ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab =$
$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
$= (a + b)^2 - c^2$ 2 BODA
$= (a + b + c)(a + b - c)$ 2 BODA
Uvrštavanjem se dobiva:
$(786 + 389 + 175)(786 + 389 - 175) =$
$= 1\,350 \cdot 1\,000$ 1 BOD
$= 1\,350\,000$ 1 BOD
……………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Uvrštavanjem se dobiva:
$786^2 - 175^2 + 389^2 + 2 \cdot 786 \cdot 389 =$
$= 617\,796 - 30\,625 + 151\,321 + 611\,508$ 4 BODA
$= 587\,171 + 151\,321 + 611\,508$ 1 BOD
$= 1\,350\,000$ 1 BOD
……………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

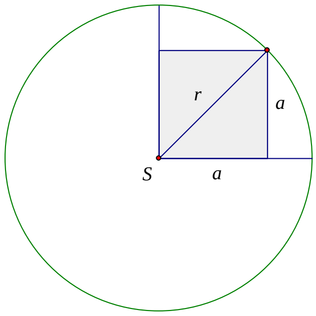
2. Prvi način:

Neka su x i y traženi brojevi.
Prema uvjetu zadatka vrijedi: $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = 5 : 1 : 18$.
Iz produženog omjera slijedi $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = (5k) : (1k) : (18k)$, gdje je k prirodni broj, odnosno
$x + y = 5k$, $x - y = k$, $x \cdot y = 18k$. 1 BOD
Iz sustava prve dvije jednadžbe slijedi $x = 3k$, $y = 2k$. 2 BODA
Iz treće jednadžbe slijedi $6k^2 = 18k$, odnosno $6k = 18$, tj. $k = 3$. 2 BODA
To su brojevi $x = 3 \cdot 3 = 9$ i $y = 2 \cdot 3 = 6$. 1 BOD
……………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su x i y traženi brojevi.
Prema uvjetu zadatka vrijedi: $(x + y) : (x - y) : (x \cdot y) = 5 : 1 : 18$.
Iz produženog omjera slijedi: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{1}$ i $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{5}{18}$. 1 BOD
Sređivanjem prvog razmjera slijedi $y = \frac{2}{3}x$, 2 BODA
a sređivanjem drugog razmjera slijedi $18x + 18y = 5xy$. 1 BOD
Rješavanjem ovog sustava dobiju se brojevi $x = 9$ i $y = 6$. 2 BODA
……………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

3.



a – duljina stranice kvadrata
d – duljina dijagonale kvadrata
r – duljina polumjera

$d = r$ 1 BOD

Primijenimo Pitagorin poučak na kvadrat:

$a^2 + a^2 = r^2$,

$a = \frac{\sqrt{2}}{2} r$. 1 BOD

Površina kvadrata:

$P_k = a^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\right)^2 = \frac{1}{2} r^2$. 1 BOD

Površina kružnog isječka sa središnjim kutom veličine $90°$ je četvrtina površine kruga polumjera r:

$P_i = \frac{1}{4} r^2 \pi$. 1 BOD

Omjer površine kvadrata i površine kružnog isječka je

$P_k : P_i = \left(\frac{1}{2} r^2\right) : \left(\frac{1}{4} r^2 \pi\right) = \frac{2}{\pi}$. 1 BOD

$2 : \pi \approx 2 : 3.14 = 0.636...$

Površina kvadrata približno je 64 % površine kružnog isječka. 1 BOD

………………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Površina kružnog isječka može se izračunati i pomoću središnjeg kuta veličine 90°.

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°} = \frac{r^2 \pi \cdot 90°}{360°} = \frac{1}{4} r^2 \pi$$

4. Prvi način:

Vesna se kretala brzinom 10 km/h u odnosu na tlo, 1 BOD

pa je 500 m prešla za $t = \frac{s}{v} = \frac{0.5}{10}$ h $= \frac{1}{20}$ h. 2 BODA

Za to vrijeme, Damir se kretao brzinom 4 km/h u odnosu na tlo i prešao je

$s = v \cdot t = 4 \cdot \frac{1}{20}$ km $= \frac{1}{5}$ km = 200 m. 2 BODA

500 m – 200 m = 300 m

Vesna je bila 300 m ispred Damira. 1 BOD

………………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Vesna se kretala brzinom 10 km/h u odnosu na tlo. 1 BOD

Neka je x vrijeme za koje je Vesna prešla tih 500 m.

