ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. ožujka 2020.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x prvi u nizu 50 uzastopnih parnih prirodnih brojeva.

1. broj	x
2. broj	$x + 2$
3. broj	$x + 4$
. . .	
50. broj	$x + 98$

Aritmetička sredina tog niza parnih brojeva iznosi:

$$\frac{x+x+2+x+4+\cdots+x+98}{50}=\frac{50x+50\cdot 49}{50}$$ 1 BOD

$= x + 49.$ 1 BOD

Neka je y prvi u nizu 41 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva.

1. broj	y
2. broj	$y + 2$
3. broj	$y + 4$
. . .	
41. broj	$y + 80$

Aritmetička sredina tog niza neparnih brojeva iznosi:

$$\frac{y+y+2+y+4+\cdots+y+80}{41}=\frac{41y+41\cdot 40}{41}$$ 1 BOD

$= y + 40.$ 1 BOD

Kako su aritmetičke sredine jednake, slijedi $x + 49 = y + 40$, odnosno $x + 9 = y$. 1 BOD

Najveći paran broj u nizu parnih brojeva je $x + 98$, a srednji po veličini neparan broj u nizu neparnih brojeva je $y + 40$. 1 BOD

Razlika kvadrata tih brojeva iznosi 7 595:

$(x+98)^2-(y+40)^2=7\,595$, odnosno

$(x+98)^2-(x+49)^2=7\,595$. 1 BOD

Dalje je:

$(x + 98 + x + 49)(x + 98 - x - 49) = 7\,595$,

$(2x + 147) \cdot 49 = 7\,595$,

(**Napomena 1:** Umjesto rastavom razlike kvadrata može i kvadriranjem:

$x^2+196x+9\,604-(x^2+98x+2\,401)=7\,595$.)

$98x + 7\,203 = 7\,595$.

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 4$. 1 BOD

Dalje je $y = x + 9 = 13$. 1 BOD

Parni brojevi su 4, 6, 8, 10, … ,100 i 102, a neparni 13, 15, 17, 19, … , 91 i 93. 1 BOD

…………………………..…………………………………………………...……..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 2: Točno određena aritmetička sredina (parnih ili neparnih brojeva) na bilo koji način nosi 2 BODA.

Drugi način:

Neka je $2n$ prvi u nizu 50 uzastopnih parnih prirodnih brojeva, $n \in \mathbb{N}$.

1. broj $2n$
2. broj $2n + 2$
3. broj $2n + 4$

. . .

50. broj $2n + 98$

Aritmetička sredina tog niza parnih brojeva iznosi:

$$\frac{2n+2n+2+2n+4+\cdots+2n+98}{50}=\frac{100n+50\cdot 49}{50}$$ 1 BOD

$= 2n + 49.$ 1 BOD

Neka je $2k + 1$ prvi u nizu 41 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva, $k \in \mathbb{N}_0$.

1. broj $2k + 1$
2. broj $2k + 3$
3. broj $2k + 5$

. . .

41. broj $2k + 81$

Aritmetička sredina tog niza neparnih brojeva iznosi:

$$\frac{2k+1+2k+3+2k+5+\cdots+2k+81}{41}=\frac{82k+41\cdot 41}{41}$$ 1 BOD

$= 2k + 41.$ 1 BOD

Kako su aritmetičke sredine jednake, slijedi $2n + 49 = 2k + 41$, odnosno $n + 4 = k$. 1 BOD

Najveći paran broj u nizu parnih brojeva je $2n + 98$, a srednji po veličini neparan broj u nizu neparnih brojeva je $2k + 41$. 1 BOD

Razlika kvadrata tih brojeva iznosi 7 595:

$(2n+98)^2-(2k+41)^2=7\,595$, odnosno

$(2n+98)^2-(2n+49)^2=7\,595$. 1 BOD

Dalje je:

$(2n + 98 + 2n + 49)(2n + 98 - 2n - 49) = 7\,595$,

$(4n + 147) \cdot 49 = 7\,595$,

(**Napomena 1:** Umjesto rastavom razlike kvadrata može i kvadriranjem:

$4n^2+392n+9\,604-(4n^2+196n+2\,401)=7\,595$.)

$196n + 7\,203 = 7595$.

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $n = 2$. 1 BOD

Dalje je $k = n + 4 = 6$. 1 BOD

Parni brojevi su 4, 6, 8, 10, … ,100 i 102, a neparni 13, 15, 17, 19, … , 91 i 93. 1 BOD

…………………………..………………………………………….…...……... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 2: Točno određena aritmetička sredina (parnih ili neparnih brojeva) na bilo koji način nosi 2 BODA.

2. Prvi način:

Neka je, nakon bacanja kocke tri puta, ishod prikazan uređenom trojkom (a, b, c).

