Adventska radionica - Logičko kombinatorni zadatci

Vlatko Crnković

14. prosinca 2019.

1 Prebrojavanja

1. Na koliko načina se malonogometna ekipa od 5 članova može poredati u vrstu pri sviranju himne?
2. U Ivičinom razredu ima 13 dječaka i 13 djevojčica. Na koliko načina se Ivičin razred može podijeliti u parove dječak-djevojčica za ples na Božićnom balu?
3. Na koliko načina Ivičin razred može odabrati 3 predstavnika za školski ekipni šahovski turnir? (Razred mora odabrati predstavnika za prvu, drugu i treću ploču.)
4. Na koliko načina Ivičin razred može odabrati dvoje predstavnika za vijeće učenika? Na koliko bi načina to bilo moguće ako je nužno da predstavnici ne budu istog spola?
5. Na koliko načina načina Ivičin razred može odabrati 5 članova ekipe za školski košarkaški turnir? Na koliko načina je to moguće ako ekipa mora imati kapetana?
6. Ivičin razred oragnizira školsku tombolu. Kolika je vjerojatnost da Ivičin prijatelj Krunoslav pogodi dobitnu kombinaciju od 5 brojeva ako se u bubnju nalaze kuglice s brojevima od 1 do 39? Nakon tombole sve kuglice se vrate u bubanj i izvlače se još dva dodatna joker broja. Koja je vjerojatnost da oba joker broja budu djeljiva s 3?
7. a) Koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću znamenaka $1, 2, 3, 4$ i 5?
   b) Koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću znamenaka $1, 2, 3, 4$ i 5, takvih da se svaka znamenka pojavljuje barem jednom?
8. Lani i njenoj braći, Petru i Pavlu, su roditelji kupili 12 Chupa Chups lizalica.
   a) Na koliko načina Lana i njena braća mogu podijeliti te lizalice ako nije nužno da svatko dobije lizalicu?
   b) Na koliko načina Lana i njena braća mogu podijeliti te lizalice ako je nužno da svatko dobije barem 2 lizalice?
9. U donjem lijevom kutu pravokutne 4×5 ploče nalazi se mrav. Na koliko načina mrav može doći do gornjeg desnog kuta ploče, u kojem se nalazi kocka šećera, ako mu je dozvoljeno kretati se samo udesno i gore.

2 Formula uključivanja i isključivanja

1. Promatrajmo skup $S = \{1, 2, ..., 2019\}$
   a) Koliko ima brojeva u skupu S koji su djeljivi s 5 ili 7?
   b) Koliko ima brojeva u skupu S koji su djeljivi s $2, 5$ ili 11?
2. Na koliko načina razred od 12 djevojčica i 10 dječaka može složiti $3-$članu ekipu za turnir u odbojci na pijesku ako ekipa ne smije biti istospolna?

3 Invarijante

1. Skakač se nalazi u jednom kutu šahovske 8×8 ploče. Može li skakač doći u suprotni kut tako da svako polje ploče prođe točno jednom?
(Jednom kad krene nikad više neće proći početnim poljem.)

2. Na čarobnom otoku nalazi se 13 crvenih, 15 plavih i 17 zelenih kameleona. Svaki put kada se dva kameleona različite boje sretnu, oba promijene boju u treću. Je li moguće da u nekom trenutku na otoku budu kameleoni samo jedne boje?

3. Na ploči je napisan uređeni par $(2, 7)$. Tadej može u bilo kojem trenutku izbrisati uređeni par (a, b) napisan na ploči i umjesto njega napisati jedan od sljedeća dva uređena para:
1) $(2a - 3b, -a + 4b)$
2) (b, a)
Može li Tadej ikada postići da na ploči piše uređeni par $(5, 3)$?

4. Na ploči je napisano 2019 slova M i 2020 slova N. Katja može sa ploče izbrisati bilo koja dva slova i ukoliko su ta dva slova bila ista napisati M, a ukoliko su bila različita napisati N. Jasno je da Katja ponavljanjem ovog postupka može postići da na ploči piše samo jedno slovo.
a) Može li Katja postići da na ploči piše slovo M?
b) Može li Katja postići da na ploči piše slovo N?

5. Maja i Paula igraju sljedeću igru. Na početku igra na stolu se nalazi N žetona. Djevojke naizmjenično sa stola uzimaju po $1, 2$ ili 3 žetona, s tim da Maja uvijek kreće prva. Pobjednica je ona koja sa stola uzme zadnji žeton.
a) Ima li Maja pobjedničku strategiju ako je $N = 8$?
b) Ima li Maja pobjedničku strategiju ako je $N = 17$?

6. Tri žabe stoje u točkama $(1, 0), (1, 1)$ i $(0, 1)$ cjelobrojnog koordinatnog sustava? U bilo koja žaba može preskočiti bilo koju od preostale dvije i skočiti na mjesto centralno-simetrično svom prethodnom položaju u odnosu na žabu koju preskače. Može li se ponavljanjem ovog postupka ikada desiti da jedna od žaba skoči na točku $(0, 0)$?
(Pojašnjenje: Ako ako žaba sa mjesta $(2, 3)$ želi preskočiti žabu na mjestu $(1, 4)$, onda će skočiti u točku $(0, 5)$, jer su točke $(2, 3)$ i $(0, 5)$ centralno simetrične u odnosu na točku $(1, 4)$.)

7. Juraj je na šahovski obojanu 6×6 ploču stavio 18 žetona tako da ih je 9 u gornjem lijevom 3×3 dijelu ploče, a preostalih 9 u donjem desnom 3×3 dijelu ploče. Ako dva polja na kojima stoji žeton dijele stranicu, onda Juraj može žeton s jednog od ta dva polja pomaknuti tako da preskoči drugi, ukoliko je polje na koje skače bilo prazno. Može li Juraj ponavljanjem poteza ovog tipa postići da se svi žetoni nalaze na lijevoj polovici ploče?

8. Noel je vrijedan poljoprivrednik koji obrađuje imanje pravokutnog oblika 10×10. Noelov zli susjet Leon ljubomoran je na Noelove usjeve pa je odlučio proširiti korov po Noelovom imanju. Leon jedne noći po skrivečki zarazi nekoliko 1×1 polje Noelovog imanja, a korov se svaki dan proširi na neko polje ako su dan prije barem dva susjeda tog bolje bila zaražena korovom. Budući da Leon ima samo N sadnica korova, ne može odmah zaraziti sva polja Noelovog imanja. Koji je najmanji broj sadnica korova N takav da Leon može postići da se s vremenom cijelo Noelovo imanje zarazi?

4 Popločavanja i bojanja

1. Može li se 8×8 šahovska ploča kojoj su uklonjena nasuprotna dva kuta popločati 1×2 i 2×1 dominama?

2. Je li moguće pravokutnu 10×10 ploču pokriti pločicama oblika 1×4 i 4×1?

3. 20×20 ploča popločana je pločicama oblika 2×2 i 1×4 koje se mogu rotirati. Ako se razbila jedna 2×2 pločica, je li moguće promijeniti raspored preostalih pločica tako da razbijenu pločicu možemo zamijeniti 1×4 pločicom?

4. Na svakom polju 30×30 ploče nalazi se žarulja. U jednom potezu mogu se odabrati 4 uzastopne žarulje u nekom retku ili stupcu te svakoj od njih promijeniti stanje (one koje su bile upaljene se gase i obrnuto). Ako je na početku točno 15 žarulja bilo uključeno, može li se postići da su na kraju sve žarulje uključene? Može li se to postići ako su na početku sve žarulje bile isključene?

5 Princip ekstrema

1. Na Ljetnom kampu mladih matematičara sudjeluje 100 učenika. Prvo veče pri upoznavanju učenici se međusobno rukuju (ne nužno svaki sa svakim). Dokaži da postoje dva učenika koja su se rukovala s istim brojem ljudi.

2. Na krežnici je zapisano 15 brojeva na način da je svaki broj aritmetička sredina svoja dva susjeda. Dokaži da su svi brojevi zapisani na kružnici jednaki.

3. Skup točaka u ravnini $\mathcal{S}$ ima svojstvo je da polovište svake dužine kojoj su vrhovi u $\mathcal{S}$ također u $\mathcal{S}$. Dokaži da $\mathcal{S}$ nije konačan skup.

4. U polja ploče $n \times n$ upisani su brojevi $1, 2, ..., n^2$. Dokaži da postoje dva susjedna polje koja takva da se brojevi upisani u njih razlikuju za barem $n + 1$.
(Polja su susjedna ako dijele barem 1 vrh.)

5. Konačno točaka u ravnini je obojano crvenom i plavom bojom na način da na svakoj dužini s plavim krajevima leži crvena točka, i da na svakoj dužini s crvenim krajevima leži plava točka. Dokaži da sve obojane točke leže na jednom pravcu.

6. U ravnini se nalazi konačan skup točaka $\mathcal{S}$ sa sljedećim svojstvom:
Za svake dvije točke $A, B \in \mathcal{S}$ postoji treća točka $C \in \mathcal{S}$ takva da C leži na pravcu AB. Dokaži da sve točke skupa $\mathcal{S}$ leže na istom pravcu.