Nejednakosti (Grupa C)

Azra Tafro

13. prosinca 2019.

Obrađene nejednakosti:

- Nejednakosti sredina (H, G, A, K)
- Cauchy - Schwarzova nejednakost
- Engel forma Cauchy - Schwarz nejednakosti (Tituova lema)

Zadaci

1. Dokaži $A-G$ nejednakost za $n=2,3,4$. (Hint: Tvrdnju za $n=4$ dokažite koristeći onu za $n=2$, a tvrdnju za $n=3$ dokažite koristeći tvrdnju za $n=4$.)

2. (Državno natjecanje 2012., 1. razred) Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi
$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2+b^2+c^2+2(a-b+1).$$

3. (Državno natjecanje 2014., 3. razred) Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

4. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi
$$4(ab+bc+cd+da) \leq (a+b+c+d)^2.$$

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=3$. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi
$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

7. Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi
$$8(a^4+b^4) \geq (a+b)^4.$$

8. (Nesbitt) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}] \geq \frac{3}{2}.$$

9. (IMO 2001) Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}} \geq 1.$$

Literatura

1. `natjecanja.math.hr`
2. Andreescu T., Savchev S.: *Mathematical Miniatures*, Anneli Lax New Mathematical Library (2003)
3. Engel, A.: *Problem Solving Strategies*, Springer (1997)
4. `https://brilliant.org/wiki/titus-lemma/`