

## Dirichletov princip

Ako imamo  $n$  kutija i  $n + 1$  predmet, onda postoji kutija u kojoj su **barem** dva predmeta.

Ako imamo  $n$  kutija i  $nk + 1$  predmet, onda postoji kutija u kojoj je **barem**  $k + 1$  predmet.

Zadaci:

1. Sedmero djece sastaje se u subotu popodne. Dogovorili su se da će svaki od njih obući majicu plave, crvene, žute, narančaste, zelene ili ljubičaste boje. Dokažite da će barem dvoje djece odabrati majicu iste boje.
2. Učenik u jednom tjednu treba riješiti deset zadataka iz matematike. Dokažite da postoji dan u kojem će riješiti barem dva zadatka.
3. a) Dokažite da u grupi od 13 učenika postoje 2 koji su rođeni u istom mjesecu.  
b) Dokažite da u razredu od 30 učenika postoje 3 koji su rođeni u istom mjesecu. Vrijedi li tvrdnja i za razred od 25 učenika? A 24?
4. U školi je 210 učenika sedmih razreda u osam razreda odjela. Dokažite da postoji razred u kojem je barem 27 učenika.
5. Četrdeset učenika natječu se na olimpijadi iz matematike. Na natjecanju je postavljeno 6 zadataka. Dokažite da je barem 6 učenika riješilo isti broj zadataka.
6. Odabrana su četiri prirodna broja. Dokažite da postoje dva broja čija je razlika djeljiva sa 3.
7. Neka je  $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ . Odaberemo pet brojeva iz skupa  $S$ . Dokažite da među njima postoje dva broja čiji je zbroj jednak 9.
8. Odabrano je 7 prirodnih brojeva. Dokažite da se među njima nalaze dva čiji je zbroj ili razlika djeljiva sa 10.
9. Dokažite da se iz skupa od 52 prirodna broja mogu odabrati barem 2 broja tako da je njihov zbroj ili njihova razlika djeljiva sa 100.
10. Kvadrat  $3 \times 3$  podijeljen je na 9 jediničnih kvadrata. U svaki jedinični kvadrat upisan je jedan od brojeva  $-1, 0$  ili  $1$ . Dokažite da su među zbrojevima redaka, stupaca i dijagonala barem dva jednaka.
11. U kvadratu stranice duljine 3 cm označeno je 10 točaka. Dokažite da barem dvije točke možemo pokriti kvadratom čija je stranica duljine 1 cm.

12. Na pravokutnom travnjaku dimenzija 3 m x 2 m nalazi se 300 komarca. Je li moguće pogoditi barem četiri komarca jednim udarcem lopaticom dimenzija 25 cm x 25 cm?
13. U pravilnom šesterokutu duljine stranice 1 označeno je sedam točaka. Dokažite da postoje barem dvije čija udaljenost nije veća od 1.
14. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 4 cm označeno je 17 točaka. Dokažite da postoje dvije označene točke koje nisu udaljene za više od 1.
15. U jediničnom kvadratu dano je 5 točaka. Dokažite da postoje dvije od njih čija udaljenost nije veća od 1. Koliko bi točaka trebalo biti ako želimo da postoje tri od njih čija udaljenost nije veća od 1?
16. U kvadratu stranice duljine 10 nalazi se 7 točaka raspoređenih tako da su sve udaljenosti među njima cjelobrojne. Dokažite da među njima postoje dvije jednake udaljenosti.
17. a) U ravnini je dano 6 točaka od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu. Točke su sve međusobno spojene dužinama. Svaka je dužina obojana plavom ili crvenom bojom. Dokažite da postoji trokut čije su stranice iste boje.  
  
b) Dokažite da se u grupi od 6 ljudi mogu naći tri osobe koje se sve ili međusobno poznaju ili međusobno ne poznaju (poznanstva su uzajamna).
18. Unutar jediničnog kvadrata smještena je 101 točka. Pokažite da neke tri od njih čine trokut površine ne veće od 0.02.
19. Iz skupa  $S = \{1,2,3, \dots, 18\}$  odabrano je 10 različitih prirodnih brojeva. Dokažite da se među njima mogu odabrati tri tako da je jedan od njih zbroj preostala dva.
20. Nacrtan je kvadrat i devet pravaca od kojih svaki pravac dijeli kvadrat na dva četverokuta čije se površine odnose kao 2 : 3. Dokažite da najmanje 3 od tih 9 pravaca prolaze kroz jednu točku.

#### Literatura:

- Mario Krnić: Dirichletovo pravilo, HMD Zagreb 2001.
- Zdravko Kurnik: Dirichletov princip, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 1993.
- MATHEU Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools Volume 2 Editor Gregory Makrides, INTERCOLLEGE, Cyprus
- Darko Žubrinić MATEMATIKA 3 Uvod u diskretnu matematiku