Diofantske jednadžbe

Miljen Mikić

15. prosinca 2019.

Ideje za rješavanje

1. **Faktorizacija**

   Prva i osnovna metoda u kojoj je cilj na jednoj strani dobiti nešto što znamo faktorizirati, a na drugoj produkt nepoznanica.

   Primjer Nađite sve cijele brojeve x i y takve da je $x(y+1)^2 = 243y$.

2. **Kongruencije**

   Metoda koja se obično koristi za eliminaciju rješenja, cilj je dokazati da lijeva i desna strana ne daju iste ostatke pri dijeljenju s nekim brojem. Korisno je promatrati kvadratne ostatke pri dijeljenju s $3, 4, 8, 9$, a kubne ostatke pri dijeljenju sa 7 (ima ih malo - uvjerite se).

   Primjer (USAMO 1976) Odredite sva rješenja jednadžbe $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$ u prirodnim brojevima.

3. **Diskriminanta**

   Ako u zadatku prepoznamo kvadratnu jednadžbu po nekoj nepoznanici i traže se cjelobrojna rješenja, tada diskriminanta te jednadžbe mora biti potpun kvadrat.

   Primjer Riješite u cijelim brojevima jednadžbu $x^2 - xy + y = 3$.

4. **Ograničavanje rješenja**

   Korisno kad se traže rješenja u prirodnim brojevima i ima puno nepoznanica - ideja je da se jedne ili više njih riješimo tako što im ograničimo skup mogućih vrijednosti.

   Primjer (Državno 1.r., 2000.) Nađite sve prirodne brojeve a, b, c takve da

   $$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{3}{c} = 1.$$

5. **Svojstva razlomaka**

   U zadacima u kojima se traži da je neki razlomak cijeli broj, često je korisno upotrijebiti jednostavnu nejednakost $brojnik \geq nazivnik$ ako znamo da je brojnik nenegativan.

   Primjer (HMO 2013.) Nađite sve prirodne brojeve x i y takve $x^2+y \mid x^2y+x$ i $y^2 - x \mid xy^2 + y$.

6. **Beskonačni spust**

   Ako možemo pokazati da nepoznanica mora biti beskonačno puta djeljiva s nekim cijelim brojem, tada smo odredili vrijednost te nepoznanice jer je to moguće samo za trivijalno rješenje (tj. nulu).

   Primjer Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

7. **Najveći zajednički djeljitelj**

   Izuzetno korisna metoda u kojoj lijevu i desnu stranu izrazimo kao produkt njihovog najvećeg zajedničkog djeljitelja (mjere) i faktora koji su međusobno relativno prosti.

   Primjer Riješite u cijelim brojevima $a^{5a} = b^b$.

Upute i rješenja primjera

1. $M(y, y+1) = 1$, pa mora biti $(y+1)^2 \mid 243 = 3^5$. Promatranjem svih mogućih faktorizacija dobivamo rješenja (0,0), (-486,-2), (54,2), (-108,4), (24,8) i (-30,-10)

2. Jednadžbu zapišemo kao $c^2 = (a^2 - 1)(b^2 - 1) - 1$ i promatramo ostatke modulo 4. Zaključujemo da svi a, b, c moraju biti parni, pa ih zapišemo kao $a = 2^r x, b = 2^r y, c = 2^r z$, pri čemu je bar jedan od x, y, z neparan i $r \geq 1$. Dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2r} x^2 y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod 4$, a to je nemoguće pa ni polazna jednadžba nema rješenja.

3. Ovo je kvadratna jednadžba po x, pa promatramo njenu diskriminantu koja mora biti potpun kvadrat: $(y-2)^2 + 8 = z^2$. Faktoriziramo kao razliku kvadrata i dobivamo rješenja početne jednadžbe (2,1), (-1,1), (0,3) i (3,3).

4. Ideja je ograničiti skup mogućih vrijednosti od a, b, c. Ako su oba $a, b \geq 3$, onda je $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{3}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{c} < 1$, što je kontradikcija s uvjetom zadatka. Mora dakle biti $a \leq 2$ ili $b \leq 2$, što promatranjem slučajeva dovodi do rješenja $(1, 2k, 3k)$,$(2, 1, 2)$,$(2, 3, 18)$ i $(k, 2, 3k)$.

5. Rješenje je na `http://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2015/02/2013_HMO_rjesenja.pdf`.

6. Pokažemo da nepoznanice moraju beskonačno puta biti djeljive s 2, što je moguće samo ako su sve nula. Desna strana je parna, pa mora biti i lijeva, a to je samo kad su ili svi parni ili kad je točno jedan paran. Ako je točno jedan paran, onda je $LHS \equiv 2 \pmod 4$, a $RHS \equiv 0 \pmod 4$, kontradikcija. Dakle, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$. Sličnim zaključivanjem dobivamo $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2 \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$. Postupak možemo ponavljati unedogled, tj. ako je (x, y, z) rješenje početne jednadžbe, onda su x, y, z djeljivi s 2^n za svaki prirodan broj n, a to je moguće samo za (0,0,0), što je jedino rješenje.

7. Očito je $b \geq a$. Prikažemo a i b preko najvećeg zajedničkog djeljitelja kao $a = du, b = dv$, gdje je $M(u, v) = 1$. Tada je $(du)^{5du} = (dv)^{dv} \Leftrightarrow d^{5u-v} \cdot u^{5u} = v^v$. Kako su u i v relativno prosti, mora biti $u = 1 \Rightarrow d^{5-v} = v^v \Rightarrow v \leq 5$, pa dobivamo rješenja (1,1) i (256,1024).

Zadaci

1. Nađite sve prirodne brojeve a, b, c takve da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

2. Riješite u cijelim brojevima: $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

3. Riješite u cijelim brojevima: $y^2 = x^3 + 7$.

4. Nađite sva nenegativna rješenja jednadžbe $2^x + 3^y = z^2$.

5. Nađite sve parove cijelih brojeva (x, y) takve da je $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

6. Nađite sva prirodna rješenja jednadžbe $(x + y)(y + z)(z + x) = txyz$, pri čemu su x, y, z u parovima relativno prosti.