

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. siječnja 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj učenika tog šestog razreda.

Tada učenika koji iz vladanja imaju ocjenu „dobro“ ili „loše“ ima:

$$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5} x = \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{5} x \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{5}{10} x + \frac{2}{10} x$$

$$= \frac{7}{10} x \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

Ostatak, odnosno $\frac{3}{10}$ razreda, čine učenici s ocjenom „uzorno vladanje“.

Budući da ih je ukupno 9, možemo pisati $\frac{3}{10} x = 9$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je $x = 30$. 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je x broj učenika tog šestog razreda.

Učenika dobrog vladanja ima 50% od x , lošeg vladanja $\frac{1}{5} x$, a 9 je učenika uzornog vladanja.

Ukupan broj učenika tog razreda dobit ćemo ako zbrojimo broj učenika lošeg, dobrog i uzornog vladanja, a to možemo zapisati jednadžbom:

$$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5} x + 9 = x \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{5} x + 9 = x \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9 = \frac{10}{10} x - \frac{5}{10} x - \frac{2}{10} x \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9 = \frac{3}{10} x \quad \quad \quad 1 \text{ BOD}$$

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je $x = 30$. 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik može koristiti bilo koji zapis racionalnog broja (postotak, razlomak, decimalni broj).

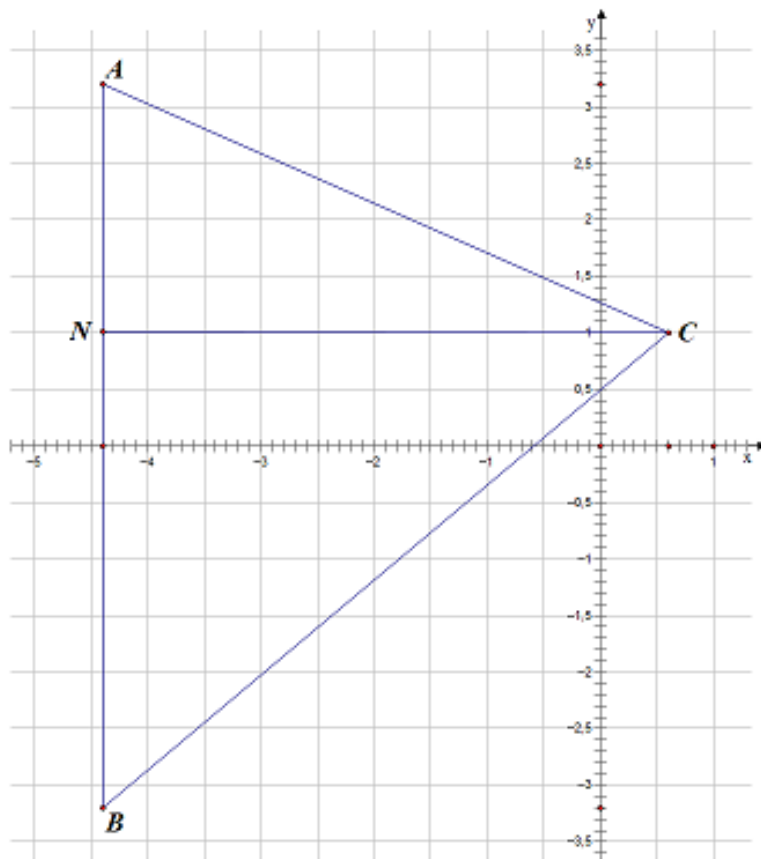
2. Prvi način:

Točke A i C , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate $(-4.4, -3.2)$ i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je $|AB| = 6.4$ jediničnih dužina. 1 BOD

Duljina visine nacrtane vrhom C na stranicu \overline{AB} jednaka je $|CN| = 5$ jediničnih dužina, pri čemu je točka N nožište visine. 1 BOD



1 BOD

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \frac{6.4 \cdot 5}{2}$. 1 BOD

$P_{ABC} = 16$ kvadratnih jedinica. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

