Adventska radionica 2019., 6./7. razred

Eva Špalj – Uvod u teoriju brojeva

1. Djeljivost

<u>Definicija</u> Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da je b djeljiv sa a, odnosno da a dijeli b, ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ak$. To zapisujemo sa $a|b$. Ako $a|b$, onda još kažemo da je a djelitelj od b, a da je b višekratnik od a.

<u>Teorem o dijeljenju s ostatkom</u> Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = qa + r,\ 0 \leq r < a$.

Podsjetimo se osnovnih kriterija djeljivosti:

1) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv brojem 2 ako mu je zadnja znamenka parna;

2) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv brojem 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3;

3) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv brojem 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv brojem 4;

4) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv brojem 5 ako mu je zadnja znamenka djeljiva brojem 5 (0 ili 5);

5) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv brojem 6 ako je djeljiv brojem 2 i brojem 3;

6) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv brojem 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv brojem 8;

7) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv sa 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv sa 9;

8) Broj $a \in \mathbf{N}$ je djeljiv sa 10^n ako su mu zadnjih n znamenaka jednake 0.

<u>Zadatak 1.</u> Dokažite da je zbroj/razlika dva neparna ili dva parna broja uvijek paran broj.

> **Rješenje:** Neka su m i n dva neparna broja, odnosno $m = 2p+1, p \in \mathbf{N}$ i $n = 2r+1, r \in \mathbf{N}$. Tada je $a+b = 2(p+r+1)$ i $a-b = 2(p-r)$, što su parni brojevi. Slično se dokazuje slučaj kada su oba broja parna.

<u>Zadatak 2.</u> Za svaki cijeli broj n dokažite da 2 dijeli $n(n+1)$.

<u>Zadatak 3.</u> Za svaki cijeli broj n dokažite da 3 dijeli $n(n+1)(n+2)$.

<u>Zadatak 4.</u> Odredite x tako da je $\overline{2x5}$ djeljiv brojem 3 (odnosno brojem 9).

<u>Zadatak 5.</u> Odredite posljednju znamenku broja 7^{2016}.

Rješenje: Uočimo pravilnost u posljednjoj znamenki potencije broja 7 (7, 9, 3, 1). Budući je $2016 = 4 \cdot 504$, slijedi da je posljednja znamenka jednaka 1.

Zadatak 6. Pokažite da je $B = 1996^{1998} + 1997^{1999} + 1998^{2000}$ djeljiv brojem 5.

Rješenje: Posljednja znamenka broja 1996^{1998} je 6; posljednja znamenka 1997^{1999} je 3 ($1999 = 4 \cdot 494 + 3$); posljednja znamenka broja 1998^{2000} je broj 6.

Dakle, posljednja znamenka broja B će biti posljednja znamenka $6+3+6=15$ pa zaključujemo da je broj djeljiv brojem 6.

Zadatak 7. Pokažite da je $B = 1983^{1986} + 1984^{1986} + 1985^{1986}$ djeljiv brojem 10.

Zadatak 8*. Pokažite da je $a = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 3^{2n+1} \cdot 25^{n+1}$ djeljiv brojem 17 za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Zadatak 9*. Pokažite da je $a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ djeljiv brojem 13 za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Zadatak 10. Dokažite kriterij djeljivosti brojem 3 ili 9.

Rješenje: Neka je zadan n-teroznamenkasti broj $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Tada taj broj možemo zapisati u obliku $a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n$. Promotrimo broj 10^k, gdje je k prirodni broj. $10^k - 1$ je broj kojemu su sve znamenke jednake 9, tj. djeljiv je brojem 3 pa je ostatak pri dijeljenju broja $a_k \cdot 10^k$ jednak a_k. To znači da je ostatak pri dijeljenju broja $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ brojem 3 jednak $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Zadatak 11. Dokažite da je zbroj bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5.

Zadatak 12. Dokažite da ne postoje četiri uzastopna prirodna broja čiji je zbroj djeljiv s 4.