Broj svih uređenih trojki (svih ishoda) iznosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. 2 BODA

Umnožak $a \cdot b \cdot c$ višekratnik je broja 10, tj. umnožak je oblika $10k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 21\}$.

Višekratnici 70, 110, 130, 140, 170, 190 i 210 ne mogu biti traženi umnošci jer na stranama kocke ne postoje brojevi 7, 11, 13, 17 i 19.

Višekratnici 160 i 200 se ne mogu postići bacanjem kocke tri puta.

Dakle, traženi umnošci mogu biti 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120, 150 i 180. 1 BOD
Ako su brojevi na kockama različiti, tada imamo 6 mogućnosti tj. 6 različitih uređenih trojki (npr. $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 5 \cdot 1 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 1$).
Ako su dva broja na kockama jednaka, tada imamo 3 mogućnosti tj. 3 različite uređene trojke (npr. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2$).
Tri broja na kockama ne mogu biti jednaka, a da umnožak bude višekratnik broja 10.
Popis svih mogućih dobrih rastava i broja mogućnosti za svaki od njih dani su u tablici.
Potpuno popisani svi mogući rastavi, njih 15, neovisno o tome je li dobro izračunat broj mogućnosti za te rastave. 1 BOD

umnožak	brojevi na kockama su različiti		dva broja na kockama su jednaka	
10	(1, 2, 5)	6 mogućnosti		
20	(1, 4, 5)	6 mogućnosti	(2, 2, 5)	3 mogućnosti
30	(1, 5, 6)	6 mogućnosti		
	(2, 3, 5)	6 mogućnosti		
40	(2, 4, 5)	6 mogućnosti		
50			(2, 5, 5)	3 mogućnosti
60	(2, 5, 6)	6 mogućnosti		
	(3, 4, 5)	6 mogućnosti		
80			(4, 4, 5)	3 mogućnosti
90	(3, 5, 6)	6 mogućnosti		
100			(4, 5, 5)	3 mogućnosti
120	(4, 5, 6)	6 mogućnosti		
150			(5, 5, 6)	3 mogućnosti
180			(5, 6, 6)	3 mogućnosti
ukupno		**54 mogućnosti**		**18 mogućnosti**
		3 BODA		2 BODA

Broj povoljnih trojki (povoljnih ishoda) je 72.

Vjerojatnost iznosi $p = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$. 1 BOD

……………………………………………………………………………...UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1:
Učeniku treba priznati 2 BODA i ako je za broj svih uređenih trojki (svih ishoda) samo zapisano $6 \cdot 6 \cdot 6$.

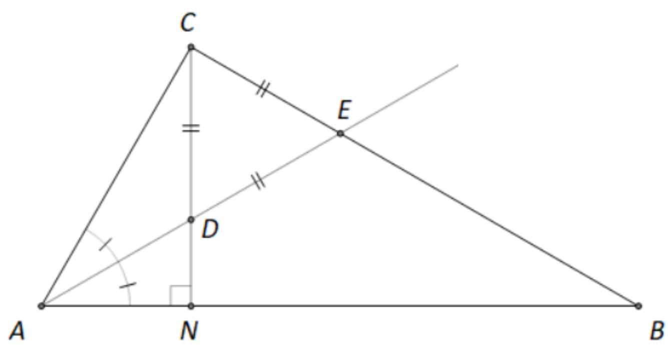
Napomena 2:
Za prebrojavanje mogućnosti za sve moguće rastave predviđeno je 5 BODOVA.
Ako učenik nije popisao sve moguće rastave ili nije točno prebrojao sve mogućnosti, parcijalne bodove treba dodijeliti na način da se za svaka 3 dobro napisana rastava i prebrojane mogućnosti za te rastave dobiva po 1 BOD.

Drugi način:
Neka je, nakon bacanja kocke tri puta, ishod prikazan uređenom trojkom (a, b, c).
Broj svih uređenih trojki (svih ishoda) iznosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. 2 BODA
Umnožak $a \cdot b \cdot c$ je djeljiv s 10 ako i samo ako je jedan od dobivenih brojeva jednak 5 i jedan od preostala dva broja paran (tj. jednak 2, 4 ili 6). 1 BOD

