Adventska radionica, 13. prosinca 2019

1. Odredi sve pravokutnike kojima su duljine stranica prirodni brojevi, a mjerni broj opsega jednak je mjernom broju površine.

2. Odredi sve trokute sa cjelobrojnim duljinama stranica za koje vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, pri čemu je $a < b < c$.

3. Postoji li kvadrat čija je površina $19p + 1$, gdje je p prost broj?

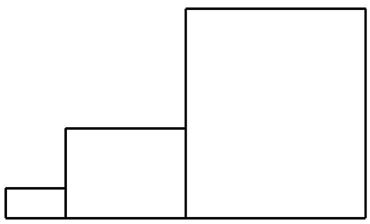
4. Ako duljinu jedne stranice pravokutnika povećamo 7 puta te potom umanjimo za 2, a duljinu druge povećamo 3 puta pa potom uvećamo za 4, dobijemo pravokutnik površine 280. Koliko postoji takvih pravokutnika s cjelobrojnim duljinama stranica?

5. Odredi trokut kojemu su duljine stranica cjelobrojne i za koji vrijedi: Ako duljinu jedne stranice povećamo 13 puta, duljinu druge 7 puta, a duljinu treće 4 puta, zbroj dobivenih brojeva je 100.

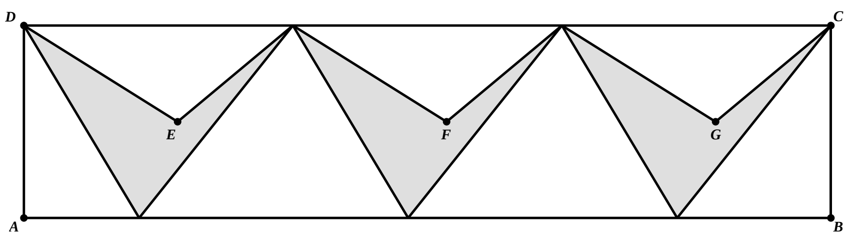
6. Postoji li trokut sa cjelobrojnim duljinama stranica kojemu simetrala unutarnjeg kuta dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove koji se razlikuju za 1, a manja od preostale dvije stranice ima duljinu 1?

7. Postoji li pravokutnik površine 503503503 kojemu su duljine stranica prirodni brojevi i razlikuju se za 5?

8. U ravnini su zadana tri pravokutnika kao na slici. Jedan od pravokutnika ima duljinu dvostruko veću od duljine najmanjeg pravokutnika i širinu trostruko veću od širine najmanjeg pravokutnika. Drugi pravokutnik ima duljinu trostruko veću od duljine najmanjeg pravokutnika i širinu sedmerostruko veću od širine najmanjeg pravokutnika. Odredi dimenzije najmanjeg pravokutnika ako je opseg dobivenog lika 336, a duljine stranica su prirodni brojevi.



9. Odredi sve pravokutnike $ABCD$ kojima su duljine stranica prirodni brojevi ako je površina osjenčanog dijela pravokutnika 36 kao što je prikazano na slici. Napomena: Osjenčani dio se sastoji od tri sukladna četverokuta, a točke E, F i G pripadaju simetrali stranice $\overline{BC}$.



10. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ΔABC označene su točke M i N tako da je $|AM|:|MC| = 1:m$ i $|BN|:|NC| = 1:n$. Odredi $m,n \in \mathbb{N}$ za koje je $P_{\Delta ABC} : P_{\Delta MNC} = 2:1$.

Radionica zima 2019

1. Odredi sve pravokutnike kojima su duljine stranica prirodni brojevi, a mjerni broj opsega jednak je mjernom broju površine.