Iz razmjera $10 : 0.5 = 1 : x$ 1 BOD

slijedi $x = \frac{1}{20}$ h. 1 BOD

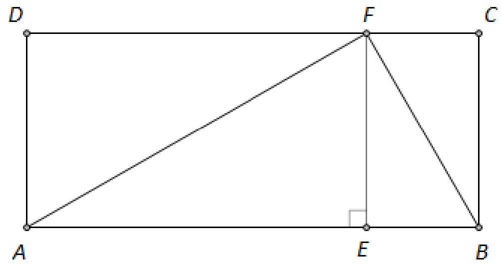
Vesna je 500 m prešla za $\frac{1}{20}$ h.
Za to vrijeme, Damir se kretao brzinom 4 km/h u odnosu na tlo.
Neka je y put koji je Damir prešao za to vrijeme.

Iz razmjera 4 000 : y = 1 : $\frac{1}{20}$ 1 BOD

slijedi y = 200 m. 1 BOD

Damir je za $\frac{1}{20}$ h prešao 200 m.
500 m – 200 m = 300 m
Vesna je bila 300 m ispred Damira. 1 BOD
……………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:



Neka je $|AD| = x$.
Trokuti ΔAFD i ΔFBC su slični pravokutni trokuti po poučku KK 1 BOD
($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°). 1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$. 1 BOD

Nadalje je x^2 = 12, odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm. 1 BOD

Neka je E nožište visine iz vrha F na stranicu $\overline{AB}$.
Tada je $|EF| = 2\sqrt{3}$ cm, 1 BOD

pa je površina trokuta ΔABF jednaka $P = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$ cm^2 = $8\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD
……………………………………………………………………..…………UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja, treba oduzeti 1 BOD.

Drugi način:
Neka je $|AD| = x$.
Trokuti ΔAFD i ΔFBC su slični pravokutni trokuti po poučku KK 1 BOD
($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°). 1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$. 1 BOD

Nadalje je x^2 = 12, odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm. 1 BOD
Uočimo da je trokut ΔABF pravokutan.
To možemo ustanoviti uočivši da je $|\angle DAF| + |\angle AFD| = 90°$ i $|\angle FBC| + |\angle CFB| = 90°$
(zbroj veličina šiljastih kutova u trokutu je 90°) i uvjeta zadatka $|\angle AFD| = |\angle FBC|$,

odakle je $|\angle BFA| = 180° - |\angle AFD| - |\angle CFB|$, odnosno

$|\angle BFA| = 180° - (|\angle AFD| + |\angle CFB|) = 180° - (|\angle FBC| + |\angle CFB|) = 180° - 90° = 90°$.

Duljine hipotenuza $\overline{AF}$ i $\overline{FB}$ pravokutnih trokuta ΔAFD i ΔFBC su:

$|AF|^2 = 36 + 12 = 48$, $|AF| = 4\sqrt{3}$ cm i $|BF|^2 = 4 + 12 = 16$, $|BF| = 4$ cm. 1 BOD

Tako se površina trokuta ΔABF može izračunati pomoću umnoška duljina njegovih kateta:

$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2}$ cm² $= 8\sqrt{3}$ cm². 1 BOD

…………………………………………………………………...…………UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja, treba oduzeti 1 BOD.
Napomena 2: Ukoliko nedostaje obrazloženje da je trokut ΔABF pravokutan, treba oduzeti 1 BOD.

Treći način:

Neka je $|AD| = x$.