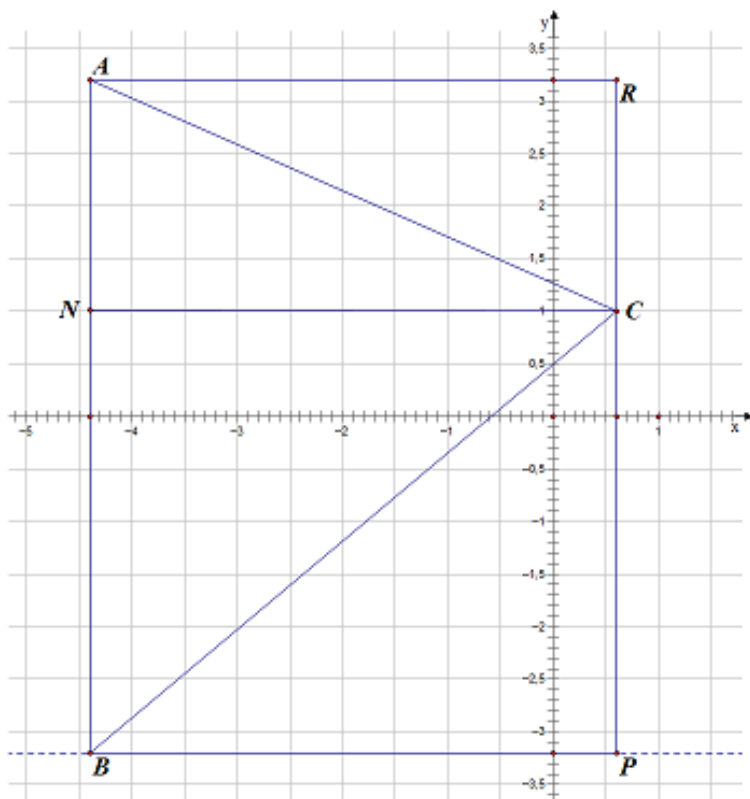
Točke A i C , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate $(-4.4, -3.2)$ i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je $|AB| = 6.4$ jediničnih dužina. 1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik $BPRA$ kojemu je stranica \overline{AB} trokuta jedna stranica, a treći vrh C trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik $BPRA$ ima površinu $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$ kvadratne jedinice. 1 BOD



1 BOD

Kako bi odredili površinu trokuta ABC trebamo od površine tog pravokutnika oduzeti površine pravokutnih trokuta ACR i BPC .

Površina trokuta ACR iznosi $P_{ACR} = \frac{5 \cdot 2.2}{2} = 5.5$ kvadratnih jedinica.

Površina trokuta BPC iznosi $P_{BPC} = \frac{5 \cdot 4.2}{2} = 10.5$ kvadratnih jedinica.

1 BOD

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = 32 - 5.5 - 10.5 = 16$ kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Točke A i C , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka A je u drugom kvadrantu, a točka B , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili x -os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka B ima koordinate $(-4.4, -3.2)$ i nacrtamo ju.