Rješenje:
Neka su a i b duljine stranica traženog pravokutnika $\Rightarrow a,b \in \mathbb{N}$.
Iz uvjeta zadatka dobijemo diofantsku jednadžbu:
$2a+2b=ab$
Izrazimo duljinu jedne stranice pravokutnika pomoću druge, te dobiveni izraz zapišemo kao zbroj cijelog dijela i razlomka.
$ab-2a=2b$

$a(b-2)=2b$

$a=\frac{2b}{b-2}=\frac{2b-4+4}{b-2}=\frac{2b-4}{b-2}+\frac{4}{b-2}=\frac{2(b-2)}{b-2}+\frac{4}{b-2}$

$a=2+\frac{4}{b-2}$

Kako duljine stranica moraju biti prirodni brojevi, to je moguće ako je b – 2 djelitelj broja 4.
b – 2 = 1 tj. b = 3, pa je a = 6
b – 2 = -1 tj. b = 1, pa je a = -2, što je nemoguće
b – 2 = 2 tj. b = 4, pa je a = 4
b – 2 = -2 tj. b = 0, što je nemoguće
b – 2 = 4 tj. b = 6, pa je a = 3
b – 2 = -4 tj. b = -2, što je nemoguće.
Rješenja (a, b) diofantske jednadžbe su (3, 6), (4, 4) i (6, 3).
Postoje dva takva pravokutnika i njihove stranice imaju duljine 3 i 6 odnosno 4 i 4.

2. Odredi sve trokute sa cjelobrojnim duljinama stranica za koje vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, pri čemu je $a < b < c$.

Rješenje:
$a,b,c \in \mathbb{N}$
Očito je da $a > 1$ (jer je zbroj razlomaka 1).
Također, iz $a < b < c$ vrijedi: $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$. Sada je

$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$

$\Rightarrow \frac{3}{a}>1$, odnosno $\frac{3}{a}>\frac{3}{3}$.

Kako su brojnici jednaki, veći je onaj pozitivan razlomak koji ima manji nazivnik $\Rightarrow a<3$.

No $a > 1$ pa je jedina mogućnost $a = 2$.
Zapišimo sad početnu jednadžbu u obliku: $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, odnosno $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$.

Zaključujemo $b > 2$ (jer je zbroj razlomaka $\frac{1}{2}$).

Također, iz $b < c$ vrijedi: $\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$. Sada je

$\frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$

$\Rightarrow \frac{2}{b} > \frac{1}{2}$, odnosno $\frac{2}{b} > \frac{2}{4}$.

Kako su brojnici jednaki, veći je onaj pozitivan razlomak koji ima manji nazivnik $\Rightarrow b < 4$.

No $b > 2$ pa je jedina mogućnost $b = 3$.

Konačno, $\frac{1}{3} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{6} \Rightarrow c = 6$.

Rješenje (a, b, c) diofantske jednadžbe je (2, 3, 6) no zbog nejednakosti trokuta zaključujemo da takav trokut ne postoji jer je 2 + 3 < 6.

3. Postoji li kvadrat čija je površina $19p + 1$, gdje je p prost broj?

Rješenje:
Neka je a duljina stranice traženog kvadrata $\Rightarrow a \in \mathbb{N}$ i iz uvjeta zadatka dobijemo:

$a \cdot a = 19p + 1$, odnosno

$a \cdot a - 1 = 19p$

Izraz $a \cdot a - 1$ možemo zapisati u obliku umnoška na slijedeći način:

$a \cdot a - 1 = (a-1) \cdot (a+1)$

*Napomena: Na radionici je napravljen geometrijski dokaz te tvrdnje.

Sada se zadatak svodi na rješavanje diofantske jednadžbe:

$(a-1) \cdot (a+1) = 19p$, gdje je p prost broj.

Kako je $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a - 1 < a + 1$ te kako su 19 i p prosti brojevi, imamo sljedeće mogućnosti:

1)

$a - 1 = 1$ i $a + 1 = 19p$

$\Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow 19p = 3$ što je nemoguće jer je $p \in \mathbb{N}$.

2)

$a - 1 = 19$ i $a + 1 = p$

$\Rightarrow a = 20$

$\Rightarrow p = 21$ što je nemoguće jer je p prost broj.

3)

$a - 1 = p$ i $a + 1 = 19$

$\Rightarrow a = 18$

$\Rightarrow p = 17$.

