednički djelitelj brojeva m i n, tj. $m = dm'$ i $n = dn'$, pri čemu su m' i n' relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

Sada trebamo dokazati da

$$\frac{3d^2m'^2 + 5d^2m'n'}{3d^2n'^2 + dm'n'} = \frac{m'(3m' + 5n')}{n'(m' + 3n')}$$

nije prirodan broj.

Uočimo da su brojevi $3m' + 5n'$ i $m' + 3n'$ neparni.

Ako je m' neparan, a n' paran, parni broj $n'(m' + 3n')$ očito nije djelitelj neparnog broja $m'(3m' + 5n')$.

U suprotnom, neka je neparni broj k najveći zajednički djelitelj brojeva $3m' + 5n'$ i $m' + 3n'$. Tada imamo

$$\begin{aligned} &k \mid 3 \cdot (3m' + 5n') - 5 \cdot (m' + 3n'), \qquad \text{tj.} \quad k \mid 4m', \\ &k \mid 1 \cdot (3m' + 5n') - 3 \cdot (m' + 3n'), \qquad \text{tj.} \quad k \mid -4n', \end{aligned}$$

odakle slijedi da k dijeli i m' i n', pa je $k = 1$ i oba faktora u

$$\frac{m'}{n'} \cdot \frac{3m' + 5n'}{m' + 3n'}$$

su neskrativi razlomci.

Budući da je $m' + 3n' > m'$, dokaz je gotov.