Mix zadataka

Matija Bašić

15. siječnja 2019.

Zadaci

1. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.

2. Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika.

   Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?

3. Neka je I središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC i neka je $|AC| > |BC|$. Simetrala kuta i visina iz vrha C sijeku se pod kutom od $10°$. Ako je $\sphericalangle AIB = 120°$, odredi kutove trokuta ABC.

4. Pravokutnik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravokutnika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravokutnika, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Dokaži da su barem dva od tih osam pravokutnika međusobno sukladna.

5. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Ako je $\overline{BP}$ težišnica trokuta ABC, dokažite da je $|DM| = 2|BP|$.

6. Riješite sustav

$$x^3 + y^3 = 72,$$
$$x^2y + xy^2 = 48.$$

7. Postoji li prirodan broj n takav da je $n^2+2n+2019$ kvadrat nekog prirodnog broja?

8. Na košarkaškom turniru svaka od ekipa igra točno dva puta sa svakom od ostalih ekipa. Pobjeda donosi 2 boda, poraz 0 bodova, a neriješenog rezultata nema. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji košarkaški turnir s n ekipa na kojem je jedna ekipa, pobjednik turnira, imala 26 bodova, a točno dvije ekipe najmanji broj bodova, i to 20 bodova.

9. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$.

10. Na koliko načina možemo obojati polja ploče 2×100 u dvije boje tako da ne postoje tri polja iste boje koja se mogu istovremeno pokriti pločicom oblika kao na slici? Pločicu je dozvoljeno rotirati.