Rješenje (a, p) diofantske jednadžbe je (18, 17), stoga zaključujemo da postoji jedan takav kvadrat i duljina njegove stranice je 18.

4. Ako duljinu jedne stranice pravokutnika povećamo 7 puta te potom umanjimo za 2, a duljinu druge povećamo 3 puta pa potom uvećamo za 4, dobijemo pravokutnik površine 280. Koliko postoji takvih pravokutnika s cjelobrojnim duljinama stranica?

Rješenje:
Neka su a i b duljine stranica traženog pravokutnika $ABCD \Rightarrow a, b \in \mathbb{N}$. Također, neka je a duljina stranice koju treba povećati 7 puta te dobiveni broj umanjiti za 2, a b duljina stranice koju treba povećati 3 puta te dobiveni broj uvećati za 4. Tada dobijemo diofantsku jednadžbu:

$(7a - 2) \cdot (3b + 4) = 280$

Odredimo sve mogućnosti zapisa broja 280 u obliku umnoška prirodnih brojeva.

Kako je $280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$, svi mogući umnošci su:

$$
\begin{aligned}
280 &= 280 \cdot 1 \\
&= 140 \cdot 2 \\
&= 70 \cdot 4 \\
&= 56 \cdot 5 \\
&= 40 \cdot 7 \\
&= 35 \cdot 8 \\
&= 28 \cdot 10 \\
&= 20 \cdot 14
\end{aligned}
$$

Zapišimo mogućnosti pomoću tablice:

$7a - 2$	a	$3b + 4$	b
280	/	1	/
140	/	2	/
70	/	4	/
56	/	5	/
40	6	7	1
35	/	8	/
28	/	10	2
20	/	14	/
14	/	20	/
10	/	28	8
8	/	35	/
7	/	40	12
5	1	56	/
4	/	70	22
2	/	140	/
1	/	280	92

Zaključujemo da je jedino rješenje (a, b) diofantske jednadžbe (6, 1), tj. postoji jedan takav pravokutnik čije su stranice duljina 6 i 1.

5. Odredi trokut kojemu su duljine stranica cjelobrojne i za koji vrijedi: Ako duljinu jedne stranice povećamo 13 puta, duljinu druge 7 puta, a duljinu treće 4 puta, zbroj dobivenih brojeva je 100.

Rješenje:

Neka su a, b i c duljine stranica traženog trokuta $ABC \Rightarrow a,b,c \in \mathbb{N}$.

Iz uvjeta zadatka dobijemo:

$13a + 7b + 4c = 100$

$$c = \frac{100 - 13a - 7b}{4} = \frac{100 - 12a - 4b - a - 3b}{4} = 25 - 3a - b - \frac{a + 3b}{4}$$

Kako su a, b, $c > 0$ imamo slijedeće mogućnosti:

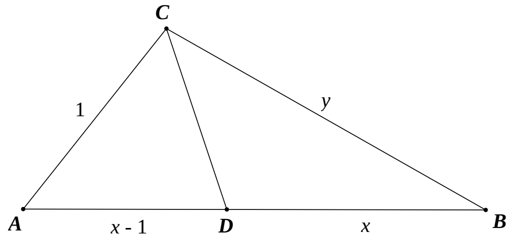
a	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6	7
b	1	5	9	2	6	10	3	7	4	1	2	3
c	20	13	6	18	8	1	10	3	5	7	2	/

Diofantska jednadžba ima 11 rješenja (a, b, c) no zbog nejednakosti trokuta samo je jedno od njih rješenje zadatka. Traženi trokut ima stranice duljina 4, 4 i 5.

6. Postoji li trokut sa cjelobrojnim duljinama stranica kojemu simetrala unutarnjeg kuta dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove koji se razlikuju za 1, a manja od preostale dvije stranice ima duljinu 1?