Broj povoljnih slučajeva dobit ćemo zbrajanjem mogućnosti dobivanja:
a) jedne petice i dva parna broja,
b) jedne petice, jednog parnog broja i jednog neparnog broja koji nije 5,
c) jednog parnog broja i dvije petice.
Pod a) za svaki parni broj imamo po 3 mogućnosti, a kako 5 može biti bilo koji od brojeva *a*, *b*, *c*, ovdje imamo $3^2 \cdot 3 =$ **27 mogućnosti**. 2 BODA
Pod b) parni broj biramo na 3 načina, a neparni na 2, a broj rasporeda (permutacija) je 6, što daje $3 \cdot 2 \cdot 6 =$ **36 mogućnosti**. 2 BODA
Pod c) parni broj je jedan od brojeva 2, 4 ili 6 (to su 3 mogućnosti), a kako taj broj može biti bilo koji od brojeva *a*, *b*, *c*, imamo ukupno $3 \cdot 3 =$ **9 mogućnosti**. 2 BODA
Broj povoljnih ishoda je 72.
Dakle, vjerojatnost iznosi $p = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$. 1 BOD
…………………………..………………………………………...………...……...UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:
Neka je, nakon bacanja kocke tri puta, ishod prikazan uređenom trojkom (*a*, *b*, *c*).
Broj svih uređenih trojki (svih ishoda) iznosi $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. 2 BODA
Prebrojat ćemo slučajeve kada umnožak $a \cdot b \cdot c$ **nije** djeljiv s 10. To će se dogoditi ako nijedan od brojeva nije djeljiv s 5 i ako nijedan nije paran, odnosno ako
a) nijednom nije pao broj 5, a takvih je $5 \cdot 5 \cdot 5 =$ **125 mogućnosti** (na raspolaganju su samo brojevi 1, 2, 3, 4 i 6), 2 BODA
b) nijednom nije pao parni broj, što daje $3 \cdot 3 \cdot 3 =$ **27 mogućnosti** (jer je pri svakom bacanju kocke pao neki od brojeva 1, 3 ili 5). 2 BODA
Međutim, pod a) i b) dvostruko brojimo situacije kada nije pao ni broj 5 niti paran broj (kao što je npr. slučaj $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$). Takvih slučajeva ima $2 \cdot 2 \cdot 2 =$ **8** (jer su na raspolaganju samo brojevi 1 i 3).
Od zbroja brojeva mogućnosti pod a) i b) treba oduzeti broj mogućnosti koje smo dvostruko brojali, dakle, postoje $125 + 27 - 8 =$ **144 mogućnosti** da umnožak NE bude djeljiv s 10. 2 BODA
Zato je u $216 - 144 = 72$ slučaja umnožak djeljiv sa 10. 1 BOD
Dakle, vjerojatnost iznosi $p = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$. 1 BOD
…………………………..………………………………………...………...……...UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:



Trokut ΔDEC je jednakostraničan trokut, pa je $|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60°$.
Kutovi $\angle EDC$ i $\angle ADN$ su vršni kutovi, pa je $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60°$.
Trokut ΔAND je pravokutan trokut i $|\angle ADN| = 60°$, pa je $|\angle NAD| = 30°$.
Pravac AD je simetrala kuta $\angle NAC$ i $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30°$, pa je $|\angle NAC| = 60°$. 1 BOD

Trokut ΔANC je pravokutan trokut i $|\angle NAC| = 60°$, pa je $|\angle ACN| = 30°$.

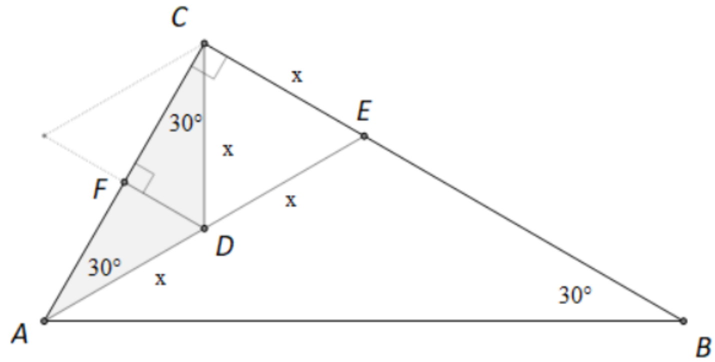
$|\angle ACN| = 30°$ i $|\angle DCE| = 60°$, pa je $|\angle ACB| = 90°$. 1 BOD

Dakle, trokut ΔABC je pravokutan trokut. Slijedi da je $|\angle CBA| = 30°$. 1 BOD

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta ΔDEC duljine x.

Površina trokuta ΔDEC je $4\sqrt{3}$ cm², pa je $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm².

Rješavanjem jednadžbe slijedi da je x = 4 cm. 1 BOD

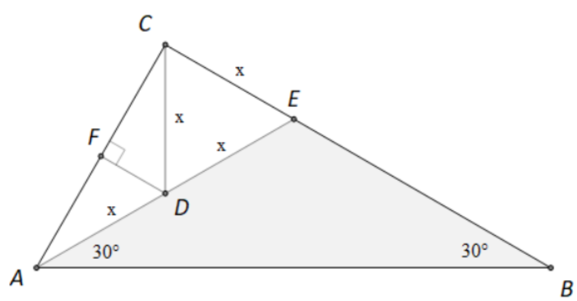


Dva kuta (uz stranicu $\overline{AC}$) u trokutu ΔADC su veličine 30º, pa je trokut ΔADC jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AC}$.

