Kombinatorika

1. Dano je $2n+3$ točaka u ravnini tako da se nikoje tri ne nalaze na istom pravcu i nikoje četiri na istoj kružnici. Dokaži da postoji kružnica koja prolazi kroz neke tri od zadanih točaka i unutar koje se nalazi točno n zadanih točaka.

2. Imamo osam kockica čije su 24 strane obojene crveno, a preostalih 24 plavo. Dokažite da se od tih kockica može složiti kocka $2 \times 2 \times 2$ na čijem oplošju će biti jednak broj crvenih i plavih kvadrata.

3. U jednoj zgradi živi 119 stanara u 120 stanova. Kažemo da je stan *prenapučen* ako u njemu živi barem 15 ljudi. Svakog dana stanari prenapučenog stana imaju svađu i svatko od njih odlazi u drugi stan u zgradi. Mora li taj proces stati jednog dana?

4. Za matricu dimenzija $n \times n$ kažemo da je *srebrna* ako su joj svi elementi iz skupa $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, te za svaki $i = 1, \ldots, n$ svi elementi u i-tom retku i i-tom stupcu zajedno čine skup S. Dokaži da

   (a) ne postoji srebrna matrica za $n = 2019$.

   (b) postoji srebrna matrica za beskonačno mnogo n.

5. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Odredi ukupan broj uređenih trojki (A, B, C) podskupova skupa S takvih da je $A \subset B \subset C$ i

$$|B| = \frac{|A| + |C|}{2}.$$

6. U nekoj državi svaka dva od ukupno 1025 gradova povezana su dvosmjernom avionskom linijom jedne od 10 kompanija. Dokaži da postoji kompanija koja može ponuditi kružno putovanje s neparno mnogo gradova (kružno putovanje počinje i završava u istom gradu, a svaki drugi grad koji je uključen u putovanje se posjeti točno jednom).

7. Promotrimo 2019 karata, pri čemu je svaka s jedne strane zlatna, a s druge strane plava, poredane u niz na dugom stolu. Na početku su sve karte okrenute tako da pokazuju zlatnu stranu. Dva igrača, koji stoje kraj iste dulje stranice stola, naizmjenično rade poteze. Svaki potez se sastoji od odabira 50 uzastopnih karata, pri čemu prva od tih 50 karata slijeva pokazuje zlatnu stranu, te okretanja tih 50 karata (karte koje su pokazivale zlatnu strana pokazuju plavu i obratno). Pobjednik je onaj igrač koji može odigrati zadnji potez.

   a) Mora li igra nužno završiti?

   b) Postoji li pobjednička strategija za prvog igrača?

8. Neka je n prirodni broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i n utega čije su težine $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu. Odredi na koliko načina to možemo napraviti.

Upute i rješenja

1. **Konveksna ljuska** skupa S točaka u ravnini je presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S. Za konačan skup S, to je mnogokut čiji vrhovi su neke točke iz S, a rub se sastoji od dijelova pravaca koji prolaze kroz neke dvije točke iz S i s čije jedne strane nema drugih točaka iz S.

   U zadatku treba krenuti od dva uzastopna vrha konveksne ljuske A i B, pa sve ostale točke C_i poredati tako da kružnica kroz točke A, B i C_i sadrži točno i drugih točaka, za $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Tada je tražena kružnica opisana trokutu ABC_n. To je primjer korištenja **diskretnog teorema srednje vrijednosti**.

2. Složimo proizvoljnu kocku $2 \times 2 \times 2$ i neka na njenom oplošju ima m plavih i n crvenih kvadrata. Bez smanjenja općenitosti, neka je $m \geqslant n$. Ako je $m = n$, onda smo gotovi. U protivnom, neka je $d = m - n > 0$. Budući da je $m + n = 24$, $m - n$ je paran broj.

   Rotacijom bilo koje kockice za $90°$ oko jedne njezine osi točno jedna strana postaje vidljiva, te jedna postaje nevidljiva. Pri tom d ostane isti ili se promijeni za dva. Koristeći tri ovakve rotaciije, možemo kockicu okrenuti tako da sve tri vidljive strane postanu nevidljive i obratno. Ako ovo napravimo sa svim kockicama, onda će na oplošju biti m crvenih i n plavih kvadrata, te je novi $d = n - m < 0$. Krenuli smo od pozitivnog parnog d, u svakom koraku promijenili za 2 ili 0, te na kraju došli do negativnog d, pa prema **diskretnom teoremu srednje vrijednosti** zaključujemo da je u nekom trenutku d morao biti nula.

3. Promatramo **monovarijantu** $S = a_1^2 + \ldots + a_{120}^2$, pri čemu je a_i broj stanara u i-tom stanu. Pokažite da se S svakog dana smanjuje i zaključite da proces mora stati jer je S prirodni broj.

4. Pokažimo da ne postoji srebrna matrica za **neparni** n. Na **dva načina** ispišimo sve elemente koji se pojavljuju u srebrnoj matrici. Jednom tako da ispišemo sve *glavne križeve* (i-ti redak i i-ti stupac), a drugi put tako da ispišemo po svim retcima i stupcima. U prvom ispisivanju se svaki broj od 1 do $2n - 1$ pojavljuje n puta. U drugom ispisivanju se svaki broj od 1 do $2n - 1$ pojavljuje parno puta jer broj iz svakog polja dvaput ispisan. Također, u drugom ispisivanju su brojevi u dijagonalnim poljima ispisani jednom više nego u prvom ispisivanju. No, dijagonalnih polja ima samo n, pa najviše za n brojeva se može postići da je u drugom ispisivanju broj ponavljanja $n + 1$ (paran).

   Konstrukciju radimo za brojeve oblika $n = 2^k$. Provodimo ju matematičkom indukcijom. Probajte sami i svakako objasnite zašto je konstrukcija dobra!

5. Na temelju **malih primjera** se može postaviti hipoteza da je traženi broj $\binom{2n}{n}$. Sada tu tvrdnju dokazujemo koristeći **princip bijekcije**. Očito je $\binom{2n}{n}$ broj načina da na ploči $2 \times n$ točno n polja obojimo u crno i n polja u bijelo. Za svaki od n stupaca imamo četiri mogućnosti za bojanje koje odgovaraju smještanju broja od 1 do n u A, $B \setminus A$, $C \setminus B$ ili izvan C.

Broj stupaca koji imaju oba polja bijela mora biti jednak broju stupaca koji imaju oba polja crna. Stoga ta bojanja odgovaraju skupovima $B \setminus A$ i $C \setminus B$ jer je uvjet iz zadatka $|B| - |A| = |C| - |B|$.

6. Pretpostavimo suprotno. Tada nijedna kompanija nema kružno putovanje s neparno mnogo gradova. Ako veze za pojedinu kompaniju prikažemo kao graf, taj uvjet govori da nema ciklusa neparne duljine, što je poznato da je ekvivalentno tvrdnji da je **graf bipartitan**. To znači da za i-tu kompaniju, gradove možemo podijeliti u dvije skupine A_i, B_i tako da gradivo unutar skupine nisu povezani letovima te kompanije. Dakle, za svaki $i = 1, \ldots, n$, pojedinom gradu možemo pridružiti znamenku 0 ili 1 ovisno je li u A_i ili B_i, te tako dobiti 10-znamenkasti **binarni kod**. Broj različitih binarnih kodova je 1024, pa po **Dirichletovom principu** postoje dva grada koji imaju isti kod. No, to je kontradikcija jer gradovi koji imaju isti kod nisu povezani niti jednom kompanijom.

7. U prvom dijelu promotrimo **monovarijantu** koju dobivamo tako da nizu karata pridružimo binarni niz u kojem je i-ta znamenka 1 ako i samo ako je i-ta karta plava.

   U drugom dijelu promatramo svaku pedesetu kartu (zdesna na lijevo karte na pozicijama $50, 100, \ldots$). U svakom potezu se točno jedna od njih okrene, tj. promijeni se **parnost** broja zlatnih karata među njima. U završnoj situaciji nema nijedne zlatne karte među njima, a na početku ih ima 40. Stoga pobjeđuje drugi igrač, i to čak neovisno o strategiji.

8. Neka je a_n broj načina za postavljanje utega $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Tada je $a_1 = 1$. Utege $2^1, \ldots, 2^n$ također možemo rasporediti na a_n načina, a u taj raspored uteg 2^0 možemo staviti na bilo koje mjesto u nizu, na bilo koju stranu, osim da ga na početku stavimo na desnu stranu. Stoga imamo **rekurzivnu relaciju** $a_{n+1} = (2n+1) \cdot a_n$, pa je $a_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.