Rješenje:

Simetrala unutarnjeg kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije. Kako je stranica duljine 1 kraća stranica, onda vrijedi:



$$\frac{x-1}{x}=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{x}{x-1}=\frac{y}{1}$$

Odavde je:

$$y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}$$

$$y=1+\frac{1}{x-1}$$

Kako su rješenja jednadžbe cjelobrojna, to je moguće samo ako je $x-1$ djelitelj broja 1, tj. ako je $x-1=1$ ili $x-1=-1$.

Dobijemo dva rješenja, $x=2$ ili $x=0$. Kako je x duljina stranice, zaključujemo da je $x=2$. Onda je i $y=2$, odnosno rješenje (x, y) diofantske jednadžbe je (2, 2)

To znači da su duljine stranica trokuta ABC 1, 3 i 2 što je nemoguće zbog nejednakosti trokuta. Stoga takav trokut ne postoji.

7. Postoji li pravokutnik površine 503503503 kojemu su duljine stranica prirodni brojevi i razlikuju se za 5?

Rješenje:

Obzirom da se duljine stranica razlikuju za 5, možemo ih označiti s a i $a-5$.

Kako je površina pravokutnika jednaka umnošku duljina susjednih stranica, dobijemo

$a\cdot(a-5)=503503503$

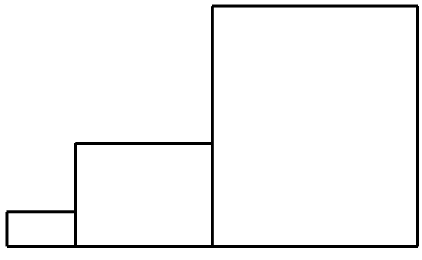
Sada se problem svodi na pitanje: može li se broj 503503503 napisati u obliku umnoška dvaju faktora koji se razlikuju za 5.

Promotrimo zadnju znamenku umnoška takvih brojeva:

Znamenka jedinica broja a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Znamenka jedinica broja $a-5$	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
Znamenka jedinica umnoška	0	6	4	4	6	0	6	4	4	6

Očito je da znamenka umnoška takvih brojeva ne može biti 3 pa diofantska jednadžba nema rješenja odnosno takav pravokutnik ne postoji.

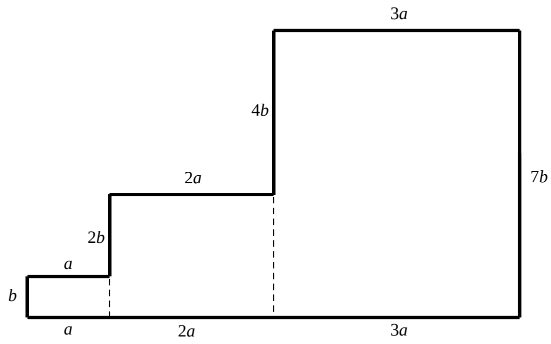
8. U ravnini su zadana tri pravokutnika kao na slici. Jedan od pravokutnika ima duljinu dvostruko veću od duljine najmanjeg pravokutnika i širinu trostruko veću od širine najmanjeg pravokutnika. Drugi pravokutnik ima duljinu trostruko veću od duljine najmanjeg pravokutnika i širinu sedmerostruko veću od širine najmanjeg pravokutnika. Odredi dimenzije najmanjeg pravokutnika ako je opseg dobivenog lika 336, a duljine stranica su prirodni brojevi.



Rješenje:

Neka su a i b duljine stranica najmanjeg pravokutnika.

Na osnovu uvjeta iz zadatka označimo rub dobivenog lika.



Sada je:

$o = 2 \cdot (6a + 7b)$

Riješimo diofantsku jednadžbu:

$2 \cdot (6a + 7b) = 336$

$6a + 7b = 168$

$6a = 168 - 7b$

$a = \dfrac{168 - 7b}{6}$

$a = \dfrac{168 - 6b - b}{6}$

$a = 28 - b - \dfrac{b}{6}$

Zaključujemo da je $b = 6k,\ k \in \mathbb{N}$.

Ako je $b = 6,$ onda je $a = 21.$

Ako je $b = 12,$ onda je $a = 14.$

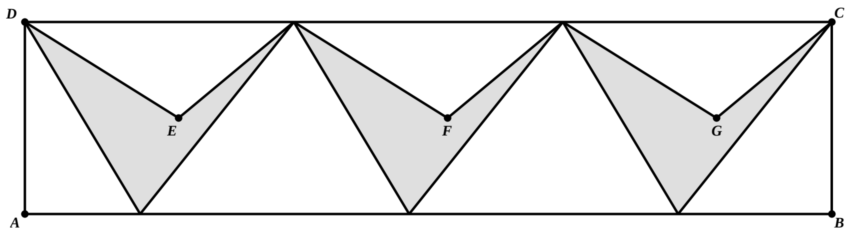
Ako je $b = 18,$ onda je $a = 7.$

Ako je $b = 24,$ onda je $a = 0$ što je nemoguće.

Rješenja (a, b) diofantske jednadžbe su (21, 6), (14, 12) i (7, 18).

Dakle, postoje tri takva pravokutnika i to pravokutnik sa stranicama duljina 6 i 21, pravokutnik sa stranicama duljina 12 i 14 te pravokutnik sa stranicama duljina 7 i 18.

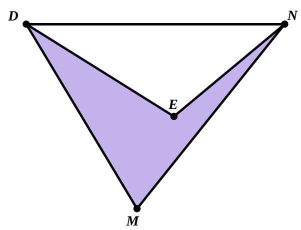
9. Odredi sve pravokutnike *ABCD* kojima su duljine stranica prirodni brojevi ako je površina osjenčanog dijela pravokutnika 36 kao što je prikazano na slici. Napomena: Osjenčani dio se sastoji od tri sukladna četverokuta, a točke *E*, *F* i *G* pripadaju simetrali stranice $\overline{BC}$.



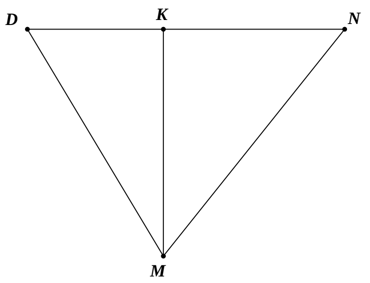
Rješenje:

Kako su osjenčani četverokuti sukladni, površina jednog od njih je 12. Označimo jedan od tih četverokuta *MNED*.

Površina tog četverokuta jednaka je razlici površina dvaju trokuta, tj.:



$P_{MNED} = P_{MND} - P_{END}$

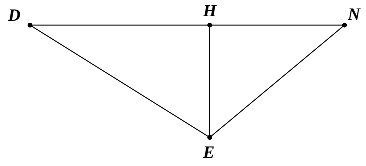


Označimo s $\overline{MK}$ visinu trokuta ΔMND, a duljine stranica pravokutnika $ABCD$ s $|AB| = a$ i $|BC| = b$, onda vrijedi:

$$|ND| = \frac{1}{3}a, \quad |MK| = b.$$

Sada je:

$$P_{MND} = \frac{|ND| \cdot |MK|}{2} = \frac{1}{2} \cdot |ND| \cdot |MK| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ab = \frac{1}{6}ab$$



Označimo s $\overline{EH}$ visinu trokuta ΔEND.

Kako točka E pripada simetrali stranice $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AD}$, onda je duljina dužine $\overline{EH}$ polovina duljine stranice $\overline{BC}$, tj.

$$|EH| = \frac{1}{2}b$$

To znači da je $P_{END} = \frac{|ND| \cdot |EH|}{2} = \frac{1}{2} \cdot |ND| \cdot |EH| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{12}ab$