Trokuti ΔAFD i ΔFBC su slični pravokutni trokuti po poučku KK 1 BOD

($|\angle AFD| = |\angle FBC|$ i oba imaju kutove veličine 90°). 1 BOD

Iz sličnosti trokuta vrijedi jednakost omjera: $\frac{6}{x} = \frac{x}{2}$. 1 BOD

Nadalje je $x^2 = 12$, odnosno $x = 2\sqrt{3}$ cm. 1 BOD

Duljine hipotenuza $\overline{AF}$ i $\overline{FB}$ pravokutnih trokuta ΔAFD i ΔFBC su:

$|AF|^2 = 36 + 12 = 48$, $|AF| = 4\sqrt{3}$ cm i $|BF|^2 = 4 + 12 = 16$, $|BF| = 4$ cm. 1 BOD

Obratom Pitagorinog poučka može se provjeriti da je ΔABF pravokutan

(48 + 16 = 64, a 64 = $|AB|^2$).

Tako se površina trokuta ΔABF može izračunati pomoću umnoška duljina njegovih kateta:

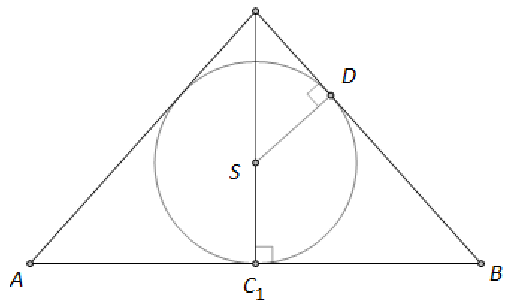
$P = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2}$ cm² $= 8\sqrt{3}$ cm². 1 BOD

…………………………………………………………………...…………UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko nije izveden postupak djelomičnog korjenovanja, treba oduzeti 1 BOD.
Napomena 2: Ukoliko nedostaje obrazloženje da je trokut ΔABF pravokutan, treba oduzeti 1 BOD.

6. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.

Trokuti ΔCC_1B i ΔSDC su slični po poučku KK: 1 BOD

trokuti su pravokutni, a kut $\angle DCS$ im je zajednički. 1 BOD

Stoga vrijedi omjer duljina odgovarajućih stranica: $|C_1B| : |BC| = |SD| : |SC|$. 1 BOD

$|C_1B| = \frac{a}{2}$, $|SC| = 20 - r$, 1 BOD odnosno $\frac{a}{2} : b = r : (20 - r)$. 1 BOD

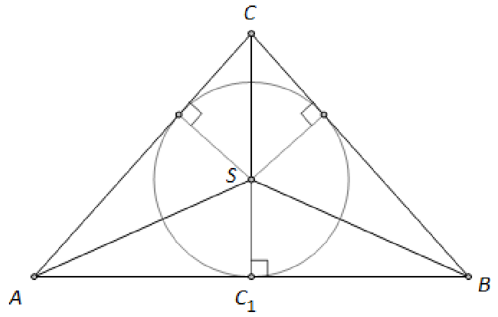
Kako je $a : b = 4 : 3$, onda je $2 : 3 = r : (20 - r)$, 2 BODA

odakle se dobije $r = 8$ cm. 2 BODA

……………………...…………………………………………...…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.
Iz omjera duljina osnovice i kraka slijedi $a : b = (4k) : (3k)$, gdje je k pozitivan realni broj.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔCC_1B, iz $20^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$ slijedi

$k = 4\sqrt{5}$ cm, 1 BOD

$a = 16\sqrt{5}$ cm, 1 BOD

$b = 12\sqrt{5}$ cm. 1 BOD

Površina trokuta ΔABC je

$P = \frac{16\sqrt{5} \cdot 20}{2}$ cm^2 $= 160\sqrt{5}$ cm^2. 1 BOD

Zbroj površina trokuta ΔABS, ΔBCS i ΔCAS jednak je površini trokuta ΔABC, pa vrijedi: 1 BOD

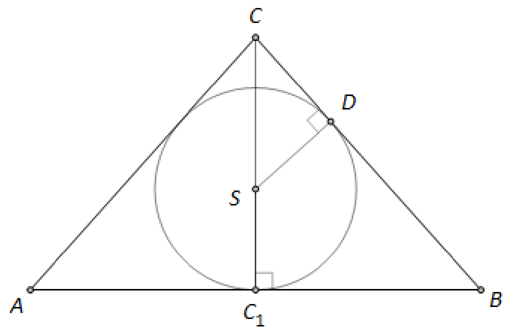
$$\frac{16\sqrt{5} \cdot r}{2} + \frac{12\sqrt{5} \cdot r}{2} + \frac{12\sqrt{5} \cdot r}{2} = 160\sqrt{5}.$$ 2 BODA

Rješavanjem ove jednadžbe slijedi da je $r = 8$ cm. 2 BODA

……………………...…………………………………………...…… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Skica: 1 BOD



Neka je a duljina osnovice, b duljina kraka, a r duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice.
Iz omjera duljina osnovice i kraka slijedi $a : b = (4k) : (3k)$, gdje je k pozitivan realni broj.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔCC_1B, iz $20^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$ slijedi

$k = 4\sqrt{5}$ cm, 1 BOD

$a = 16\sqrt{5}$ cm, 1 BOD

$b = 12\sqrt{5}$ cm. 1 BOD

Trokuti ΔCC_1B i ΔSDC su slični po poučku KK: 1 BOD

trokuti su pravokutni, a kut $\angle DCS$ im je zajednički. 1 BOD

Stoga vrijedi omjer duljina odgovarajućih stranica: $\frac{a}{2} : b = |SD| : |SC|$, 1 BOD

odnosno $8\sqrt{5} : 12\sqrt{5} = r : (20 - r)$, 1 BOD

odakle se dobije r = 8 cm. 2 BODA

………………………..……………………….…………………...….… UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Neka je $\overline{abcdef}$ takav da je $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i a, b, c, d, e, f svi međusobno različiti.

Takvih je ukupno 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720 brojeva. 2 BODA

Od njih 720, manji od 345 612 su brojevi:

- $\overline{1bcdef}$, $\overline{2bcdef}$

  Takvih je brojeva 5 · 4 · 3 · 2 · 1 + 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 2 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 240. 2 BODA

- $\overline{31cdef}$, $\overline{32cdef}$

  Takvih je brojeva 4 · 3 · 2 · 1 + 4 · 3 · 2 · 1 = 2 · 4 · 3 · 2 · 1 = 48. 2 BODA

- $\overline{341def}$, $\overline{342def}$

  Takvih je brojeva 3 · 2 · 1 + 3 · 2 · 1 = 2 · 3 · 2 · 1 = 12. 1 BOD

- $\overline{3451ef}$, $\overline{3452ef}$

  Takvih je brojeva 2 · 1 + 2 · 1 = 2 · 2 · 1 = 4. 1 BOD

Brojeva koji su manji od 345 612 je ukupno 240 + 48 + 12 + 4 = 304. 1 BOD

Brojeva koji su veći od 345 612 je 720 – 304 – 1 = 415. 1 BOD

……………………..……………………….……………………....…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je $\overline{abcdef}$ takav da je $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i a, b, c, d, e, f svi međusobno različiti.

Takvih je ukupno 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720 brojeva. 2 BODA

Od njih 720, veći od 345 612 su brojevi:

- $\overline{4bcdef}$, $\overline{5bcdef}$, $\overline{6bcdef}$

  Takvih je brojeva
  5 · 4 · 3 · 2 · 1 + 5 · 4 · 3 · 2 · 1 + 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 3 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 360. 2 BODA

- $\overline{35cdef}$, $\overline{36cdef}$

  Takvih je brojeva 4 · 3 · 2 · 1 + 4 · 3 · 2 · 1 = 2 · 4 · 3 · 2 · 1 = 48. 2 BODA

- $\overline{346def}$

  Takvih je brojeva 3 · 2 · 1 = 6. 1 BOD

- $\overline{345621}$

  Takav je jedan broj. 1 BOD

Brojeva koji su veći od 345 612 je ukupno 360 + 48 + 6 + 1 = 415. 1 BOD

Brojeva koji su manji od 345 612 je 720 – 415 – 1 = 304. 1 BOD

……………………..……………………….……………………....…… UKUPNO 10 BODOVA