Zadatak 13. Odredite sve peteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{a3b2c}$ djeljive brojem 45.

Rješenje: $45 = 5 \cdot 9$ pa je traženi broj djeljiv brojevima 5 i 9. Zbog djeljivosti brojem 5, c može biti 0 ili 5.

1. $c = 0$: Sada je traženi broj oblika $\overline{a3b20}$. Zbroj znamenaka je $a+b+5$. Zbog djeljivosti s 9, $a+b$ može biti 4 ili 13.
   a) $a+b=4$ pa su to brojevi 13320, 23220, 33120, 43020.
   b) $a+b=13$ pa su to brojevi 43920, 53820, 63720, 73620, 83520, 93420.
2. $c = 5$: Sada je traženi broj oblika $\overline{a3b25}$. Zbroj znamenaka je $a+b+10$. Zbog djeljivosti s 9, $a+b$ može biti 8 ili 17.
   c) $a+b=8$ pa su to brojevi 13725, 23625, 33525, 43425, 53325, 63225, 73125, 83025.
   d) $a+b=17$ pa su to brojevi 83925, 93825

Zadatak 14. Odredite sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{abab}$ djeljive brojem 16.

2. Najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik

Prirodni broj $p > 1$ je prost broj ako ima samo dva djelitelja: 1 i samoga sebe. Ako ima još djelitelja, zove se složeni broj. Bilo koji prirodni broj možemo na jedinstveni način prikazati kao umnožak prostih faktora.

Definicija Neka su b i c cijeli brojevi. Cijeli broj a zovemo zajednički djelitelj od b i c ako $a|b$ i $a|c$. Ako je barem jedan od brojeva b i c različit od nule, onda postoji samo konačno mnogo zajedničkih djelitelja od b i c. Najveći medu njima zove se najveći zajednički djelitelj od b i c i označava se s $D(b, c)$.

Definicija Reći ćemo da su cijeli brojevi a i b relativno prosti ako je $D(a, b) = 1$

Zadatak 15. Odredite sve djelitelje brojeva: a) $2^2 \cdot 5^1$; b) $2^2 \cdot 5^2$; c) $2^2 \cdot 5^3$. Koliko ih ima? Možete li ustanoviti pravilnost?

Provjerite vrijedi li ta pravilnost i za broj djelitelja brojeva:

d) $2^2 \cdot 5^1 \cdot 3^1$; e) $2^2 \cdot 5^1 \cdot 3^2$; f) $2^2 \cdot 5^1 \cdot 3^3$ $2^2 \cdot 5^1 \cdot 3^3$?

Zadatak 16. Koliko će djelitelja imati broj $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$? Obrazložite!

Zadatak 17. Odredite sve dvoznamenkaste brojeve koji imaju točno 3 djelitelja.

Zadatak 18. Odredite sve prirodne brojeve koji imaju točno 4 djelitelja čiji je umnožak jednak 225.

Zadatak 19. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji imaju točno 5 djelitelja.

Zadatak 20. Ako je broj djelitelja nekog prirodnog broja neparan, dokažite da je taj broj potpun kvadrat.

Zadatak 21. Brojevi od 1 do 1985 ispisani su jedan iza drugog. Dokažite da dobiveni broj 1234…1985 ne može imati 985 djelitelja.

Zadatak 22. Ako učenike jedne škole grupiramo u kolone po 2, 3, 4, 5, 6 učenika, jedan učenik ostaje neraspoređen svaki puta. Ako ih složimo u kolone po 7 učenika, niti jedan učenik neće ostati. Odredite najmanji broj učenika te škole.

Zadatak 23. Četiri autobusa polaze s autobusne stanice u 4 različita smjera svakih 5, 8, 12 i 18 minuta u periodu od 6 do 21 sati. Ako je poznato da je prvi istovremeni polazak autobusa u 7 sati, nađite ostale trenutke u danu kada autobusi istovremeno napuštaju stanicu.

Literatura: MATHEU Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools, Volume 2, ISBN 9963-634-31-1