Sada je $P_{MNED} = P_{MND} - P_{END} = \frac{1}{6}ab - \frac{1}{12}ab = \frac{1}{12}ab$, pa vrijedi:

$$\frac{1}{12}ab = 12.$$

$$ab = 144$$

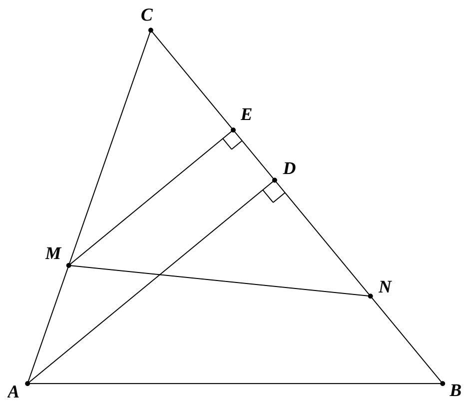
Rješenja (a, b) ove diofantske jednadžbe su:

(1, 144), (2, 72), (3, 48), (4, 36), (6, 24), (8, 18), (9, 16), (12, 12), (16, 9), (18, 8), (24, 6), (36, 4), (48, 3), (72, 2), (144, 1).

Dakle, ima osam takvih pravokutnika i to su: pravokutnik sa stranicama duljina 1 i 144, pravokutnik sa stranicama duljina 2 i 72, pravokutnik sa stranicama duljina 3 i 48, pravokutnik sa stranicama duljina 4 i 36, pravokutnik sa stranicama duljina 6 i 24, pravokutnik sa stranicama duljina 8 i 18, pravokutnik sa stranicama duljina 9 i 16 te kvadrat sa stranicom duljine 12.

10. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ΔABC označene su točke M i N tako da je $|AM| : |MC| = 1 : m$ i $|BN| : |NC| = 1 : n$. Odredi $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $P_{\Delta ABC} : P_{\Delta MNC} = 2 : 1$.

Rješenje:



Označimo na slici visinu $\overline{AD}$ trokuta ΔABC i visinu $\overline{ME}$ trokuta ΔMNC.

Dobiveni pravokutni trokuti ΔADC i ΔMEC imaju zajednički kut s vrhom C pa su po poučku K–K slični i vrijedi:

$|AC|:|MC| = |AD|:|ME|$.

Kako je $|AM|:|MC| = 1:m$, vrijedi $|AC|:|MC| = (1+m):m$ pa je omjer duljina visina trokuta ΔADC i ΔMEC jednak $|AD|:|ME| = (1+m):m$, odnosno $\frac{|AD|}{|ME|} = \frac{(1+m)}{m}$.

Nadalje, kako je $|BN|:|NC| = 1:n$, omjer duljina osnovica ΔADC i ΔMEC jednak je $|BC|:|NC| = (1+n):n$, odnosno $\frac{|BC|}{|NC|} = \frac{(1+n)}{n}$.

$P_{\Delta ABC} = \frac{|BC|\cdot|AD|}{2}$, $P_{\Delta MNC} = \frac{|NC|\cdot|ME|}{2}$ i vrijedi $P_{\Delta ABC} : P_{\Delta MNC} = 2:1$ pa je

$\left(|BC|\cdot|AD|\right):\left(|NC|\cdot|ME|\right) = 2:1$ ili

$$\frac{|BC|\cdot|AD|}{|NC|\cdot|ME|} = \frac{|BC|}{|NC|}\cdot\frac{|AD|}{|ME|} = 2.$$

Stoga vrijedi:

$$\frac{1+n}{n}\cdot\frac{1+m}{m} = 2$$

$$(1+n)\cdot(1+m) = 2nm$$

$$1+m+n+nm = 2nm$$

$$nm-n-m = 1$$

$$nm-n-m+1 = 1+1$$

$$n(m-1)-(m-1) = 2$$

$$(m-1)(n-1) = 2$$

Kako su $m,n \in \mathbb{N}$ imamo dvije mogućnosti:

$m-1=1$ i $n-1=2$ ili $m-1=2$ i $n-1=1$

Konačno, rješenja (m, n) ove diofantske jednadžbe su (2, 3) i (3, 2) pa zadatak ima dva rješenja: $m=2$ i $n=3$ ili $m=3$ i $n=2$.