1 BOD

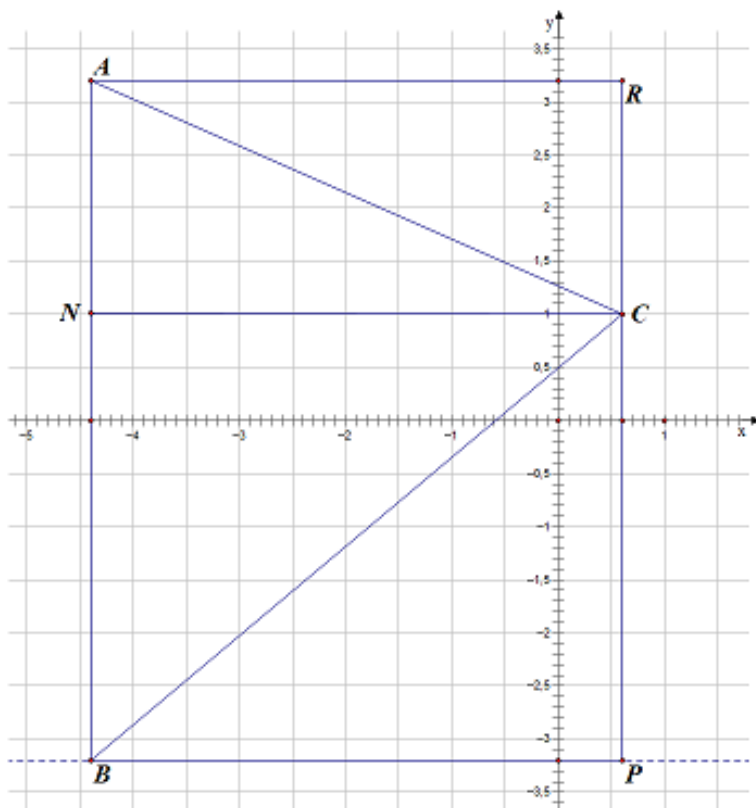
Tada je $|AB| = 6.4$ jediničnih dužina.

1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik $BPRA$ kojemu je stranica \overline{AB} trokuta jedna stranica, a treći vrh C trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik $BPRA$ ima površinu $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$ kvadratne jedinice.

1 BOD



1 BOD

Ako u trokut ABC nacrtamo visinu vrhom C na stranicu \overline{AB} , trokut ABC ćemo podijeliti na dva pravokutna trokuta. Tada će vrijediti

$$\triangle ANC \cong \triangle CRA$$

$$\text{i } \triangle NBC \cong \triangle BPC,$$

pa je površina trokuta ABC jednaka polovini površine pravokutnika $BPRA$.

1 BOD

Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \frac{32}{2} = 16$ kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik koji ne naznači mjerne jedinice ne gubi zbog toga naznačene bodove.

Napomena 2: Do točke B se moglo doći konstrukcijom osnosimetrične slika točke A , obzirom na os apscisa i onda nastaviti rješavanje zadatka kao u nekom od prikazanih načina. U tom slučaju taj korak bodovati s 1 BODOM.

3. Prva bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{20}$ posla.

Druga bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{30}$ posla.

Treća bušilica za 1 dan obavi $\frac{1}{x}$ posla.

1 BOD

Sve tri bušilice zajedno za 1 dan obave $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{7}$ posla.

1 BOD

Množenjem jednadžbe sa zajedničkim nazivnikom $420 \cdot x$ dobijemo

$$21x + 14x + 420 = 60x$$

1 BOD

$$420 = 25x$$

$$x = 16.8 \text{ dana}$$

1 BOD

$$x = 16 \text{ dana, } 19 \text{ sati i } 12 \text{ minuta}$$

1 BOD

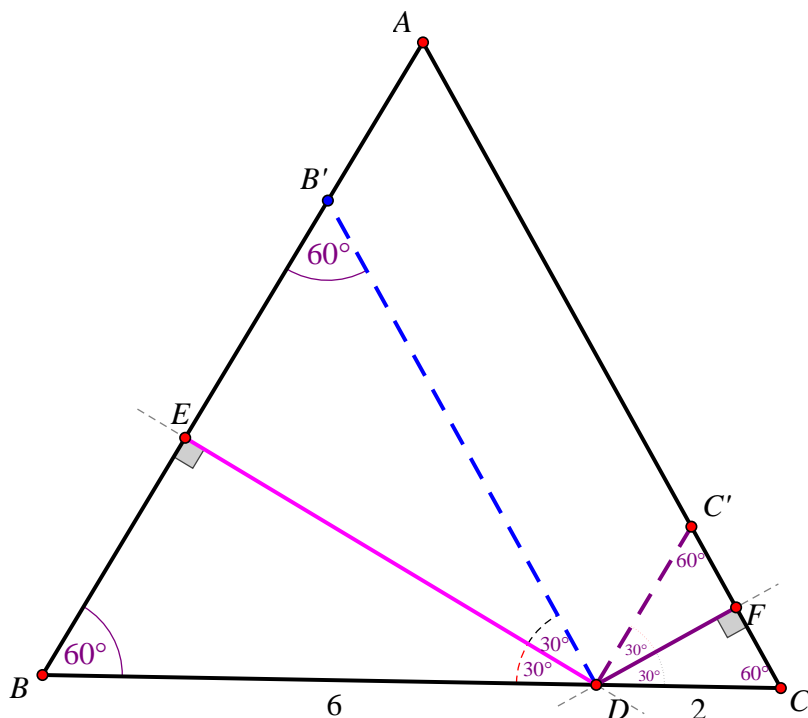
Treća bi bušilica posao napravila za točno 16 dana, 19 sati i 12 minuta.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Skica:

1 BOD



U jednakostraničnom trokutu ABC veličina kuta $\angle ABC$ jednaka je 60° , a trokut BDE je pravokutan, pa je $|\angle EDB| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

1 BOD

Neka je točka B' (centralno) simetrična točki B s obzirom na točku E .

1 BOD

Tada je trokut BDB' jednakostraničan.

1 BOD

$|BB'| = |BD| = 6$ cm, a $|BE| = \frac{1}{2}|BB'| = 3$ cm.

1 BOD

Analogno, trokut DCC' je jednakostraničan, pri čemu je C' (centralno) simetrična točki C s obzirom na točku F , pa je $|CC'| = |DC| = 2$ cm, a $|CF| = \frac{1}{2}|CC'| = 1$ cm.

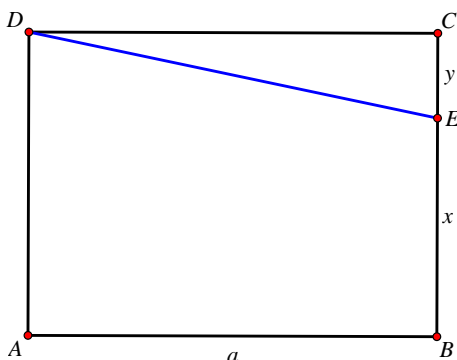
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|EC| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$.

Time je zadani pravokutnik $ABCD$ razdijeljen na pravokutni trokut ECD i pravokutni trapez $ABED$ kojemu su \overline{AD} i \overline{BE} osnovice, a \overline{AB} visina.

1 BOD

$$P_{ABED} = \frac{(x+y)+x}{2} \cdot a$$

1 BOD

$$P_{ECD} = \frac{y}{2} \cdot a \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$.
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6 : 1$$

$$(2x+y) : y = 6 : 1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2x + y = 6y$$

$$2x = 5y$$

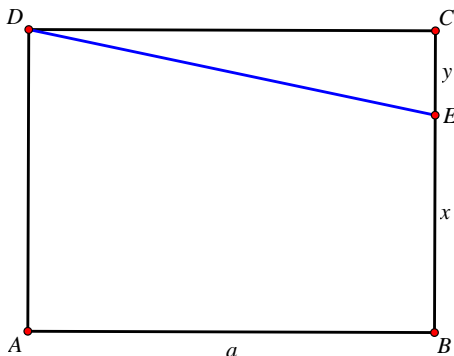
$$x : y = 5 : 2,$$

$$\text{odnosno } |BE| : |CE| = 5:2 \text{ ili } |CE| : |BE| = 2 : 5. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|EC| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$.

Time je zadani pravokutnik $ABCD$ podijeljen na pravokutni trokut ECD i pravokutni trapez $ABED$.
Površina trapeza $ABED$ može se izračunati tako da se od površine pravokutnika $ABCD$ oduzme površina pravokutnog trokuta ECD . 1 BOD

$$P_{ABED} = a \cdot (x + y) - \frac{a \cdot y}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= ax + ay - \frac{ay}{2} = ax + \frac{ay}{2}$$

$$= \frac{a \cdot (2x + y)}{2}$$

$$P_{ECD} = \frac{a \cdot y}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$.
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6 : 1$$

$$(2x+y) : y = 6 : 1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2x + y = 6y$$

$$2x = 5y$$

$$x : y = 5 : 2,$$

$$\text{odnosno } |BE| : |CE| = 5:2 \text{ ili } |CE| : |BE| = 2 : 5. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Neka su $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ i $\frac{z}{c}$ traženi razlomci.