Dužina $\overline{CF}$ je kateta pravokutnog trokuta ΔCFD (odnosno visina jednakostraničnog trokuta stranice duljine x), pa je

$|CF| = \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. 1 BOD

Slijedi da je $|AC| = 2|CF| = 4\sqrt{3}$ cm. 1 BOD



Dva kuta (uz stranicu $\overline{AB}$) u trokutu ΔABE su veličine 30º, pa je trokut ΔABE jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AB}$.

Dakle, slijedi da je $|BE| = |AE| = 2x = 8$ cm. 1 BOD

Zato je $|BC| = |BE| + |EC| = 12$ cm. 1 BOD

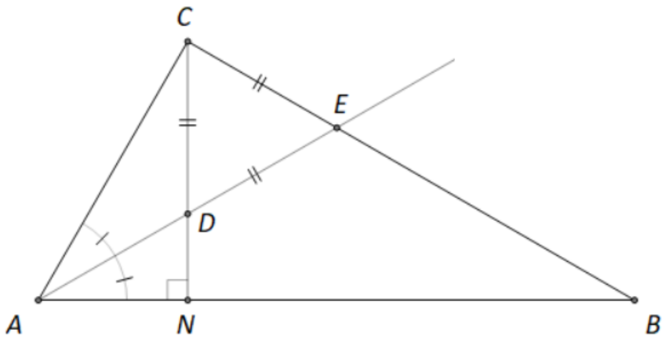
Duljine kateta trokuta ΔABC su 12 cm i $4\sqrt{3}$ cm, 1 BOD

pa je njegova površina $P = \frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ cm². 1 BOD

…………………………...………………………………………………...……..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Duljina dužine $\overline{CF}$ može se izračunati i izračunom duljine dužine $\overline{DF}$ i potom primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔCFD.

Drugi način:



Trokut ΔDEC je jednakostraničan trokut, pa je $|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60°$.

Kutovi $\angle EDC$ i $\angle ADN$ su vršni kutovi, pa je $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60°$.

Trokut ΔAND je pravokutan trokut i $|\angle ADN| = 60°$, pa je $|\angle NAD| = 30°$.

Pravac AD je simetrala kuta $\angle NAC$ i $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30°$, pa je $|\angle NAC| = 60°$. 1 BOD

Trokut ΔANC je pravokutan trokut i $|\angle NAC| = 60°$, pa je $|\angle ACN| = 30°$.

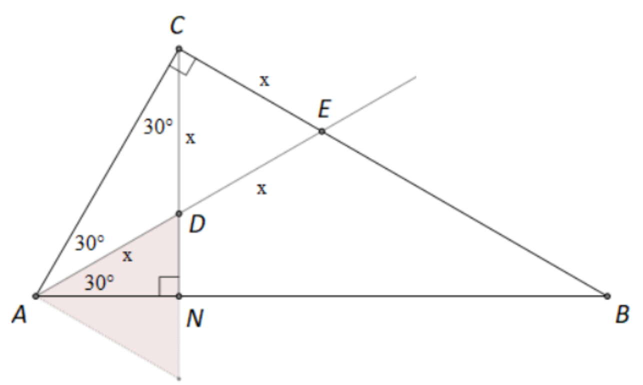
$|\angle ACN| = 30°$ i $|\angle DCE| = 60°$, pa je $|\angle ACB| = 90°$. 1 BOD

Dakle, trokut ΔABC je pravokutan trokut. Slijedi da je $|\angle CBA| = 30°$. 1 BOD

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta ΔDEC duljine x.

Površina trokuta ΔDEC je $4\sqrt{3}$ cm^2, pa je $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

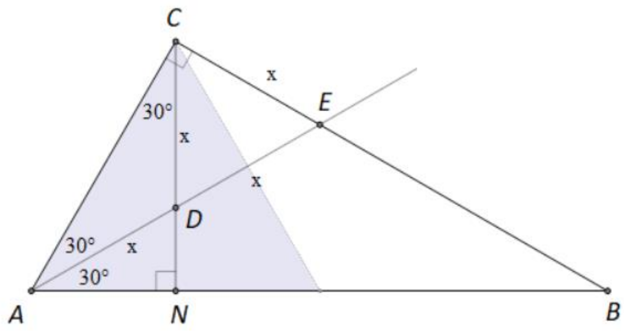
Rješavanjem jednadžbe slijedi da je x = 4 cm. 1 BOD



Dva kuta (uz stranicu $\overline{AC}$) u trokutu ΔADC su veličine 30º, pa je trokut ΔADC jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{AC}$, odakle slijedi da je $|AD| = |CD| = x$. Kako je $\overline{DN}$ kateta pravokutnog trokuta ΔAND nasuprot kutu veličine 30°, onda je $|DN|$ jednaka polovini duljine stranice x jednakostraničnog trokuta.

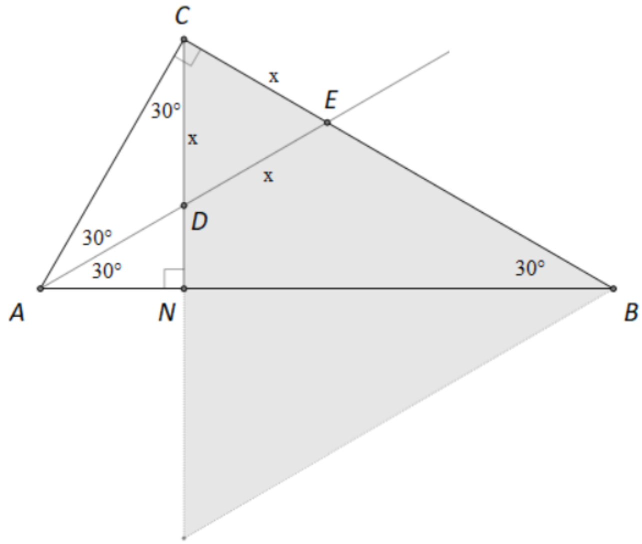
$|DN| = \frac{x}{2} = 2$ cm, 1 BOD

odnosno $|CN| = |CD| + |DN| = 6$ cm. 1 BOD



Trokut ΔCAN je pravokutan trokut, pri čemu je kateta $\overline{CN}$ nasuprot kutu veličine 60° (odnosno visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{AC}$), pa je

$|CN| = \frac{|AC|}{2}\sqrt{3}$, tj. $|AC| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6 = 4\sqrt{3}$ cm. 1 BOD



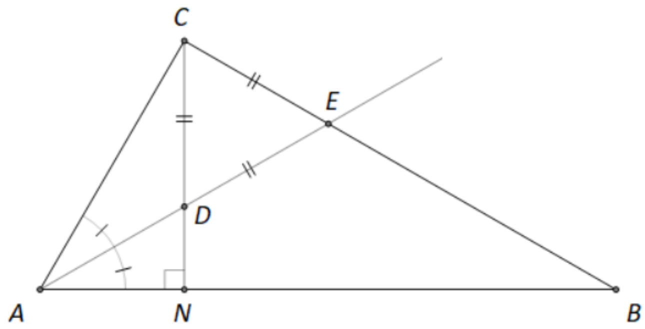
Trokut ΔCNB je pravokutan trokut, pri čemu je kateta $\overline{CN}$ nasuprot kutu veličine 30° (polovina stranice jednakostraničnog trokuta), pa je $|BC| = 2|CN| = 12$ cm. 1 BOD

Duljine kateta trokuta ΔABC su 12 cm i $4\sqrt{3}$ cm, 1 BOD

pa je njegova površina $P = \frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

…………………………..……………………………………………...……..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



Trokut ΔDEC je jednakostraničan trokut, pa je $|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60°$.

Kutovi $\angle EDC$ i $\angle ADN$ su vršni kutovi, pa je $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60°$.

Trokut ΔAND je pravokutan trokut i $|\angle ADN| = 60°$, pa je $|\angle NAD| = 30°$.

Pravac AD je simetrala kuta $\angle NAC$ i $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30°$, pa je $|\angle NAC| = 60°$. 1 BOD

Trokut ΔANC je pravokutan trokut i $|\angle NAC| = 60°$, pa je $|\angle ACN| = 30°$.

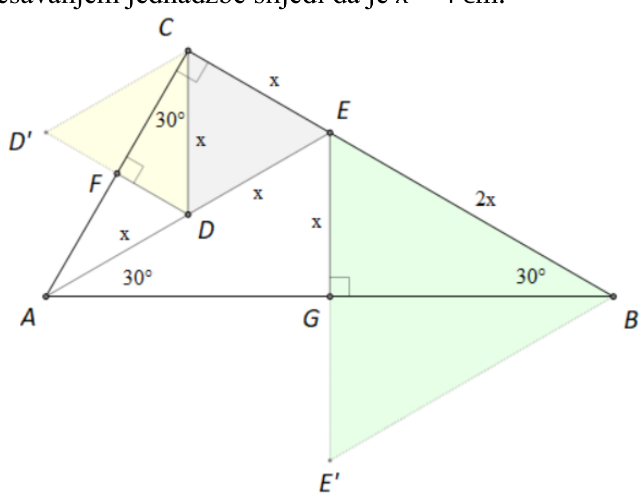
$|\angle ACN| = 30°$ i $|\angle DCE| = 60°$, pa je $|\angle ACB| = 90°$. 1 BOD

Dakle, trokut ΔABC je pravokutan trokut. Slijedi da je $|\angle CBA| = 30°$. 1 BOD

Neka je stranica jednakostraničnog trokuta ΔDEC duljine x.

Površina trokuta ΔDEC je $4\sqrt{3}$ cm², pa je $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm².

Rješavanjem jednadžbe slijedi da je $x = 4$ cm. 1 BOD



(skica s docrtanim osnosimetričnim jednakostraničnim trokutima) 1 BOD

Trokuti ΔDEC i $\Delta D'DC$ su jednakostranični trokuti sa stranicom duljine x, a trokut $\Delta E'BE$ je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $2x$. 1 BOD

(**Napomena:** Za taj 1 BOD dovoljno je to naznačiti na skici.)

Površina trokuta ΔABC jednaka je zbroju površina jednakostraničnih trokuta ΔDEC, $\Delta D'DC$ *i* $\Delta E'BE$, odnosno za površinu P trokuta ΔABC vrijedi $P = P_{DEC} + P_{D'DC} + P_{E'BE}$. 2 BODA

Tada je $P = 2 \cdot 4\sqrt{3} + \frac{8^2}{4}\sqrt{3}$, 1 BOD

odnosno $P = 8\sqrt{3} + 16\sqrt{3}$.

Površina trokuta ΔABC je $P = 24\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

……………………………..…………………………………………….…...……..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

$A = n^3 + 6n^2 + 8n = n(n^2 + 6n + 8) = n(n^2 + 6n + 9 - 1) = n((n+3)^2 - 1) =$ 1 BOD

$= n(n + 3 - 1)(n + 3 + 1) = n(n + 2)(n + 4)$ 1 BOD

a) Brojevi $n, n + 2$ i $n + 4$ daju različite ostatke pri dijeljenju s 3 pa je (točno) jedan od njih djeljiv s 3.
2 BODA

(Barem) jedan od faktora umnoška je djeljiv s 3 pa je i umnožak djeljiv s 3. 1 BOD

b) Ako je *A* djeljiv s 3 i s 32, tada je *A* djeljiv s 96 (3 · 32 = 96, 3 i 32 su relativno prosti brojevi).
1 BOD

Pokazano je da je *A* djeljiv s 3 za svaki prirodni broj n. Treba pokazati za koje je prirodne brojeve *n* broj *A* djeljiv s 32.

Ako je n neparan, faktori $n, n + 2$ i $n + 4$ su neparni, pa je *A* neparan i ne može biti djeljiv s 32.
1 BOD

Od tri uzastopna parna broja, barem jedan je djeljiv s 4.

Ako je ***n* djeljiv s 4**, tj. $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, tada je

$A = 4k(4k + 2)(4k + 4) = 32k(2k + 1)(k + 1)$, pa je broj A djeljiv s 32. 1 BOD

Ako je ***n* + 2 djeljiv s 4**, tj. $n + 2 = 4k, k \in \mathbb{N}$, tada je

$A = (4k - 2)4k(4k + 2) = 16(2k - 1)k(2k + 1)$.

Ako je *k* neparan, tada su i faktori $2k - 1$, $2k + 1$ neparni, pa *A* nije djeljiv s 32. 1 BOD

Ako je *k* paran, tada je *A* djeljiv s 32. 1 BOD

Prirodni brojevi *n* za koje je *A* djeljiv s 96 su svi brojevi oblika $n = 4k, k \in \mathbb{N}$ i svi brojevi oblika $n = 4k - 2$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ i *k* je paran broj.

Ili:

Neka je $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Tada je $n = 4k - 2 = 8m - 2$. Broj n je prirodan broj koji pri dijeljenju s 8 daje ostatak 6.

Prirodni brojevi *n* za koje je *A* djeljiv s 96 su svi brojevi koji su djeljivi s 4 i svi brojevi koji pri dijeljenju s 8 daju ostatak 6.

……………………………..…………………………………………….…...…….....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1:

Ako učenik trinom $n^2 + 6n + 8$ rastavlja na faktore rješavanjem kvadratne jednadžbe $n^2 + 6n + 8 = 0$, točan rastav zadanog broja *A* treba bodovati s 2 BODA.

Napomena 2:

Broj *A* može se rastaviti i na sljedeći način:

$A = n^3 + 6n^2 + 8n = n^3 + 4n^2 + 2n^2 + 8n = n^2(n + 4) + 2n(n + 4) =$ 1 BOD

$= (n^2 + 2n)(n + 4) = n(n + 2)(n + 4)$ 1 BOD

Napomena 3:

U a) dijelu zadatka djeljivost brojem 3 može se obrazložiti na sljedeći način:

Broj n, s obzirom na djeljivost brojem 3, može biti oblika $3k$, $3k + 1$ ili $3k + 2$.

Neka je $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A = 3k(3k + 2)(3k + 4)$ pa je *A* djeljiv s 3. 1 BOD

Neka je $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k + 1)(3k + 3)(3k + 5) = 3(3k + 1)(k + 1)(3k + 5)$ pa je *A* djeljiv s 3. 1 BOD

Neka je $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k + 2)(3k + 4)(3k + 6) = 3(3k + 2)(3k + 4)(k + 2)$ pa je *A* djeljiv s 3. 1 BOD

Drugi način:
$A = n^3 + 6n^2 + 8n$

a) S obzirom na djeljivost brojem 3, n može biti oblika $3k$, $3k+1$ ili $3k+2$.
Neka je $\boldsymbol{n = 3k}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A = (3k)^3 + 6(3k)^2 + 8 \cdot 3k = 27k^3 + 54k^2 + 24k = 3(9k^3 + 18k^2 + 8k)$ pa je A djeljiv s 3.
ili $A = (3k)^3 + 6(3k)^2 + 8 \cdot 3k = 27k^3 + 54k^2 + 24k$, svi su pribrojnici djeljivi s 3 pa je i zbroj djeljiv s 3. 1 BOD
Neka je $\boldsymbol{n = 3k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k+1)^3 + 6(3k+1)^2 + 8 \cdot (3k+1) = 27k^3 + 81k^2 + 69k + 15 = 3(9k^3 + 27k^2 + 23k + 5)$ pa je A djeljiv s 3.
ili $A = (3k+1)^3 + 6(3k+1)^2 + 8 \cdot (3k+1) = 27k^3 + 81k^2 + 69k + 15$, svi su pribrojnici djeljivi s 3 pa je i zbroj djeljiv s 3. 1 BOD
Neka je $\boldsymbol{n = 3k+2}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je $A = (3k+2)^3 + 6(3k+2)^2 + 8 \cdot (3k+2) = 27k^3 + 108k^2 + 132k + 48 = 3(9k^3 + 36k^2 + 44k + 16)$ pa je A djeljiv s 3.
ili $A = (3k+2)^3 + 6(3k+2)^2 + 8 \cdot (3k+2) = 27k^3 + 108k^2 + 132k + 48$, svi su pribrojnici djeljivi s 3 pa je i zbroj djeljiv s 3. 1 BOD

b) Ako je *A* djeljiv s 3 i s 32, tada je *A* djeljiv s 96 (3 · 32 = 96, 3 i 32 su relativno prosti brojevi). 1 BOD
Kako je $6n^2 + 8n$ paran broj, tada je A paran ako i samo ako je n^3 paran, odnosno ako i samo ako je n paran.
Dakle, ako je $\boldsymbol{n}$ **neparan** tada A nije djeljiv s 32. 1 BOD
Za parne brojeve n, promotrimo sljedeće slučajeve:
Neka je $\boldsymbol{n = 4k}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $A = (4k)^3 + 6(4k)^2 + 8 \cdot 4k = 32(2k^3 + 3k^2 + k)$ pa je A djeljiv s 32. 1 BOD
Neka je $\boldsymbol{n = 8k-2}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned} A &= (8k-2)^3 + 6(8k-2)^2 + 8 \cdot (8k-2) \\ &= 8((4k)^3 - 3 \cdot (4k)^2 + 3 \cdot 4k - 1) + 24((4k)^2 - 8k + 1) + 16(4k-1) \\ &= 32(16k^3 - k) \end{aligned}$$

pa je A djeljiv s 32. 2 BODA
Neka je $\boldsymbol{n = 8k+2}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$\begin{aligned} A &= (8k+2)^3 + 6(8k+2)^2 + 8 \cdot (8k+2) = \\ &= 8((4k)^3 + 3 \cdot (4k)^2 + 3 \cdot 4k + 1) + 24((4k)^2 + 8k + 1) + 16(4k+1) = \\ &= 32(16k^3 + 24k^2 + 11k + 1) + 16 \end{aligned}$$

pa A nije djeljiv s 32. 2 BODA
…………………………..……………………….……………………...……...UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:
Vrijedi $mn + 2m - 2n - 4 + 4 = 2\,020.$ 1 BOD
Nadalje je $m(n+2) - 2(n+2) + 4 = 2\,020,$ 1 BOD
odnosno $(m-2)(n+2) = 2\,016.$ 1 BOD
Broj $n+2$ je djelitelj broja 2 016. 1 BOD
Rastavimo broj 2 016 na proste faktore: $2\,016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$ 1 BOD
Svaki djelitelj broja 2 016 je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, gdje je $a \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $b \in \{0,1,2\}$, $c \in \{0,1\}$. 1 BOD
Broj prirodnih djelitelja broja 2 016 jednak je $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$. 2 BODA
Djelitelji broja 2 016 koji ne zadovoljavaju uvjete zadatka su brojevi 1 i 2 jer ako je $n+2 = 1$ i $n+2 = 2$, tada n nije prirodan broj, a u ostalim je slučajevima broj n prirodan pa postoje 34 prirodna broja n koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 BOD
Za svaki takav n jednoznačno je određen prirodni broj m koji zadovoljava polaznu jednadžbu jer je ona

ekvivalentna s $m = 2 + \frac{2\,016}{n+2}$.

Dakle, postoje 34 uređena para (m, n) prirodnih brojeva zadovoljavaju jednadžbu
$mn + 2m - 2n = 2\,020$. 1 BOD

……………………..…………………………………………...……..........UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik zna da je broj djelitelja broja $2\,016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ jednak
$(5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, bodovati s 3 BODA.

Drugi način:

Rješavanjem polazne jednadžbe po m dobivamo $m(n+2) = 2n + 2020$. 1 BOD

Nadalje je $m = \frac{2n + 2\,020}{n+2}$, 1 BOD

odnosno $m = 2 + \frac{2\,016}{n+2}$. 1 BOD

Broj $n + 2$ je djelitelj broja 2 016. 1 BOD

Rastavimo broj 2 016 na proste faktore: $2\,016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. 1 BOD

Svaki djelitelj broja 2 016 je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, gdje je
$a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0,1\}$. 1 BOD

Broj prirodnih djelitelja broja 2 016 jednak je $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$. 2 BODA

Djelitelji broja 2 016 koji ne zadovoljavaju uvjete zadatka su brojevi 1 i 2 jer ako je
$n + 2 = 1$ i $n + 2 = 2$, tada n nije prirodan broj, a u ostalim je slučajevima broj n prirodan
pa postoje 34 prirodna broja n koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 BOD

Za svaki takav n jednoznačno je određen prirodni broj m koji zadovoljava polaznu jednadžbu jer je ona
ekvivalentna s $m = 2 + \frac{2\,016}{n+2}$.

Dakle, postoje 34 uređena para (m, n) prirodnih brojeva zadovoljavaju jednadžbu
$mn + 2m - 2n = 2\,020$. 1 BOD

……………………..…………………………………………...……..........UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik zna da je broj djelitelja broja $2\,016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ jednak
$(5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, bodovati s 3 BODA.

Treći način:

Vrijedi $mn + 2m - 2n - 4 + 4 = 2\,020$. 1 BOD

Nadalje je $m(n+2) - 2(n+2) + 4 = 2\,020$ 1 BOD

odnosno $(m-2)(n+2) = 2\,016$. 1 BOD

Broj $n + 2$ je djelitelj broja 2 016. 1 BOD

Rastavimo broj 2 016 na proste faktore: $2\,016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. 1 BOD

Prirodni djelitelji broja 2 016 su: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63,
72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1 008 i 2 016, ima ih 36. 3 BODA

U slučaju $n + 2 = 1$ i $n + 2 = 2$ broj n nije prirodan.

Za preostalih 34 slučaja n je prirodni broj. 1 BOD

Inače, iz preostalih slučajeva slijedi da n može biti:
1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 16, 19, 22, 26, 30, 34, 40, 46, 54, 61, 70, 82, 94, 110, 124, 142, 166, 222,
250, 286, 334, 502, 670, 1 006 i 2 014.

Za svaki takav n jednoznačno je određen prirodni broj m koji zadovoljava polaznu jednadžbu jer je ona
ekvivalentna s $m = 2 + \frac{2\,016}{n+2}$.

Inače, odgovarajući broj m redom može biti:
674, 506, 338, 290, 254, 226, 170, 146, 128, 114, 98, 86, 74, 65, 58, 50, 44, 38, 34, 30, 26, 23, 20, 18, 16, 14, 11, 10, 9, 8, 6, 5, 4 i 3.
Dakle, postoje 34 uređena para (m, n) prirodnih brojeva zadovoljavaju jednadžbu
$mn + 2m - 2n = 2\,020.$ 1 BOD
…………………………..…………………………………………...……..........UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1:
Ukoliko učenik, nakon rastava broja 2 016 na proste faktore (i ostvarivanja prvih 5 BODOVA), krene raspisivati rješenja jednadžbe i ne nađe sva rješenja, može dobiti maksimalno 3 od 5 BODOVA, i to:

- 3 BODA, u slučaju da nađe 30 ili više rješenja,
- 2 BODA, u slučaju da nađe 15 ili više rješenja,
- 1 BOD, u slučaju da nađe 5 ili više rješenja.

Napomena 2:
Iz $(m-2)(n+2) = 2\,016$ možemo zaključiti i da je $m-2$ djelitelj broja $2\,016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
Tada imamo 36 prirodnih brojeva n koji zadovoljavaju taj uvjet, ali za točno 34 takva prirodna broja m postoji prirodan broj n za koji je $n = -2 + \frac{2\,016}{m-2}$, tj. za $m - 2 = 2016$ i $m - 2 = 1\,008$ broj n nije prirodan, dok je, u svim ostalim slučajevima, n prirodan broj.
Bodovanje rješenja, u tom je slučaju, u osnovi, istovjetno gore prikazanom.