$$\text{Tada vrijedi } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72} \text{ i } x : y : z = 5 : 7 : 1,$$

$$\text{pa slijedi } x = 5k, y = 7k, z = k.$$

$$\text{Nadalje, iz } c : a = 1 : 4 \text{ slijedi } a = 4c.$$

$$\text{Iz } b : c = 3 : 2 \text{ slijedi } b = \frac{3}{2}c.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u početnu jednakost dobijemo:

$$\frac{5k}{4c} + \frac{7k}{\frac{3}{2}c} + \frac{k}{c} = \frac{83}{72}$$

$$\frac{5k}{4c} + \frac{14k}{3c} + \frac{k}{c} = \frac{83}{72}$$

$$\frac{15k + 56k + 12k}{12c} = \frac{83}{72}$$

$$\frac{83k}{12c} = \frac{83}{72}$$

Razlomci su skraćeni do kraja pa slijedi

$$83k = 83 \text{ i } 12c = 72,$$

$$\text{tj. } k = 1 \text{ i } c = 6.$$

$$\text{Slijedi da je } x = 5, y = 7, z = 1$$

$$\text{i } c = 6, a = 24, b = 9.$$

$$\text{Traženi razlomci su } \frac{5}{24}, \frac{7}{9} \text{ i } \frac{1}{6}.$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

$$\frac{95}{100} \cdot 420 = 399, \text{ odnosno } 399 \text{ obitelji posjeduje TV.}$$

$$\frac{80}{100} \cdot 420 = 336, \text{ odnosno } 336 \text{ obitelji posjeduje kompjuter.}$$

$$399 + 336 = 735$$

$$735 - 420 = 315$$

315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

$$336 - 315 = 21, \text{ odnosno } 21 \text{ obitelj posjeduje samo kompjuter.}$$

Broj svih mogućih ishoda je 420.

Broj povoljnih ishoda je 21,

$$\text{pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka } p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%.$$

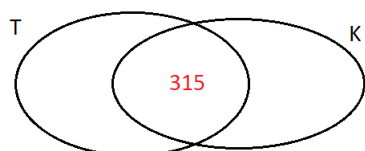
Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

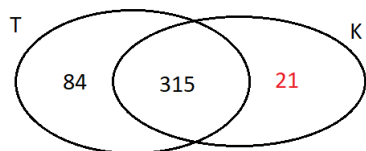
$$\frac{95}{100} \cdot 420 = 399, \text{ odnosno } 399 \text{ obitelji posjeduje TV.}$$

$$\frac{80}{100} \cdot 420 = 336, \text{ odnosno } 336 \text{ obitelji posjeduje kompjuter.}$$



Tada je $399 + 336 - 420 = 315$, odnosno 315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

1 BOD
1 BOD



$336 - 315 = 21$, odnosno 21 obitelj posjeduje samo kompjuter.

1 BOD

(**Napomena:** Broj elemenata skupa $T \setminus K$ nije nužan za rješenje zadatka, pa se ne boduje.)

Broj svih mogućih ishoda je 420.

1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21,

1 BOD

pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka $p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$.

2 BODA

Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Sve ispitane obitelji posjeduju barem jedan od dva uređaja.

Prema tome, one obitelji koje nemaju TV sigurno imaju kompjuter.

3 BODA

Vjerojatnost da nasumično odabrana obitelj posjeduje kompjuter, ali ne i TV (izražena postotkom) jednaka je postotku ispitanih obitelji koje nemaju TV.

3 BODA

U zadatku je zadano da 95% ispitanih obitelji ima TV.

Dakle, onih koji nemaju TV, a imaju kompjuter ima $100\% - 95\% = 5\%$.

2 BODA

Vjerojatnost da nasumično odabrana obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA